

DS n°2 (2 heures)
Physique statistique, machines thermiques

La calculatrice est autorisée

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	Indicateur
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions et pagination	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respectés	Palier de Malus	Effet sur la note
0	0	aucun
1-2	1	-3.3%
3-4	2	-6.7%
5-6	3	-10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'essentiel des données et formules utiles se trouve dans un formulaire en fin d'énoncé.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas ou peu guidées. Elles demandent de l'initiative de la part du candidat. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Exercice 1 : Jean Perrin et l'hypothèse atomique

Les études théoriques sur le mouvement brownien, proposées par ALBERT EINSTEIN en 1905 et complétées par celles de PAUL LANGEVIN en 1908, ont été spectaculairement confirmées par une série d'une dizaine d'expériences réalisées entre 1907 et 1909 par JEAN PERRIN dont nous avons fêté le 150^e anniversaire de naissance en 2021. Ces études sont les piliers de l'acceptation de l'existence des atomes par la communauté scientifique. Elles ont clos la *controverse atomiste* ouverte par les Grecs 6 siècles avant notre ère !

Après avoir pris connaissance des résultats de PERRIN, en 1908, l'un des derniers farouches anti-atomistes, WILHELM OSTWALD, déclare « *Je suis désormais convaincu que nous sommes entrés en possession de preuves expérimentales du caractère discret ou granulaire de la nature, que l'hypothèse atomique avait cherchées en vain depuis des millénaires* ».

Les expériences de PERRIN et le modèle de LANGEVIN reposent entièrement sur les modèles microscopiques de LUDWIG BOLTZMANN, fondateur dans la seconde moitié du XIX^e siècle de la physique statistique. Les travaux expérimentaux de PERRIN lui permirent notamment de mesurer la constante de BOLTZMANN k_B . En 1906, donc peu de temps avant la publication de ces travaux, BOLTZMANN se suicida, las des critiques et des attaques des disciples d'OSTWALD... En 1926, PERRIN obtint le prix Nobel pour ses expériences.

Dans ce sujet, nous proposons de revenir sur quelques points de ce moment fameux de l'histoire de la physique en étudiant quelques aspects de la théorie de Langevin et de certaines des expériences réalisées par PERRIN. Pour réaliser ses expériences, JEAN PERRIN utilise des grains de gomme-gutte : « *La gomme-gutte, qu'on utilise pour l'aquarelle, provient de la dessiccation du latex. Un morceau de cette substance, frotté avec la main sous un mince filet d'eau distillée se dissout peu à peu en donnant une belle émulsion opaque d'un jaune vif, où le microscope révèle un fourmillement de grains jaunes de diverses tailles parfaitement sphériques. On peut calibrer ces grains jaunes et les séparer du liquide où ils baignent par une centrifugation énergique.* »

Dans tout ce problème, ces grains seront donc supposés identiques, de forme sphérique, de rayon $R_b = 0,2\,\mu\text{m}$, de volume $V_b = 3,4 \times 10^{-20}\,\text{m}^3$ et de masse volumique $\mu_b = 1,2 \times 10^3\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On note $m_b = 4,1 \times 10^{-17}\,\text{kg}$ la masse d'un grain. Dans ses expériences, Jean Perrin fabrique une émulsion en introduisant ces grains dans de l'eau légèrement sucrée. Ce liquide possède une masse volumique assimilable à celle de l'eau pure $\mu_e = 1,0 \times 10^3\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Le peu de sucre dissous dans l'eau lui confère tout de même un caractère visqueux. De ce fait, l'eau exerce sur les grains en mouvement lent deux forces :

- la résultante des forces de pression, peu modifiée par rapport à une situation d'équilibre, est donnée par la loi d'ARCHIMÈDE : cette force $\vec{\Pi} = -\mu_e V_b \vec{g}$ est exactement opposée au poids du liquide déplacé par chaque grain ;
- la résultante des forces de frottement visqueux se traduit par une force $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ ou $\alpha > 0$ et $\vec{v}$ désigne la vitesse des grains. La formule de STOKES précise que, pour un grain sphérique, $\alpha = 6\pi\eta R_b$ dans laquelle $\eta = 1,2 \times 10^{-3}\,\text{Pa} \cdot \text{s}$ représente le coefficient de viscosité dynamique de l'eau légèrement sucrée. Avec ces valeurs numériques, on trouve ici $\alpha = 4,5 \times 10^{-9}\,\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

En dehors de ces données, aucune connaissance relative à la viscosité n'est nécessaire à cette étude. Ce problème est décomposé en deux parties relativement indépendantes : la partie I est consacrée au modèle du gaz parfait et la partie II présente le modèle théorique du mouvement brownien de LANGEVIN complété par les expériences de diffusion de PERRIN.

Dans ce qui suit on utilisera la fonction $A(z) = \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ avec H homogène à une distance. Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. La valeur moyenne temporelle d'une fonction $\varphi(t)$ sera notée $\langle \varphi \rangle$.

I – Équilibre vertical d'un gaz à la température ambiante

On considère un gaz parfait constitué de molécules identiques, de masse molaire $M = 30\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$, en équilibre thermique avec un thermostat à la température ambiante T_0 . Le gaz, soumis à la pesanteur, est au repos dans un récipient de volume V , de hauteur h de l'ordre de quelques mètres, et de section $S = 1\,\text{m}^2$. L'encombrement caractéristique d'une molécule constituant ce gaz est une sphère de rayon R_m de l'ordre de la centaine de picomètres.

On rappelle les valeurs de l'accélération de la pesanteur $g = 9,8\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, de la constante de Boltzmann $k_B = 1,4 \times 10^{-23}\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$, de la constante d'AVOGADRO, $N_A = 6,0 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$ et éventuellement de leur produit $R = k_B N_A = 8,3\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- Q.1** En précisant les valeurs choisies de température T_0 et de pression (supposée provisoirement uniforme) P_0 , estimer le volume molaire du gaz. En déduire une estimation du rapport entre le volume occupé par l'ensemble

des sphères associé aux molécules et le volume du récipient.

- Q.2** Rappeler la définition d'un gaz parfait. Les ordres de grandeur établis à la question précédente justifient-ils d'adopter ce modèle dans la suite ?
- Q.3** Donner l'expression de l'énergie cinétique E_{cm} et de l'énergie potentielle E_{pm} d'une particule de masse m_m de ce gaz. Pourquoi observe-t-on qu'à température ambiante ces molécules ne se regroupent pas au fond du récipient ?

La loi de la statique des fluides montre que, sous l'action de la pesanteur, la pression $P(z)$ n'est pas uniforme verticalement et dépend de l'altitude z .

- Q.4** En déduire que la masse volumique ρ du gaz dépend aussi de z et l'exprimer en fonction de $P(z)$.
Écrire la condition d'équilibre mécanique pour une tranche de gaz comprise entre les altitudes z et $z + dz$ pour laquelle on supposera l'équilibre thermodynamique local réalisé.
En déduire une équation différentielle vérifiée par $P(z)$.
- Q.5** En notant $P_0 = P(z = 0)$, montrer que $\frac{P(z)}{P_0}$ s'exprime simplement grâce à la fonction $A(z)$.
Exprimer la distance caractéristique H en fonction de k_B , g , T_0 et m_m et réaliser l'application numérique.
La variation de pression est-elle détectable, avec un manomètre usuel, dans le récipient considéré ? En serait-il de même si le récipient était rempli d'eau liquide ?
- Q.6** Préciser la fonction $E(z)$ telle que $A(z) = \exp \left[-\frac{E(z)}{k_B T_0} \right]$. Que représente la fonction $E(z)$?
Interpréter physiquement cette expression dont la généralisation est due à Boltzmann.
- Q.7** Montrer que la concentration $c_g(z)$ du gaz, rapport du nombre de moles sur le volume, suit une loi du même type, et qu'on peut écrire $c_g(z) = c_{g0} A(z)$, où c_{g0} représente la concentration au niveau du sol ($z = 0$) dont on précisera l'expression en fonction de T_0 et P_0 .

II – Le modèle de Langevin

En 1828, le botaniste ROBERT BROWN publie un article dans lequel il décrit le mouvement erratique de grains de pollen dans l'eau observés au microscope. Ce type de mouvement était apparemment connu depuis l'invention du microscope (fin XVI^e – début XVII^e siècle). Le mérite de Brown est d'en faire une étude systématique avec des grains de pollen, de suie, de poussière, de roches pulvérisées et même d'un fragment du Sphinx. Ce dernier cas était destiné à éliminer l'hypothèse vitaliste qui prévalait et attribuait ce mouvement à des propriétés organiques propres aux particules. En 1888, le physicien français LOUIS-GEORGES GOUY résume les observations sur ce mouvement, appelé depuis brownien :

- le mouvement est extrêmement irrégulier et ne semble pas avoir de tangente ;
- deux particules browniennes, même proches, ont des mouvements indépendants ;
- le mouvement est d'autant plus actif que la particule est petite, que le fluide est moins visqueux ou la température est élevée ;
- la nature et la densité des particules n'ont pas d'influence sur le mouvement qui de plus ne s'arrête jamais !

Pour interpréter les expériences de BROWN, on étudie le mouvement unidimensionnel le long d'un axe $(O, \vec{e}_x)$ des mêmes grains sphériques que ceux étudiés précédemment (masse m_b , rayon R_b).

Ces grains sont encore une fois plongés dans le liquide sucré qu'utilise JEAN PERRIN dans ses expériences et sont en équilibre thermique à la température T_0 , mobiles sous l'effet de l'agitation thermique. Ce modèle unidimensionnel peut éventuellement se généraliser à trois dimensions.

On note $\vec{x} = x(t)\vec{e}_x$ la position et $\vec{v} = v(t)\vec{e}_x$ la vitesse d'un grain. À $t = 0$, le grain étudié est en O . Le mouvement ne s'arrêtant jamais, PAUL LANGEVIN propose en 1908 l'idée qu'il existe des chocs à l'échelle microscopique qui entretiennent cette agitation. Il introduit une force qui synthétise la résultante des chocs aléatoires des molécules de fluide sur les grains. Cette force «indifféremment positive ou négative, dont le but est de maintenir l'agitation microscopique» est notée $\vec{F}_c = F_c \vec{e}_x$. En des termes moins prosaïques, cela revient à faire l'hypothèse que la moyenne temporelle du produit $\vec{x} \cdot \vec{F}_c$ est nulle, soit $\langle x F_c \rangle = 0$. Dans son modèle, LANGEVIN néglige tous les effets de la pesanteur mais tient compte de la résultante des forces de frottement visqueux.

- Q.8** Écrire l'équation, notée (E_L) , vérifiée par $\vec{v}$ en tenant compte de la force $\vec{F}_c$. Montrer qu'en l'absence de cette force, le mouvement s'atténue très vite.

Q.9 Écrire le produit $x \frac{dv}{dt}$ en fonction de $\frac{d(xv)}{dt}$ et v^2 .

Q.10 Donner la définition de la vitesse quadratique moyenne, notée u . En appliquant le théorème d'équipartition de l'énergie au cas particulier étudié, exprimer u en fonction de m_b , T_0 et k_B .

Le point délicat de la théorie de LANGEVIN revient à considérer que la fonction $\varphi = \langle xv \rangle$, qu'il calcule comme une moyenne temporelle, peut néanmoins être considérée comme une fonction du temps $\varphi = \varphi(t)$. Nous ferons cette hypothèse, dite ergodique, qui permet d'écrire :

$$\left\langle \frac{d(xv)}{dt} \right\rangle = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{ou même} \quad \left\langle \frac{d(x^2)}{dt} \right\rangle = \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt}$$

L'étude de l'hypothèse ergodique alimente depuis de nombreux travaux théoriques tant physiques que mathématiques.

Q.11 En partant de l'équation (E_L), obtenir une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants vérifiée par la fonction $\varphi(t)$. En supposant que $\varphi(0) = 0$, en déduire l'expression de $\varphi(t)$ en fonction de t , k_B , T_0 , m_b et α .

Q.12 En utilisant l'hypothèse ergodique, déterminer la relation entre $\varphi(t)$ et $\psi(t) = \langle x^2 \rangle$. Après avoir obtenu l'expression générale de $\psi(t)$, montrer que les ordres de grandeur de ce problème permettent d'écrire $\psi(t) \simeq D_x t$ où l'on précisera l'expression de la constante D_x en fonction de T_0 , k_B et α .

La constante D_x est appelée coefficient de diffusion d'un grain selon (Ox) dans le milieu. En prenant en compte le modèle de LANGEVIN, JEAN PERRIN réalise toute une série d'expériences de diffusion de grains au cours du temps. Avec une extrême minutie, il repère la position de l'un d'entre eux toutes les 30 secondes pendant deux minutes, puis recommence avec un autre grain. En itérant cette procédure un grand nombre de fois, il se place sans le savoir sous l'hypothèse ergodique et obtient les résultats expérimentaux donnant $\langle x^2 \rangle$ en fonction du temps que l'on a synthétisés sur la FIGURE 1.

Q.13 En déduire la valeur de k_B qu'a obtenue Jean Perrin avec ses expériences de diffusion toujours effectuées à $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

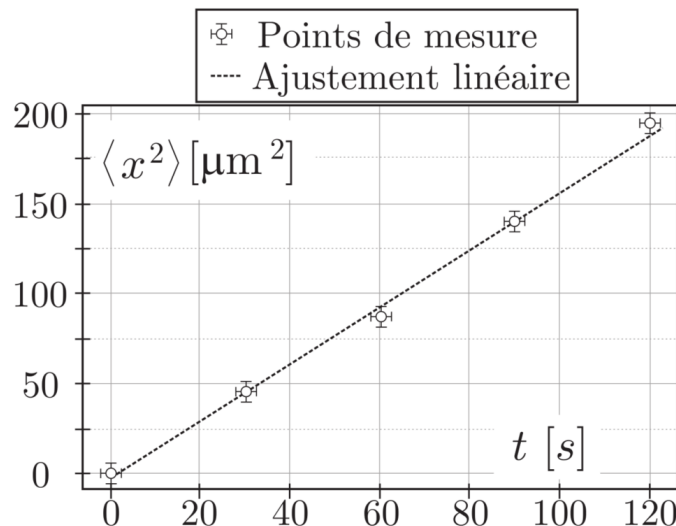


FIGURE 1 – Diffusion de grains

Exercice 2 : Fonctionnement d'une pompe à chaleur

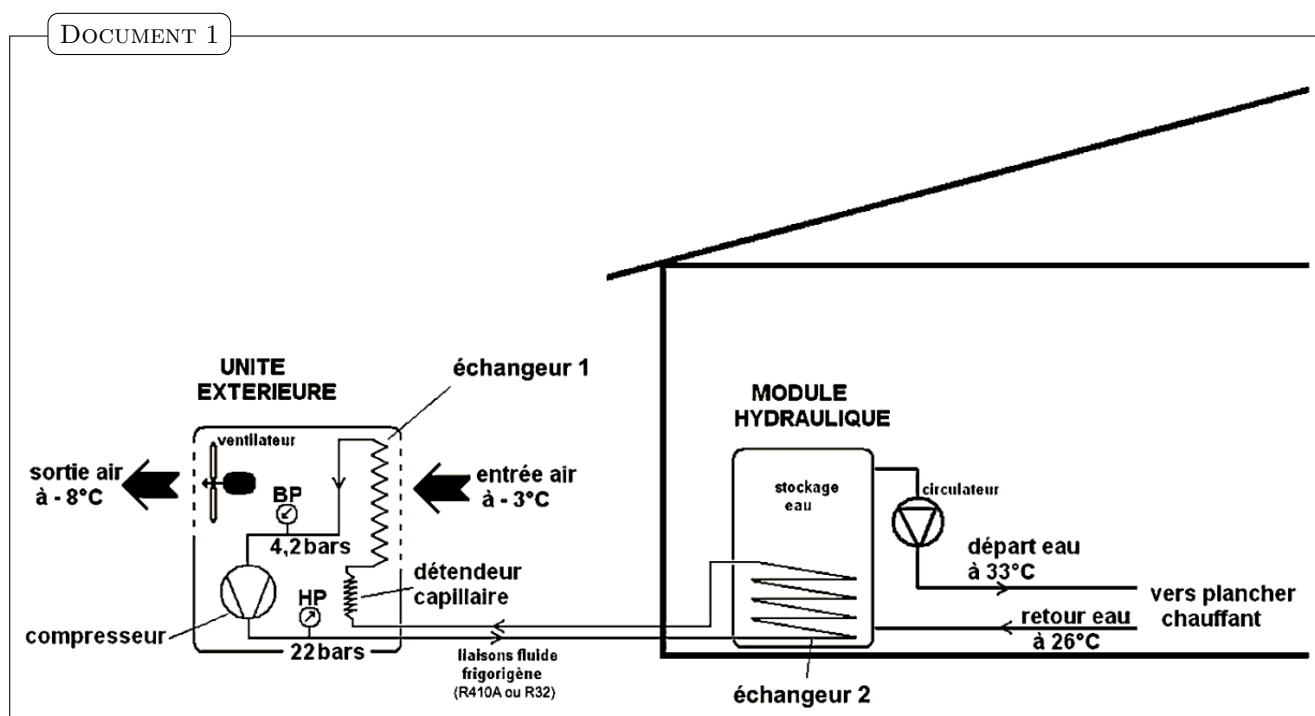
Dans le cadre de la rénovation énergétique des bâtiments afin de lutter contre le réchauffement climatique, il est préconisé l'installation de pompes à chaleur. En effet, ce dispositif permet d'effectuer des économies d'énergie pour le chauffage des habitations et la production d'eau sanitaire.

I – Modèle de machine ditherme

- Q.1** Présenter sous forme de schéma annoté, le principe de fonctionnement d'une pompe à chaleur ditherme fonctionnant entre une source chaude thermostatée (de température T_C) et une source froide thermostatée (de température T_F).
- Q.2** On considère comme système thermodynamique le fluide de la pompe à chaleur. Préciser, en justifiant, les signes de Q_C (transfert thermique reçu par le système de la part de la source chaude), de Q_F (transfert thermique reçu par le système de la part de la source froide) et de W (travail mécanique reçu de la part du système mécanique) sur un cycle de fonctionnement.
- Q.3** Définir l'efficacité (ou *COP*) notée e , de cette pompe à chaleur. L'exprimer en fonction uniquement des transferts thermiques Q_C et Q_F .
- Q.4** Déterminer l'expression de cette efficacité en fonction de T_C et T_F , de l'entropie créée au cours d'un cycle de fonctionnement que l'on notera S_c et de W . Donner son ordre de grandeur pour une machine réelle.
- Q.5** Représenter graphiquement l'évolution de e en fonction de S_c (en considérant W , T_C et T_F constants).
- Q.6** Interpréter physiquement le cas $S_c = 0$.

II – Fonctionnement de la pompe à chaleur

Le schéma de principe d'une telle installation est présenté dans le DOCUMENT 1. Sur ce document figurent les deux échangeurs (échangeur 1 et échangeur 2) de la pompe à chaleur : l'un est le condenseur, l'autre est l'évaporateur.



- Q.7** À l'aide du DOCUMENT 1, identifier la source chaude et la source froide ainsi que le système mécanique qui échange un travail avec le fluide de la pompe à chaleur.

On étudie dans cette partie le fonctionnement réel de la pompe à chaleur fonctionnant avec le fluide $R410A$. Cette pompe à chaleur est composée des organes thermodynamiques suivants : un compresseur, un condenseur (dans lequel a lieu une liquéfaction), un détendeur et un évaporateur. En régime permanent d'écoulement, le fluide $R410A$ subit les transformations décrites dans le DOCUMENT 2 ci-dessous.

DOCUMENT 2

- 1 → 2 : le fluide à l'état gazeux sous la pression $P_b = 4,2$ bar et à la température de -12 °C subit une compression isentropique jusqu'à la pression $P_h = 22$ bar dans un compresseur ;
- 2 → 3 : le gaz entre dans le condenseur où il subit dans un premier temps un refroidissement isobare selon une désurchauffe, pour atteindre un état de vapeur juste saturante ;
- 3 → 4 : toujours dans le condenseur, le fluide subit une liquéfaction jusqu'au liquide juste saturé à la pression P_h ;
- 4 → 5 : le liquide subit alors un sous-refroidissement isobare jusqu'à la température de 30 °C et sort du condenseur ;
- 5 → 6 : le liquide entre dans le détendeur (adiabatique et sans partie mobile) pour y subir une détente jusqu'à la pression P_b ;
- 6 → 7 : le fluide entre dans l'évaporateur pour y subir une vaporisation totale à la pression P_b pour se retrouver sous forme de vapeur juste saturante ;
- 7 → 1 : avant de sortir de l'évaporateur, la vapeur saturante subit une surchauffe avant de rentrer dans le compresseur.

Pour un fluide en écoulement permanent à travers un organe thermodynamique à une entrée et une sortie on rappelle le premier principe industriel :

$$\Delta_{e \rightarrow s}(h + e_c + e_p) = w_i + q$$

avec h enthalpie massique du fluide, e_c énergie cinétique massique du fluide, e_p énergie potentielle massique du fluide, w_i travail massique reçu par le fluide et q transfert thermique massique reçu par le fluide. Dans la suite, on négligera les variations d'énergies cinétique et potentielle massiques devant la variation d'enthalpie massique.

- Q.8** Au contact de quelle source doit être mis le condenseur ? Identifier l'échangeur, présent sur le DOCUMENT 1, concerné en justifiant la réponse.
- Q.9** Au contact de quelle source doit être mis l'évaporateur ? Identifier l'échangeur, présent sur le DOCUMENT 1, concerné en justifiant la réponse.
- Q.10** En appliquant le premier principe à l'écoulement permanent à travers le détendeur, déterminer la nature de la transformation qu'y subit le fluide.
- Q.11** La transformation subie par le fluide dans le compresseur est considérée isentropique dans un premier temps. Comment peut-on justifier cette hypothèse ?

On fournit le diagramme enthalpique en annexe (à rendre avec la copie) du fluide $R410A$.

- Q.12** À l'aide du DOCUMENT 2, représenter les différents points du cycle effectué par le fluide $R410A$, notés de 1 à 7, sur le diagramme fourni en annexe. On justifiera le placement des points.
- Q.13** Sans s'aider des isotitres figurant sur le diagramme fourni, déterminer le titre massique du seul point du cycle dans un état diphasique. Commenter.
- Q.14** Déterminer à l'aide du diagramme :
- le travail massique reçu par le fluide de la part du compresseur ;
 - le transfert thermique massique reçu par le fluide à la traversée du condenseur ;
 - le transfert thermique massique reçu par le fluide à la traversée de l'évaporateur.
- Q.15** Quel est l'intérêt de la surchauffe ?
- Q.16** Calculer l'efficacité de la pompe à chaleur fonctionnant avec le fluide $R410A$ (on donnera le résultat avec deux chiffres significatifs). Quel est l'intérêt d'une pompe à chaleur par rapport à un chauffage électrique ?
- Q.17** En réalité, la transformation subie par le fluide à la traversée du compresseur n'est pas isentropique. L'efficacité réelle vaut 90% de l'efficacité calculée à la question précédente et le reste du cycle est inchangé. Quelle est alors la température en sortie du compresseur ?

Annexe du DS 2

(À détacher et à rendre avec la copie)

