

exercice 1

$$\begin{aligned} 1a) \quad f(z) &= (a+ib)^2 - 4(a+ib) \\ &= \underline{a^2 - b^2 - 4a} + \underline{(2ab - 4b)i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad f(z) \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow 2ab - 4b = 0 \text{ avec la a)} \\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ ou } a = 2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{f(z) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ ou } \operatorname{Re}(z) = 2}$$

$$\begin{aligned} c) \quad \operatorname{Re}(f(z)) = 0 &\Leftrightarrow a^2 - b^2 - 4a = -4 \\ &\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 - b^2 = 0 \\ \Delta &= 16 - 4(4 - b^2) = 4b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

donc les racines sont $\frac{4 \pm 2b}{2} = 2 \pm b$

$$\text{d'où } \boxed{\operatorname{Re}(f(z)) = -4 \Leftrightarrow z = 2 + b + ib \text{ ou } z = 2 + b - ib}$$

Remarque: on pourrait aussi remarquer que $a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2$

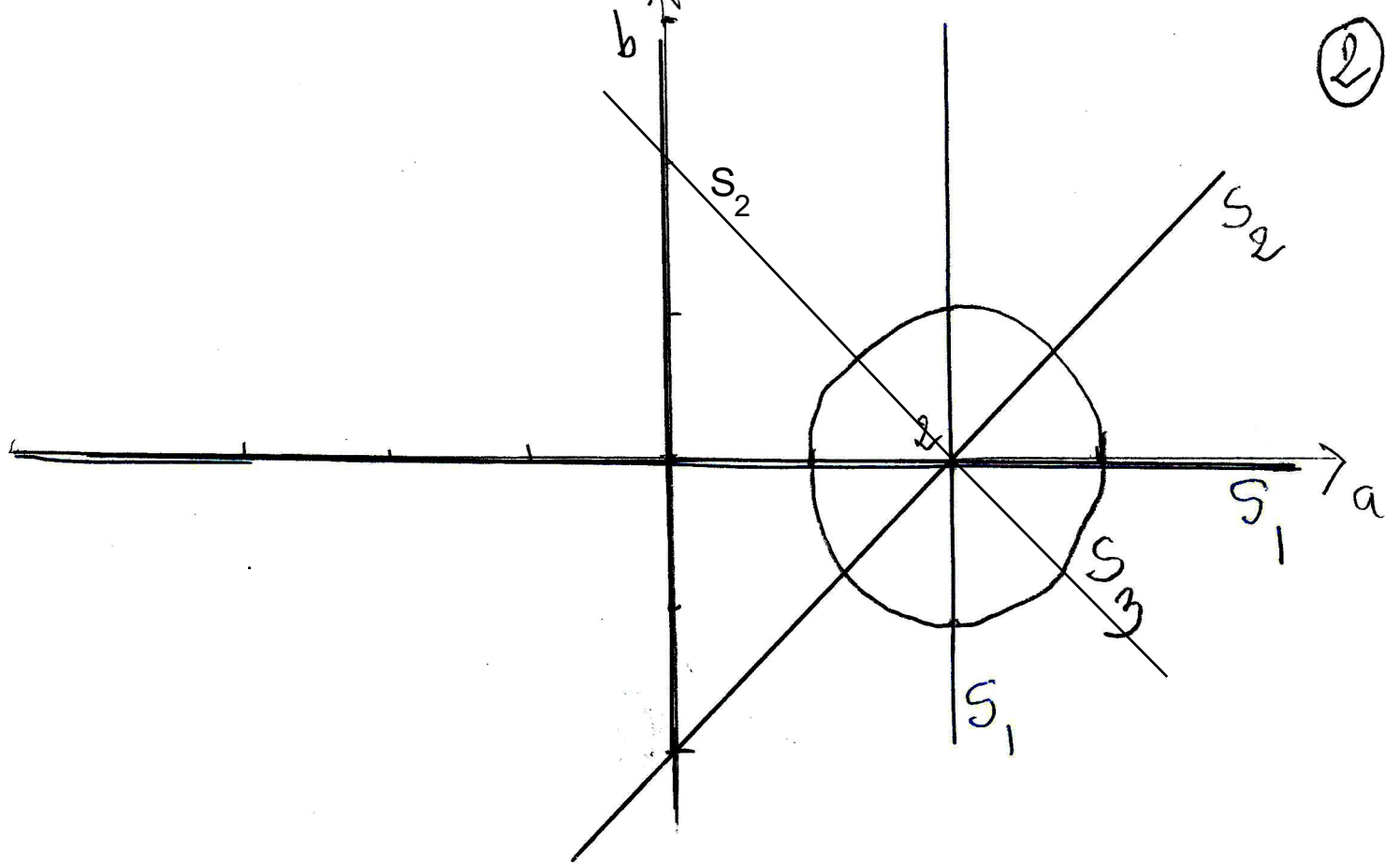
$$2) \quad f(z) \in \mathcal{C}(\Omega, 1) \Leftrightarrow |z^2 - 4z + 4| = 1$$

$$\Leftrightarrow |(z-2)^2| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z-2| = 1 \quad (\text{car } |z-2| \geq 0)$$

$$\text{d'où } \boxed{f(z) \in \mathcal{C}(\Omega, 1) \Leftrightarrow z \in \mathcal{C}(2, 1)}$$

(2)



Pour le c) $z = 2 + b + ib \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + b \\ y = b, b \in \mathbb{R} \end{cases}$ en notant $z = x + iy$
 $\Leftrightarrow x = 2 + y$

exercice 2 1) Voir le cours.

$$2) \tan\left(\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{4}$$

Comme $\arctan 0 < \arctan \frac{1}{3} < \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

on a $\theta = 2\arctan \frac{1}{3} \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$\tan \theta = \frac{3}{4}$$

d'o

$$2\arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{3}{4}$$

3) On fait le m : $\tan\left(\arctan \frac{3}{4} + \arctan \frac{1}{7}\right) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}} = 1$

idem $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$d \quad 2\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$$

exercice 3

③

1) TBA! $|f'|$ étant continue, $|f'|([a, b])$ est un segment;

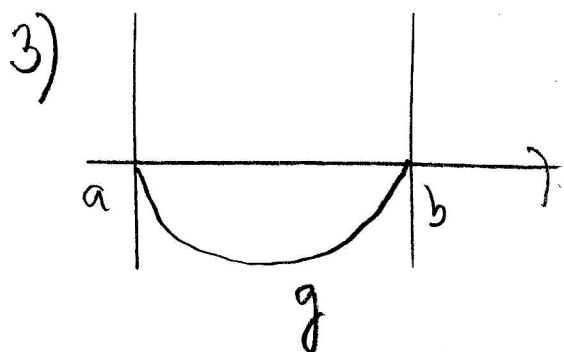
$$|f'|([a, b]) = [m, n] \quad \text{d} \quad \boxed{n \text{ existe}}$$

2) Par TG g et h sont C^2 sur $[a, b]$

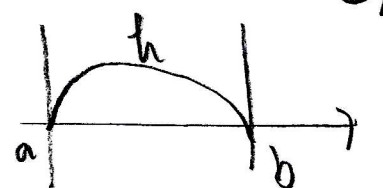
$$\forall x \in [a, b]: g''(x) = f''(x) + n \geq 0$$

$$h''(x) = f''(x) - n \leq 0$$

$$\text{d'} \quad \boxed{g \text{ convexe et } h \text{ concave sur } [a, b]}$$



Comme $g(a) = g(b) = 0$, la corde entre a et b est portée par la droite $D/y=0$: $\forall x \in [a, b] \quad g(x) \leq 0$

De m même pour h : $\forall x \in [a, b] \quad h(x) \geq 0$

$$\text{Cqs} \quad f(x) \leq n \underbrace{\frac{(x-a)(b-x)}{2}}_{\geq 0} \quad \text{et} \quad f(x) \geq -n \underbrace{\frac{(x-a)(b-x)}{2}}_{\geq 0}$$

$$\text{d'où} \quad -n \frac{(x-a)(b-x)}{2} \leq f(x) \leq n \frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

$$\text{d} \quad \boxed{\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq n \frac{(x-a)(b-x)}{2}}$$

4) a) On veut $\varphi(x_0) = f(x_0) - \alpha \frac{(x_0 - a)(b - x_0)}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{2f(x_0)}{(x_0 - a)(b - x_0)}}$$

b) * φ est C^2 sur $[a, b]$ par TS.

* $\varphi(a) = \varphi(x_0) = \varphi(b)$ et $a < x_0 < b$, d'où par Rolle,

$$\exists c_1 \in]a, x_0[\text{ et } \exists c_2 \in]x_0, b[\mid \varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = 0$$

* Re-Rolle pour φ' avec $c_1 < c_2$:

$$\exists d \in]c_1, c_2[\subset]a, b[\mid \varphi''(d) = 0$$

$$* \forall x \in [a, b] \quad \varphi''(x) = f''(x) + \alpha$$

$$d \quad \boxed{\alpha = -f''(d)}$$

$$c) \text{ On a donc } \forall x_0 \in]a, b[\quad f(x_0) = -f''(d) \frac{(x_0 - a)(b - x_0)}{2}$$

$$\text{donc } |f(x_0)| \leq M \frac{(x_0 - a)(b - x_0)}{2}$$

Comme cette inégalité reste vraie si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$,

$$d \quad \boxed{\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq M \frac{(x - a)(b - x)}{2}}$$

exercice 4

(5)

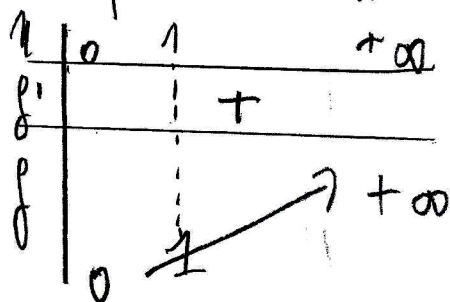
1) Si $u_n \rightarrow l$, par TG $\frac{u_n^2 + u_n}{2} \rightarrow \frac{l^2 + l}{2}$

Comme $u_{n+1} \rightarrow l$, par unicité de la limite,

$$\frac{l^2 + l}{2} = l \text{ soit } l^2 = l$$

$$d \quad \boxed{l \in \{0, 1\}}$$

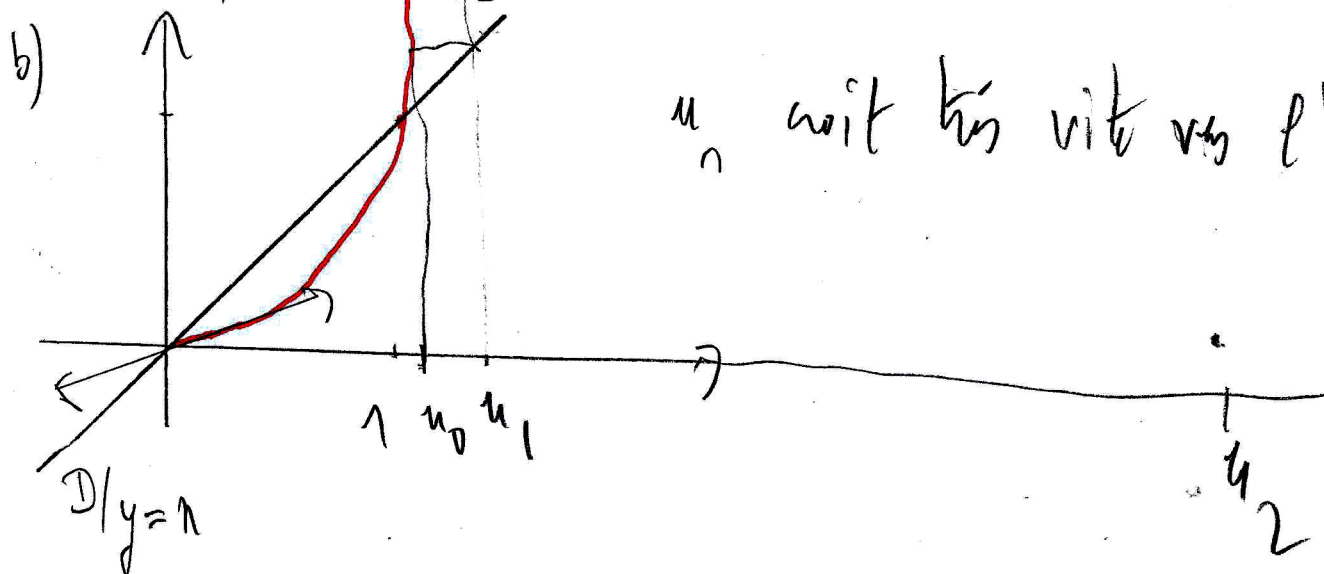
2) a) $f \in C^1$ par TG $\forall n \in \mathbb{R}^+$, $f'(n) = n + \frac{1}{2}$



$$f(n) - n = \frac{n^2 + n}{2} - n = \frac{n^2 - n}{2}$$

n	0	1	+∞
f(n) - n	0	0	+

n	0	1	+∞
f(n) - n	0	-	+



u_n will be very close to l'_{∞} !

3) a) Comme $I = [1, +\infty[$ vérifie $f(I) = I$ (voir T.V.) ⑥

et que $u_0 \in I$, par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [1, +\infty[$

b) $H_n: u_n \leq u_{n+1}$

$n=0$ $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 \geq 0$ grâce au tableau de $f(n) - n$
donc $u_0 \leq u_1$

Si H_n est vraie, comme u_{n-1} et u_n sont dans I

et que f y est croissante:

$$u_{n-1} \leq u_n \Rightarrow f(u_{n-1}) \leq f(u_n) \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$$

d: $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ croissante}}$

c) Par T.L.T. (u_n) cvg vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Comme $\forall n \geq 0: u_n \geq u_0 > 1, l \geq u_0 > 1$

D'après le 1), si $l \in \mathbb{R}$, $l = 0$ ou $l = 1 \rightarrow \leftarrow$

d $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty}$

Partie 2

(7)

1) a) Comme $u_n > 0$, v_n est bien définie

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln \frac{u_{n+1}}{2} - \frac{1}{2^n} \ln \frac{u_n}{2} \\&= \frac{1}{2^{n+1}} \left[\ln \frac{u_{n+1}}{2} - \ln \frac{u_n^2}{4} \right] \\&= \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\frac{4u_{n+1}}{u_n^2} \right) \\&= \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\frac{4u_n^2 + 4u_n}{4u_n} \right) \\&= \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)\end{aligned}$$

$$d' \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)}$$

b) Comme $u_n > 0$, $1 + \frac{1}{u_n} \geq 1$ donc $\ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right) \geq 0$

$$\underline{d} \quad \boxed{(v_n) \text{ croissante}}$$

2a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + \frac{1}{u_n} \leq 2$ car $u_n \geq 1$

donc $\ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right) \leq \ln 2$ ($\ln \nearrow$)

$$\underline{d} \quad \boxed{v_{n+1} - v_n \leq \frac{\ln 2}{2^{n+1}}}$$

b) On a donc $\sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k \leq \ln 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}}$

donc $v_n - v_0 \leq \ln 2 \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$

d $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \leq v_0 + \ln 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$

g) On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underline{v_n \leq v_0 + \ln 2}$

Comme (v_n) est croissante par la 1) b), par TLM

d $\boxed{(v_n) \text{ cvg vers un réel } \alpha}$

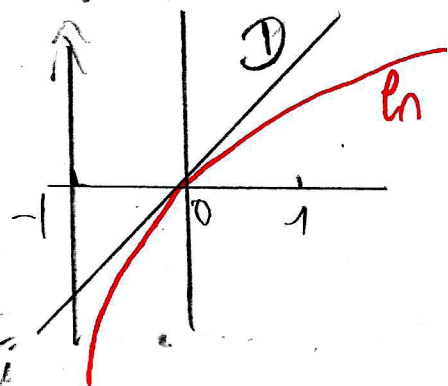
Partie 3

1) Posons $f(x) = \ln(1+x)$ $\in C^2]-1, +\infty[$ par TF et

$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \leq 0$ donc f concave sur $]-1, +\infty[$

D/ $y = 1+x$ est la tangente à f en $x_0 = 0$ d'où

$\forall x \in]-1, +\infty[\quad \ln(1+x) \leq x$



* Pour la II 1 b) $v_{n+1} - v_n \geq 0$

* $v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}$ par concavité

d $\boxed{0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}}$

2) Toujours par télescopage (et $\nearrow$ de v_n):

$$0 \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} (v_{k+1} - v_k) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{u_k} \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{u_n} \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2^{k+1}}} \quad \text{car } (u_n) \nearrow$$

3) On fixe n de la relation ci-dessus et on fait tendre $p \rightarrow +\infty$:

$$0 \leq \alpha - v_n \leq \frac{1}{u_n} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \quad \leftarrow \text{série géométrique}$$

(ou on revient aux sommes partielles)

$$\leq \frac{1}{u_n} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\text{d } \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \alpha - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}}$$

4) On a par définition de v_n :

$$2^n v_n = \ln \frac{u_n}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{2} = e^{2^n v_n}$$

$$\Rightarrow u_n = 2 e^{2^n (\alpha + o(\frac{1}{2^n}))}$$

$$= 2 e^{2^n \alpha} \underbrace{e^{o(1)}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1}$$

$$\text{car } \frac{1}{u_n} \rightarrow 0, \text{ donc } \frac{1}{2^n u_n} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\text{d'o } \boxed{u_n \sim 2 e^{2^n \alpha}}$$

Exercice 5* : Corrigé de M. Dervieux (UPS)

Partie 1 Sur les périodes d'une fonction continue

1. Si f est une fonction constante, n'importe quel réel a est une période de f puisque, pour tout réel x , on a $f(x+a) = f(x)$. Par conséquent, on a $\Omega_f = \mathbb{R}$.
2. On a $\Omega_f \subset \mathbb{R}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+0) = f(x)$ donc 0 est une période de f . Ainsi $0 \in \Omega_f$ et $\Omega_f \neq \emptyset$.
- Soit $(T_1, T_2) \in \Omega_f^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x+T_1+T_2) &= f(x+T_1) \quad \text{car } f \text{ est } T_2\text{-périodique,} \\ &= f(x) \quad \text{car } f \text{ est } T_1\text{-périodique.} \end{aligned}$$

Ainsi, $T_1 + T_2$ est une période de f et $T_1 + T_2 \in \Omega_f$.

- Soit $T \in \Omega_f$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x-T) &= f(x-T+T) \quad \text{car } f \text{ est } T\text{-périodique,} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Le réel $-T$ est une période de f donc $-T \in \Omega_f$.

Grâce à la caractérisation des sous-groupes, Ω_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

3. Soit T une période non nulle de f . Quitte à considérer $-T$ qui est aussi une période de f , on peut supposer $T > 0$. La fonction $f|_{[0,T]} : [0,T] \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée en tant que fonction continue sur un segment. Autrement dit,

$$\exists K > 0, \quad \forall x \in [0, T] \quad |f(x)| \leq K.$$

On utilise la périodicité de f pour montrer que cette majoration est valable sur tout $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor \leq \frac{x}{T} < \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor + 1 \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T \leq x < \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T + T \Leftrightarrow 0 \leq x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T < T.$$

Dès lors

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f\left(x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T\right) \right| \quad \text{car } f \text{ est } T\text{-périodique et } \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor \in \mathbb{Z}, \\ &\leq K \quad \text{car } x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T \in [0, T]. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $K > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|f(x)| \leq K$. La fonction f est bornée.

4. On suppose $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et non constante.

- a) La fonction f est supposée périodique donc elle admet une période T non nulle. On a vu qu'alors $-T$ est également une période donc, que T soit positif ou non, $|T|$ est une période de f strictement positive, ie $|T| \in \Omega_f \cap]0, +\infty[$. En tant que partie de $\mathbb{R}$, non vide et minorée (par 0), l'ensemble $\Omega_f \cap]0, +\infty[$ admet une borne inférieure.
- b) Puisque $\Omega_f \cap]0, +\infty[$ est minoré par 0, on sait déjà $0 \leq T_f$. On montre $T_f > 0$ en raisonnant par l'absurde. On suppose $T_f = 0$. Grâce à la caractérisation des bornes inférieures, il existe une suite (τ_n) de périodes de f strictement positives telle que $\tau_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T_f = 0$.

La fonction f est bornée et atteint ses bornes (voir question 3). On note $m = \inf\{f(x), x \in \mathbb{R}\} = \min\{f(x), x \in \mathbb{R}\}$ et $M = \sup\{f(x), x \in \mathbb{R}\} = \max\{f(x), x \in \mathbb{R}\}$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f étant τ_n -périodique, il existe $(c_n, d_n) \in [0, \tau_n]^2$ tel que $f(c_n) = m$ et $f(d_n) = M$.

Sachant que f est continue en 0 et $0 \leq c_n, d_n \leq \tau_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(c_n) = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(d_n) = f(0).$$

Puisque les suites $(f(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(d_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont également constantes égales à m et M , par unicité de la limite, il vient $f(0) = m$ et $f(0) = M$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(0) = m \leq f(x) \leq M = f(0)$. La fonction f se retrouve être constante ce qui est exclu.

- c) On sait déjà que $T_f \in]0, +\infty[$ grâce à la question précédente. Il reste à montrer que $T_f \in \Omega_f$, ie que f est T_f -périodique.
- Puisque $T_f = \inf \Omega_f \cap]0, +\infty[$, il existe une suite (τ_n) de périodes de f strictement positives telle que $\tau_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T_f$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x + \tau_n) = f(x)$ car $\tau_n \in \Omega_f$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue en $x + T_f$, en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $f(x + T_f) = f(x)$. Cette relation étant valable pour tout réel x , la fonction f est T_f -périodique et $T_f = \min \Omega_f \cap]0, +\infty[$.

5. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est non constante et tous les rationnels sont des périodes de cette fonction. En effet, la somme de deux rationnels est rationnelle et la somme d'un irrationnel et d'un rationnel est irrationnelle. L'ensemble $\mathbb{Q}^{+*}$ n'admettant pas de plus petit élément, la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'admet pas de plus petite période.
6. a) $\diamond$ Puisque T_f est une période de f , tous les réels de la forme nT_f avec $n \in \mathbb{Z}$ sont aussi des périodes de f , ie $T_f \mathbb{Z} \subset \Omega_f$.

$\diamond$ Soit $T \in \Omega_f$. On note $n = \left\lfloor \frac{T}{T_f} \right\rfloor$ de telle sorte que $\tau = T - nT_f$ vérifie $T = nT_f + \tau$ et

$$n \leq \frac{T}{T_f} < n + 1 \Leftrightarrow 0 \leq \tau < T_f.$$

Si $\tau \neq 0$ alors $\tau = T - nT_f$ est une période de f strictement positive, ie $T \in \Omega_f \cap]0, +\infty[$, et T est strictement plus petite que T_f qui est le plus petit élément de $\Omega_f \cap]0, +\infty[$. Ceci est impossible donc $\tau = 0$ et $T = nT_f \in T_f \mathbb{Z}$. On en déduit $\Omega \subset T_f \mathbb{Z}$.

$\diamond$ Par double inclusion, il vient $\Omega_f = T_f \mathbb{Z}$.

b) Soient T_1 et T_2 sont deux périodes non nulles de f . On a :

- $T_1 \in \Omega_f = T_f \mathbb{Z}$ donc il existe $p \in \mathbb{Z}^*$ tel que $T_1 = pT_f$ ($p \neq 0$ car $T_1 \neq 0$).
- $T_2 \in \Omega_f = T_f \mathbb{Z}$ donc il existe $q \in \mathbb{Z}^*$ tel que $T_2 = qT_f$ ($q \neq 0$ car $T_2 \neq 0$).

Par conséquent, on peut écrire $\frac{T_1}{T_2} = \frac{pT_f}{qT_f} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Partie 2 Somme de fonctions périodiques

1. a) Puisque $\cos$ est 2π -périodique, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos \cos(2\pi(x+1)) = \cos(2\pi x + 2\pi) = \cos(2\pi x) \text{ et } \cos(\pi\sqrt{2}(x+\sqrt{2})) = \cos(\pi\sqrt{2}x + 2\pi) = \cos(\pi\sqrt{2}x).$$

Par conséquent, fonctions $x \mapsto \cos(2\pi x)$ et $x \mapsto \cos(\pi\sqrt{2}x)$ sont respectivement 1-périodique et $\sqrt{2}$ -périodique.

b) Par l'absurde, on suppose qu'il existe $T \neq 0$ tel que f soit T -périodique. En particulier, on a

$$2 = f(0) = f(T) = \underbrace{\cos(2\pi T)}_{\leq 1} + \underbrace{\cos(\pi\sqrt{2}T)}_{\leq 1}$$

donc $\cos(2\pi T) = 1$ et $\cos(\pi\sqrt{2}T) = 1$. On en déduit $2\pi T \equiv 0[2\pi]$ et $\pi\sqrt{2}T \equiv 0[2\pi]$. Autrement dit, il existe $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $2\pi T = 2\pi p$ et $\pi\sqrt{2}T = 2\pi q$ (p et q non nuls car $T \neq 0$). Il vient alors

$$\sqrt{2} = \frac{2\pi T}{\pi\sqrt{2}T} = \frac{2\pi p}{2\pi q} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

ce qui est faux. Par conséquent, la fonction f n'est pas périodique. On vient de donner un exemple d'une somme de fonctions périodiques qui n'est pas une fonction périodique.

2. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{T_g}{T_h} = \frac{p}{q}$. On note $T = qT_g = pT_h$. La fonction g est T_g -périodique donc $qT_g = T$ est également une période de g . De même, la fonction h est T_h -périodique donc $pT_h = T$ est également une période de h . Par conséquent, pour tout réel x , on a $g(x+T) + h(x+T) = g(x) + h(x)$, ie la fonction $g+h$ est T -périodique.

3. a) $\diamond$ Pour tout réel x , puisque g est T_g -périodique, on peut écrire :

$$f(x + T_g) = g(x + T + T_g) - g(x + T_g) = g(x + T) - g(x) = f(x),$$

ie f est T_g -périodique.

$\diamond$ Par ailleurs, puisque $g+h$ est T -périodique, pour tout réel x , on a $g(x+T) + h(x+T) = g(x) + h(x)$ ce qui donne une autre expression de f :

$$f : x \mapsto h(x) - h(x + T).$$

Puisque h est T_h -périodique, on peut écrire :

$$f(x + T_h) = h(x + T_h) - h(x + T + T_h) = h(x) - h(x + T) = f(x),$$

ie f est T_h -périodique.

- b) On déduit de la question précédente que, pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, la fonction f est à la fois nT_g -périodique et mT_h -périodique, ie $nT_g \in \Omega_f$ et $mT_h \in \Omega_f$. Puisque Ω_f a une structure de groupe, il vient $nT_g + mT_h \in \Omega_f$.
On a bien $T_g\mathbb{Z} + T_h\mathbb{Z} \subset \Omega_f$.
- c) L'ensemble $T_g\mathbb{Z} + T_h\mathbb{Z}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, on peut écrire 0 comme limite d'une suite d'éléments de $T_g\mathbb{Z} + T_h\mathbb{Z}$. Puisque $T_g\mathbb{Z} + T_h\mathbb{Z} \subset \Omega_f$, 0 est limite d'une suite d'éléments de Ω_f et on en déduit que $\Omega_f \cap]0, +\infty[$ n'admet pas de plus petit élément, ie f n'admet pas de plus petite période. La fonction f est continue en tant que somme de fonctions continues donc, grâce aux résultats de la partie 1, la fonction f est constante.
- d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \ell$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant apparaître une somme télescopique, on a

$$g(nT) - g(0) = \sum_{k=0}^{n-1} (g((k+1)T) - g(kT)) = \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) = \sum_{k=0}^{n-1} \ell = n\ell.$$

Cette relation est encore valable pour $n = 0$ puisqu'elle se réécrit $0 = 0$.

Si $\ell \neq 0$, on obtient alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(nT) = \pm\infty$ selon le signe de ℓ . En particulier, la fonction g n'est pas bornée ce qui contredit le résultat de la question 3 de la partie 1 (une fonction continue et périodique est bornée). On en déduit $\ell = 0$.

- e) Puisque $\ell = 0$, pour tout réel x , on a $f(x) = 0$, ie $g(x+T) = g(x)$. La fonction g est alors T -périodique. En utilisant le résultat de la question 6a de la partie 1, on sait $T \in \Omega_g = T_g\mathbb{Z}$ donc il existe un entier q non nul tel que $T = qT_g$.

En utilisant l'expression de $f : x \mapsto h(x) - h(x+T)$, on montre également que h est T -périodique. Ainsi, on a $T \in \Omega_h = T_h\mathbb{Z}$ donc il existe un entier p non nul tel que $T = pT_h$.

On a ainsi $pT_h = T = qT_g$ ce qui donne $\frac{T_g}{T_h} = \frac{p}{q}$. Ceci contredit l'hypothèse $\frac{T_g}{T_h}$ irrationnel. On en déduit que la fonction $g + h$ n'est pas périodique.