

exercice 1

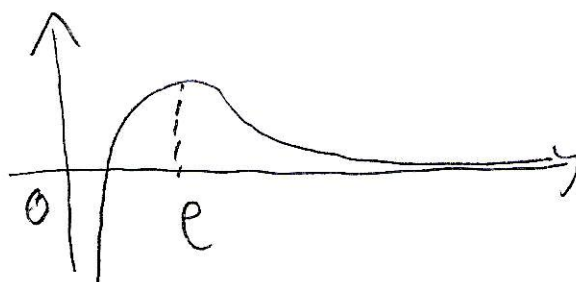
DM 3 : corrigé

①

1) Posons $f(t) = \frac{\ln t}{t}$, comme f est c' en $\mathbb{R}^{+*}$

par TG, $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$ $f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$ d'où

t	0	e	$+\infty$
f'	+	0	-
f		↗	↘



q's $\forall p \geq 3 \quad \forall t \in [p, p+1]$

$$\frac{\ln(p+1)}{p+1} \leq \frac{\ln t}{t} \leq \frac{\ln p}{p}$$

puis on intègre de p à $p+1$ puis on somme de
3 à $n \geq 3$ d'où

$$\sum_{p=3}^n \frac{\ln(p+1)}{p+1} \leq \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq \sum_{p=3}^n \frac{\ln p}{p}$$

Posons $S_n = \sum_{p=3}^n \frac{\ln p}{p}$ et $F(n) = \int_3^n \frac{\ln t}{t} dt$

on a : $\underline{S_{n+1} - \frac{\ln 3}{3} \leq F(n+1) \leq S_n}$

Comme $F(n) = \left[\frac{(\ln n)^2}{2} \right]_3^n = \frac{\ln^2 n}{2} - \frac{\ln^2 3}{2}$ ②

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2 3}{2} \leq S_n \leq \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln^2 n}{2} - \frac{\ln^2 3}{2}$$

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} = \frac{(\ln n + \ln(1 + \frac{1}{n}))^2}{2} \sim \frac{\ln^2 n}{2} \text{ d'oc}$$

par T.E., $\frac{S_n}{\ln^2 n / 2} \longrightarrow 1$ et $\sum_{p=1}^n \frac{\ln p}{p} \sim \sum_{p=3}^n \frac{\ln p}{p}$

d'o $\boxed{\sum_{p=1}^n \frac{\ln p}{p} \sim \frac{\ln^2 n}{2}}$ car $(\sum \frac{\ln n}{n})$ divg.

2) Posons $a_n = \frac{\ln n}{n}$ $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante (1)

$a_n > 0$ et $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.f.} 0$, d'o par TSA,

d $\boxed{\left(\sum \frac{(k-1)^n \ln n}{n} \right)_{n \geq 1} \text{ cvg}}$

3) a) $u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2} (\ln(n+1) - \ln n) (\ln(n+1) + \ln n)$
 $= \frac{\ln n + \ln(1 + \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{1}{n})} - \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{1}{n}) (2 \ln n + \ln(1 + \frac{1}{n}))$

$$= \ln n \left(\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})} - \ln(1+\frac{1}{n}) \right) + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} - \frac{1}{2} \ln^2(1+\frac{1}{n}) \quad (3)$$

$$= \ln n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{-\ln n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \quad \left(O\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)$$

cqs
$$u_{n+1} - u_n \sim \frac{-\ln n}{2n^2}$$

comme $\frac{-\ln n}{n^2} \leq 0$, $\frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ car $\frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{1/n^2 \cdot n} = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

par TC $\left(\sum \frac{\ln n}{2n^2}\right)$ cvg et u-TC: $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0/cc$

$(\sum u_{n+1} - u_n)$ cvg d'or par C.B.S.S.,

d
$$(u_n) \text{ converge}$$

$$\begin{aligned} \underline{S'_{2N+1} + S_{2N+1}} &= \sum_{p=1}^N \frac{\ln(2p)}{2p} - \sum_{p=0}^N \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} + \sum_{p=1}^N \frac{\ln 2p}{2p} + \sum_{p=0}^N \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} \\ &= \sum_{p=1}^N \frac{\ln 2 + \ln p}{p} \\ &= \underline{\ln 2 H_N + S_N} \end{aligned}$$

On en déduit avec les dev. asymptotiques de H_n et S_n : ④

$$S'_{2N+1} = \ln 2 [\ln N + \gamma + o(1)] + \frac{1}{2} \ln^2(N) - \cancel{C} + o(1) \\ - \frac{1}{2} \ln^2(2N+1) - \cancel{C} + o(1)$$

$$= \gamma \ln 2 + \ln 2 \ln N + \frac{1}{2} (\ln N + \ln(2N+1)) (\ln N - \ln(2N+1))$$

$$= \gamma \ln 2 + \ln 2 \ln N + \frac{1}{2} \left(\ln N + \ln 2 + \ln N + \ln \left(1 + \frac{2}{N} \right) \right) \left(\ln N - \ln 2 - \ln N - \ln \left(1 + \frac{2}{N} \right) \right) + o(1)$$

$$= \gamma \ln 2 + \cancel{\ln 2 \ln N} - \frac{\ln^2 2}{2} - \cancel{\ln 2 \ln N} + o(1)$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$$

Comme on a montré au 2) que $(\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n})$ cvg, la suite (S'_n) cvg vers $l \in \mathbb{R}$ et (suite extraite)
 $l = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$

$$d'o \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}}$$

exercice 2

①

1) Posons $u_n = \frac{t^n}{1+t^n}$

* Pour que (u_n) existe il faut $t \neq -1$

* Si $|t| < 1$, $1+t^n \sim 1$ et $|u_n| \sim |t^n| \geq 0$

et comme $(\sum |t|^n)$ cvg, par TC, $(\sum u_n)$ cvg (abs)

* Si $|t| > 1$, $1+t^n \sim t^n$ et $|u_n| \sim 1$. $(\sum u_n)$ div. gros.

* Si $t = 1$, $u_n = \frac{1}{2}$: idem

d'o $\boxed{\mathcal{D} =]-1, 1[}$

2) Comme $|t^n| < 1$, $\frac{1}{1+t^n} = \sum_{p=0}^{\infty} (-t^n)^p$, d'o :

$$\forall t \in \mathcal{D} : S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p t^{np+n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} t^{np} \quad (\text{cd } \forall p = p+1)$$

considérons la famille $((-1)^{p-1} t^{np})_{(n,p) \in \mathcal{I} = (\mathbb{N}^*)^2}$.

on constate que l'échange $\sum_n \sum_p \leftrightarrow \sum_p \sum_n$ donne la formule demandée.

Pour cela, montrons que la famille est sommable, (2)

Posons $a_{n,p} = (-1)^{p-1} t^{np}$

$|a_{n,p}| = [|t|^n]^p$ et comme $|t| < 1$,

$(\sum_{p \geq 1} |a_{n,p}|)$ converge. Posons $\sigma'_n = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{n,p}| = \frac{|t|^n}{1-|t|^n}$.

Comme $|t| < 1$, $\sigma'_n \sim_{n \rightarrow \infty} |t|^n$, d'où par TC :

$(\sum \sigma'_n)$ converge.

On en déduit que la famille $(a_{n,p})_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

$$\forall t \in \mathbb{D} : \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_{n,p} = S(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{p-1} t^{np} \quad (\text{Fubini})$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} \frac{t^p}{1-t^p}$$

d'
 $\forall t \in \mathbb{D} : S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{1-t^k}$

3) a) A l'aide du théorème de sommation par paquets :

$$\forall t \in \mathbb{D} : S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(n,p) \in I_k} (-1)^{p-1} t^{np}$$

où $I_k = \{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid np = k\}$ et $(I_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ partition de $(\mathbb{N}^*)^2$.

Posons $\forall k \in \mathbb{N}^*$: $a_k = \sum_{(n,p) \in I_k} (-1)^{p-1}$, on conclut: ③

$$\forall t \in \mathbb{D} : S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$$

b)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	k
	1	1,2	1,3	1,2,4	1,5	1,2,3,6	1,7	1,2,4,8	1,3,9	1,2,5,10	1,11	1,2,3,4,6,12	diviseurs de k
	1	0	2	-1	2	0	2	-2	3	0	2	-2	a_k

Les diviseurs de 728 sont [1, 2, 4, 7, 8, 13, 14, 26, 28, 52, 56, 91, 104, 182, 364, 728]

On en déduit que $a_{728} = -8$

c) voir ⑤

$$d) \quad a_k = \sum_{\substack{p=1 \\ p|k}}^k (-1)^{p-1} = \sum_{\substack{p=1 \\ p|k \\ p \text{ impair}}}^k 1 - \sum_{\substack{p=1 \\ p|k \\ p \text{ pair}}}^k 1$$

(4)

d'o a_k est le nombre de diviseurs impairs de k moins le nombre de diviseurs pairs de k

Si on note $k = 2^s q$ où $s \in \mathbb{N}$ et q impair

1^{er} cas $s=0$ $p|k \Leftrightarrow p|q \Rightarrow p$ impair donc

$$a_k = |\{d \in \mathbb{N}^* \mid d|k\}| > 0 \text{ (cardinal)}$$

2nd cas $s \geq 1$ $p|k \Leftrightarrow \exists d|q$ et $\exists i \in [0, s] \setminus$
 $p = 2^i d$

Si on note $\mathcal{D}_k = \{d \in \mathbb{N}^* \mid d|k\}$, alors :

$$\mathcal{D}_k = \underbrace{\mathcal{D}_q}_{\text{diviseurs impairs}} \cup \underbrace{\{2^i d, d \in \mathcal{D}_q, \text{ et } i \in [1, s]\}}_{\text{diviseurs pairs}}$$

q) $a_{2^s q} = |\mathcal{D}_q| - s|\mathcal{D}_q| \leq 0$ (nulssi $s=1$)

d $a_k > 0$ si k impair et $a_k \leq 0$ si k pair

```

01|
02|
03| def I(k):
04|     L=[]
05|     for i in range(1,k+1):
06|         if k%i==0:
07|             L.append([i,k//i])
08|     return L
09|
10| def a(k):
11|     s=0
12|     L=I(k)
13|     for couple in L:
14|         p=couple[1]
15|         s=s+(-1)**(p-1)
16|     return s
17|
18| for k in range(1,13):
19|     print(k, ' et a(' ,k, ') = ',a(k))

```

```

21|
22| # Et voici l'exécution :
23|
24| >>> (executing file

```

```

25| 1  et a( 1 ) = 1
26| 2  et a( 2 ) = 0
27| 3  et a( 3 ) = 2
28| 4  et a( 4 ) = -1
29| 5  et a( 5 ) = 2
30| 6  et a( 6 ) = 0
31| 7  et a( 7 ) = 2
32| 8  et a( 8 ) = -2
33| 9  et a( 9 ) = 3
34| 10 et a( 10 ) = 0
35| 11 et a( 11 ) = 2
36| 12 et a( 12 ) = -2

```

IA 1) $u_{n+1} - u_n = a_{n-1} u_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$

c'est vrai pour $n=0$ et $n=1$. Supposons-le pour

n et $n-1$, $u_{n+1} = u_n + a_{n-1} u_{n-1} \geq 0$ donc $\underline{u_{n+1} \geq 0}$
 $\geq 0 \quad \geq 0 \quad \geq 0$

d' $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0$ d'où $u_{n+1} - u_n \geq 0, \forall n \geq 1$
 donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante

IA 2) $\forall n \geq 2 \quad u_{n+1} = u_n + a_{n-1} u_{n-1} \leq u_n + a_{n-1} u_n \quad (u_n) \nearrow$
 $\leq u_n (1 + a_{n-1})$

Or $\forall t \geq 0 \quad 1+t \leq e^t$ (soit par convexité de $\exp$, soit par étude des variations de $t \mapsto e^t - 1 - t$ soit à l'aide de la série : $1+t \leq 1+t+\frac{t^2}{2}+\dots+\frac{t^n}{n!}+\dots=e^t$)

Donc $1+a_{n-1} \leq e^{a_{n-1}}$ d'où $\boxed{\forall n \geq 2 \quad u_{n+1} \leq u_n e^{a_{n-1}}}$

On en déduit que $\forall n \geq 3$:

$$u_n \leq u_{n-1} e^{a_{n-2}} \leq u_{n-2} e^{a_{n-2}+a_{n-3}} \leq u_2 e^{a_{n-2}+a_{n-3}+\dots+a_1}$$

Comme la série $(\sum a_n)$ converge, la suite $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}$

est majorée par $\Pi \in \mathbb{R}$ et donc $\forall n \geq 3 \quad u_n \leq u_2 e^{\Pi} = \Pi'$ (2)
 avec $\Pi' \in \mathbb{R}$ indépendant de n d'où (u_n) majorée comme
 elle est $\nearrow$ on conclut: (u_n) suite convergente

I A 3) (u_n) étant convergente et croissante (par $n \geq 1$), sa
 limite l , vérifie: $\forall n \geq 1 \quad 0 < u_1 \leq u_n \leq l$ d'où $l > 0$
 d'autre part $\forall n \geq 1 \quad a_{n+1} u_{n+1} \sim l a_{n+1}$ et $a_{n+1} u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$
 donc $a_{n+1} \sim \frac{1}{l} (u_{n+1} - u_n)$

Par correspondance bijective suite- Σ : la série
 $(\sum u_{n+1} - u_n)$ converge d'où $(\sum \frac{1}{l} (u_{n+1} - u_n))$ converge
 comme $a_{n+1} \geq 0$ par TC: $(\sum a_{n+1})$ converge

comme $\sum_{n=1}^N a_{n+1} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n$, il est donc que $(\sum a_n)$ converge

I B 1) on a $|u_0| = r_0, |u_1| = r_1$, puis

$$|u_2| = |u_1 + a_0 u_0| \leq |u_1| + |a_0| |u_0| = r_2$$

Supposons $|u_n| \leq r_n$ et $|u_{n-1}| \leq r_{n-1}$ on a alors
 facilement $|u_{n+1}| \leq r_{n+1}$, par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq r_n$

I B2 Grâce à IA, comme $(\sum |a_n|)$ converge, la suite (v_n) converge donc elle est majorée: $\exists N \in \mathbb{N}$ (3)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |v_n| \leq \Pi \text{ d'où } \forall n \geq 1 \quad |u_{n+1} - u_n| = |a_{n-1} v_{n-1}| \leq \Pi |a_{n-1}|$$

donc $0 \leq |u_{n+1} - u_n| \leq \Pi |a_{n-1}|$, comme $(\sum |a_{n-1}|)$

converge, par T.C. $(\sum |u_{n+1} - u_n|)$ converge donc

la série $(\sum |u_{n+1} - u_n|)$ converge Absolument

Grâce à la correspondance bijective suite - Σ :

la suite (u_n) converge

I C $\forall k \geq 1 \quad u_{k+1} - u_k = a_{k-1}$, $u_{k-1} \sim a^{k-1} L$ avec $L = \lim u_n$ qui n'est pas nulle d $u_{k+1} - u_k \sim L a^{k-1}$

$$\sum_{k=n}^N u_{k+1} - u_k = u_{N+1} - u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} L - u_n$$

Par le théorème de sommation des équivalents, on a:

$u_{k+1} - u_k \sim L a^{k-1}$, comme $L \neq 0$, $L a^{k-1}$ est de signe

constant d'où comme les 2 séries sont convergentes (

série géométrique de raison $a \in]0, 1[$) leurs restes

sont équivalents: $R_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} u_{k+1} - u_k \sim R'_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} L a^{k-1}$

on $R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^N u_{k+1} - u_k = L - u_n$ et $R'_{n-1} = L a^{n-1} \sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{L a^{n-1}}{1-a}$ (4)

d $\boxed{L - u_n \sim \frac{L a^{n-1}}{1-a}}$

IP1) $\forall n \geq 1 \quad u_{n+1} - u_n = a_{n+1} \quad u_{n-1} \sim \frac{1}{n^2} \times L \quad (L \neq 0)$

on $L \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} = L \left[-\frac{1}{t} \right]_n^{n+1} = L \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{L}{n(n+1)} \sim \frac{L}{n^2}$

par transitivité : $\boxed{u_{n+1} - u_n \sim L \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2}}$

Par TC, comme $u_{n+1} - u_n \sim \frac{L}{n^2} \geq 0$ si $L > 0$ (≤ 0 si $L < 0$)

la série $(\sum u_{n+1} - u_n)$ et la série $(\sum L \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2})$ sont

convergentes, et leurs restes sont équivalents d'où

$$R_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} u_{k+1} - u_k = L - u_n \sim R'_n = \sum_{k=n}^{\infty} L \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} = L \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^2}$$

et $\int_n^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_n^{\infty} = 0 - (-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ d $\boxed{L - u_n \sim \frac{L}{n}}$

IP2 $L - u_n \sim \frac{L}{n}$ donc $L - u_n - \frac{L}{n} = -\varepsilon_n = o\left(\frac{L}{n}\right)$

donc $\underline{\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n}\right)}$

d'autre part $\forall n \geq 1 \quad \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = u_{n+1} - u_n - \left(L - \frac{L}{n+1}\right) + \left(L - \frac{L}{n}\right)$

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = a_{n+1} u_{n-1} + \frac{L}{n+1} - \frac{L}{n} = \frac{u_{n-1}}{n(n+1)} - \frac{L}{n(n+1)}$$

donc $\xi_{n+1} - \xi_n = \frac{\mu_{n+1} - L}{n(n+1)}$

$= \frac{-L/n + o(\frac{1}{n})}{n(n+1)}$ or $o(\frac{1}{n-1}) = \frac{n}{n-1} o(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \times 0 = 0$

donc $o(\frac{1}{n-1}) = o(\frac{1}{n})$

d'où $\xi_{n+1} - \xi_n = \frac{-L}{n(n+1)(n+1)} + o(\frac{1}{n^3})$

$\sim \frac{-L}{n^3}$

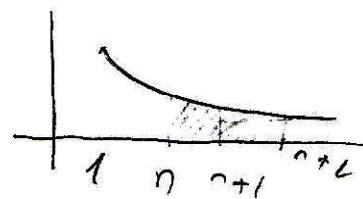
d $\boxed{\xi_{n+1} - \xi_n \sim \frac{-L}{n^3}}$

de la même manière (toujours avec le théorème de sommation des équivalents) on a :

$\sum_{k=n}^{\infty} \xi_{k+1} - \xi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (\xi_k - \xi_n) = 0 - \xi_n = -\xi_n \sim \sum_{k=n}^{\infty} \frac{-L}{k^3} = -LR''_{n-1}$

or en sommant ^{de $n+1$ à $+\infty$} l'encadrement $\frac{1}{(p+1)^3} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t^3} \leq \frac{1}{p^3}$

on a $R''_{n+1} \leq \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^3} \leq R''_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$



d'où $\int_n^{\infty} \frac{dt}{t^3} \leq R''_n \leq \int_{n-1}^{\infty} \frac{dt}{t^3}$

$\Rightarrow \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_n^{\infty} \leq R''_n \leq \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_{n-1}^{\infty}$

$\Rightarrow \frac{1}{2n^2} \leq R''_n \leq \frac{1}{2(n-1)^2}$, multiplication par n^2 :

on a $1 \leq 2n^2 R''_n \leq \frac{n^2}{(n-1)^2}$: par théorème d'encadrement : $2n^2 R''_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

$$d'où \quad R_n'' \sim \frac{1}{2n^2} \quad \text{d} \quad \boxed{\varepsilon_n \sim \frac{L}{2n^2}}$$

(6)

$$d'où \quad \varepsilon_n = \frac{L}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{d} : \quad \boxed{u_n = L - \frac{L}{n} + \frac{L}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

rem: On pourrait aussi utiliser $\frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

II A: $\forall x = (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall y = (c, d) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Soit (u_n) définie par (R) et $(u_0, u_1) = (a, b)$

soit (v_n) ————— $(v_0, v_1) = (c, d)$

Soit (w_n) définie par $w_n = \lambda u_n + v_n$ on a:

$$w_0 = \lambda a + c \quad \text{et} \quad w_1 = \lambda b + d \quad \text{donc} \quad (w_0, w_1) = \lambda(a, b) + (c, d)$$

$$\forall n \geq 1 \quad w_{n+1} = \lambda u_{n+1} + v_{n+1} = \lambda(u_n + a_{n-1} u_{n-1}) + v_n + a_{n-1} v_{n-1} \\ = w_n + a_{n-1} w_{n-1} \quad \text{donc} \quad (w_n) \text{ vérifie (R)}$$

$$\text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lambda L(a, b) + L(c, d)$$

$$\text{d'autre part} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = L(w_0, w_1) = L(\lambda(a, b) + (c, d))$$

$$\text{d} \quad \boxed{L(\lambda(a, b) + (c, d)) = \lambda L(a, b) + L(c, d) : L \text{ est linéaire}}$$

II B 1) Si $u_n = 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 0 = u_{n+1}$ et

$$u_{n+3} = u_{n+2} + a_{n+1} u_{n+1} = u_{n+1} + a_{n+1} u_{n+1}$$

on a donc $u_{n+2} = u_{n+1} + S_n$ avec S_n un

coefficient des $a_i > 0$ et de u_{n+1} avec que des +

Si $u_{m+1} > 0$ on aura donc $\begin{cases} u_{m+h} \geq u_{m+1} > 0 \\ \forall h \geq 1 \end{cases}$ et donc $\lim u_n \geq u_{m+1} > 0$ (7)

Précision:

Soit m_0 le 1^{er} indice tel que $u_{m_0} = 0$ (un tel indice existe; c'est le + petit elt de $\{m \in \mathbb{N} \mid u_m = 0\} \neq \emptyset$)

→ Si $m_0 = 0$ on a $\frac{u_{m_0+1}}{a_{m_0+1}} = u_1 \neq 0$ sinon on aurait $(u_0, u_1) = (0, 0)$

→ Si $m_0 \geq 1$, supposons $u_{m_0+1} = 0$ alors $\bar{a} = 0$
on aurait $u_{m_0-1} = \frac{1}{a_{m_0-1}} (u_{m_0+1} - u_{m_0}) = 0 - 0 = 0$

ce qui contredit la minimalité de m_0 .

En conséquence on a toujours $u_{m_0+1} \neq 0$. Quitte à échanger (u_n) en $-(u_n)$ on peut donc supposer.

$$\underline{u_{m_0} = 0 \text{ et } u_{m_0+1} > 0}$$

Prouvons par récurrence que $\forall h \geq 1 \quad u_{m_0+h} \geq u_{m_0+1}$

c'est vrai; pour $h=1$ et $h=2$: $u_{m_0+2} = u_{m_0+1}$

supposons donc $u_{m_0+h} \geq u_{m_0+1}$ et $u_{m_0+h+1} \geq u_{m_0+1}$

on a donc $u_{m_0+h+2} = u_{m_0+h+1} + a_{m_0+h} u_{m_0+h}$
 $\geq u_{m_0+h+1} + 0 \times 0 \geq u_{m_0+1}$

$$\underline{d} \quad \boxed{L(u_0, u_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n > u_{n_0+1} > 0 \text{ donc non nulle}} \quad (8)$$

II 32) $N \subset \mathbb{R}^2$ donc $\dim N \in \{0, 1, 2\}$

* $\dim N = 2 \Leftrightarrow N = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow L = 0$ (application nulle)
ce qui est impossible car $L(0, 1) \neq 0$ avec II 31)

* Le théorème du rang donne $\dim N = 2 - \dim \operatorname{Im} L$
comme $\operatorname{Im} L \subset \mathbb{R}$, $\dim \operatorname{Im} L \leq 1$ d'où $\dim N \geq 1$

$$\underline{d} \quad \boxed{\dim N = 1}$$

II (1) Si $(u_0, u_1) \in N$, on a donc $L(u_0, u_1) = 0$. Grâce
à II 31) on a $\forall m \in \mathbb{N} \quad u_m \neq 0$.

Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} u_{n_0+1} > 0$
quitte à changer (u_0, u_1) par $(-u_0, -u_1)$, ce qui
change tous les u_n en $-u_n$ on peut supposer
que $u_{n_0} > 0$ et $u_{n_0+1} > 0$. Par une récurrence

facile on a donc $\forall n \geq n_0+1: u_n \geq 0$ puis par
récurrence $\forall n \geq n_0+1 \quad u_n \geq u_{n_0+1} > 0$. Absurde car $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

$$\text{donc } \underline{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n u_{n+1} < 0}$$

⑨

Réciproquement: si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n u_{n+1} < 0$. Comme (u_n) converge, sa limite l doit donc vérifier $\lim(u_n u_{n+1}) = l^2 \leq 0$
 d'où $l=0$ donc $L(u_0, u_1) = 0$ soit $(u_0, u_1) \in N$

$$\underline{d} \quad (u_0, u_1) \in N \Leftrightarrow (u_n) \text{ alternée}$$

II. C2) N étant de dimension 1, N est une droite de $\mathbb{R}^2$. Donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que N ait pour équation cartésienne dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$: $N/\alpha x + \beta y = 0$

D'autre part si $(u_0, u_1) \in N$, $(u_0, u_1) \neq (0, 0)$ on a $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si α était égal à 0, alors $(1, 0)$ serait dans N car $0 \times 1 + \beta \times 0 = 0$; ce qui est impossible $u_1 \neq 0$. De même, on a: $\beta \neq 0$ (sinon $(0, 1) \in N$).

Soit $(u_0, u_1) \in N - \{(0, 0)\}$, on a donc $u_0 \neq 0$ (et $u_1 \neq 0$)
 $\alpha u_0 + \beta u_1 = 0$ d'où $r_0 = -\frac{u_1}{u_0} = \frac{\alpha}{\beta}$

$$\underline{d} \quad \forall (u_0, u_1) \in N - \{(0, 0)\} \quad r_0 = \frac{\alpha}{\beta} \text{ indépendant de } (u_0, u_1)$$

II D1) $\forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = u_n + a_{n-1} u_{n-1} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{-u_n} = -1 + \frac{a_{n-1}}{-u_n/u_{n-1}}$
 $\Rightarrow \boxed{r_n = -1 + \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}}}$ car $u_n \neq 0$

Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n u_{n+1} < 0$, on a $-\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{u_n u_{n+1}}{u_n^2} > 0$

donc $\underline{n_n > 0}$ d'où $-1 + \frac{a_{n+1}}{n_{n+1}} > 0$ soit $\left| \begin{array}{l} n_{n+1} < a_{n+1} \\ \forall n \geq 1 \end{array} \right|$ (10)

d $\boxed{\forall n \geq 1 \quad 0 < n_n < a_n} \quad (*)$

II D 2) Comme $(\sum a_n)$ converge, $\lim a_n = 0$ (cond. nécessaire!)

et par théorème d'encadrement $\tilde{a} (*)$: $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} n_n = 0}$

II D 3) Par T.C. comme $(\sum a_n)$ converge et $0 < n_n < a_n$, on a

$\boxed{(\sum n_n) \text{ converge}}$

Comme $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |n_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$, par d'Alembert :

$\boxed{(\sum u_n) \text{ converge Absolument}}$ (et donc $(\sum u_n)$ et $(\sum |u_n|)$ cvg)

III A Injecter une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dans l'équation

différentielle : $(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n - \quad \quad \quad - 2 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n=0 : -2a_2 + 2a_1 + a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1 : n(n+1)a_{n+1} - (n+1)(n+2)a_{n+2} + 2(n+1)a_{n+1} + a_n = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = a_1 + \frac{1}{2} a_0 & (1) \\ \forall n \geq 1 : a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} a_n & (2) \end{cases}$$

⑪

$$\Leftrightarrow \forall n \geq 1 : a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)} a_{n-1} \quad \begin{cases} n=1 : \text{c'est } (1) \\ n \geq 2 : \text{c'est } (2) \end{cases}$$

Rebati sur a_n en u_n on a donc :

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n(n+1)} u_{n-1}} : \text{On reconnaît (R) avec}$$

la suite (a_n) de $I \cap \mathbb{D} \left(a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$

Convergence d'après le I comme $(\sum a_n)$ v.g. $(a_n \sim \frac{1}{n^2} \geq 0)$

la suite (u_n) converge donc $u_n = O(1)$ et $\forall n \in]-1, 1[:$

$$u_n x^n = O(n^n) \text{ et comme } (\sum |n^n|) \text{ v.g. par TC : } (\sum u_n n^n)$$

converge d'où le rayon de convergence $\underset{R}{\wedge}$ de la série entière $(\sum u_n n^n)$ vérifie $R \geq 1$ et grâce au théorème de dérivation sous le signe $\sum$ on a :

f solution de (E) développable en série entière sur $] -1, 1[$ SSI
 $\exists (u_n)$ vérifiant (R) telle que $\forall n \in]-1, 1[: f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$

Soit f_0 la fonction solution solution de (E) : $\forall n \in]-1, 1[$ (12)

$$f_0(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \quad \text{avec } \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0 \text{ et } (\alpha_n) \text{ vérifiant (R)}$$

de même f_1 telle que $f_1(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$ avec $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1$

(f_0, f_1) est un système fondamental car son wronskien

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_0(x) & f_1(x) \\ f_0'(x) & f_1'(x) \end{vmatrix} \quad \text{vérifie } W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

convergence grâce au th. de Cauchy ($\forall n \in]-1, 1[$ $x-1 \neq 0$)

l'ensemble des solutions $\mathcal{Y}_{]-1,1[}$ de (E) est $\text{vect}(f_0, f_1)$

$$\mathcal{Y}_{]-1,1[} = \text{vect}(f_0, f_1) = \left\{ \text{fonctions D.S.E. sur }]-1, 1[\text{ sol. de (E)} \right\}$$

III 3 on a vu au ID et au IID que soit (u_n) admet une limite L non nulle et alors $u_n \sim L$ d'où

$u_n x^n \sim L x^n$ et le rayon de convergence de $(\sum u_n x^n)$ est égal à $\underline{1}$ ou bien $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et alors (II D) :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ d'où le rayon de convergence de $(\sum u_n x^n)$ est

égal à $+\infty$, or $(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ssi $(u_0, u_1) \in N$

d) { fonction sol. développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (13)
 $(R=+\infty)$ et solution de (E) } = { $f: n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ avec (u_n)
 q-i vérifie R et $(u_0, u_1) \in \mathbb{N}$ } qui est clairement iso-
 morphisme $\cong \mathbb{N}$ ($\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{Y}_{\mathbb{R}}$) donc de dimension 1
 $(u_0, u_1) \mapsto f: n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$

III. c soit $\left[\begin{array}{l} f: n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \text{ avec } (u_0, u_1) \notin \mathbb{N} \text{ donc } \underline{u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L \neq 0} \\ \text{solution de (E)} \end{array} \right.$

On a vu au TD 2 que $u_n = L - \frac{L}{n} + \frac{L}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

d'où $\forall n \in]-1, 1[$ (tout cvg par TC) :

$$f(x) - u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} L x^n - L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{L}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] x^n$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L x^n - L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + g(x) \text{ avec } g \text{ définie par:}$$

$$g(x) = u_0 - L + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] x^n}_{u_n(x)}$$

$(\sum u_n)$ converge normalement sur $[-1, 1]$ car :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad |u_n(x)| \leq \left| \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| = \alpha_n \quad \underline{\text{indépend. de } x} \text{ et}$$

comme $\alpha_n \sim \frac{1}{2n^2} \geq 0$, $(\sum \alpha_n)$ converge par TC. Par théorème de continuité

g est continue sur $[-1, 1]$ donc admet une limite 14
finie ($= g(1)$) en 1

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ on

peut conclure: $f(x) = \frac{L}{1-x} + L \ln(1-x) + g(x)$ et g est

IV, A * $f'_n(x) = \frac{-a_n}{(1+x)^2} < 0$ donc f_n décroissante (st) sur $\mathbb{R}^+$
et dérivable sur $\mathbb{R}^+$

* La composée de fonctions monotones est monotone sur $\mathbb{R}^+$
et la composée ——— dérivables — dérivables —

d f_n monotone et dérivable sur $\mathbb{R}^+$

* $g'_0(x) = f'_0(x) = \frac{-a_0}{(1+x)^2}$ donc $|g'_0(x)| \leq a_0$

$g_{n+1} = g_n \circ f_{n+1}$ d'où $g'_{n+1}(x) = g'_n(f_{n+1}(x)) \times \frac{-a_{n+1}}{(1+x)^2}$

Si on raisonne par récurrence et que l'on suppose que
 $\forall n \geq 0 \quad |g'_n(x)| \leq a_0 \cdots a_n$ comme $f_{n+1}(x) \in \mathbb{R}^+$,
on a alors $\forall n \geq 0 \quad |g'_n(x)| \leq a_0 \cdots a_n \times a_{n+1}$

d' : $\boxed{\forall n \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad |g'_n(x)| \leq a_0 \cdots a_n}$

* $|p_n - p_{n-1}| = |g_n(0) - g_{n-1}(0)| = |g_{n-1}(g_n(0)) - g_{n-1}(0)|$

et grâce à l'incontournable Théorème des Accrissements (15)

$$\underline{\text{fin}}: \forall n \geq 1 \quad |p_n - p_{n-1}| = |(f_n(0) - 0) g'_{n-1}(c)| \\ \leq a_n \times a_0 \cdots a_{n-1}$$

$$\underline{\text{d}} \quad \boxed{\forall n \geq 1 \quad |p_n - p_{n-1}| \leq a_0 a_1 \cdots a_n}$$

IV B La formule du II D 1 ressemble aux expressions $f_n(x)$:

$$r_n = -1 + \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}} \quad (\Rightarrow) \quad r_n + 1 = \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}} \quad (\Rightarrow) \quad r_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{1 + r_n}$$

$$(\Rightarrow) r_{n-1} = f_{n-1}(r_n) \quad \text{d'où} \quad r_0 = f_0 \circ f_1 \circ \cdots \circ f_{n-1}(r_n) \quad \text{soit}$$

$$\underline{r_0 = f_{n-1}(r_n)} \quad \text{d'où par} \quad \underline{p_{n-1} = f_{n-1}(0)} \quad \text{et} \quad \underline{p_n = f_n(0) = f_{n-1}(a_n)}$$

d'après le II D 1 $0 < r_n < a_n$. Comme f_{n-1} est monotone
 $f_{n-1}(r_n)$ est entre $f_{n-1}(0)$ et $f_{n-1}(a_n)$ d'où

$$\boxed{r_0 \text{ entre } p_{n-1} \text{ et } p_n}$$

pb (p_n) est-elle convergente? $|p_n - p_{n-1}|$ semble très petit;
 montrons que la série $(\sum p_n - p_{n-1})$ est absolument convergente.

Comme $(\sum a_n)$ converge, $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ d'où $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \mid \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq 1$

$$\text{d'où} \quad \forall n \geq n_0 + 1: |p_n - p_{n-1}| \leq 1 \times 1 \times \cdots \times 1 \times a_n \leq M a_n \quad \text{avec} \quad M = a_0 \cdots a_{n_0-1}$$

Par TC: $(\sum |p_n - p_{n-1}|)$ converge donc $(\sum p_n - p_{n-1})$ converge.

et par correspondance bijective suite - Σ , la (16)
suite (p_n) converge vers un réel l . L'encadrement:

π_0 entre p_n et p_{n+1} donne $|\pi_0 - p_n| \leq |p_n - p_{n+1}|$ et
par passage à la limite: $|\pi_0 - l| \leq |l - l| = 0$ soit
 $l = \pi_0$ d'où (p_n) converge vers π_0

IV c on utilise l'encadrement $|\pi_0 - p_{n+1}| \leq |p_n - p_{n+1}|$
d'où $|\pi_0 - p_{n+1}| \leq a_0 \cdots a_n$ d'où l'algorithme en
français:

- calculer les $a_0 \cdots a_n$ jusqu'à $a_0 \cdots a_{n_0} \leq \varepsilon$
- calculer p_{n_0+1}

```
> restart:
> u:=proc(n,u0,u1,a)
  option remember;
  if n=0 then u0
  elif n=1 then u1
  else expand(u(n-1,u0,u1,a)+a(n-2)*u(n-2,u0,u1,a));fi;end:
>
> aa:=n->1/((n+1)*(n+2));
```

$$aa := n \rightarrow \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

```
> u(5,x,y,aa);
```

$$\frac{157}{120}y + \frac{17}{30}x$$

```
> u(500,13.,-7,aa);
```

-2.173776270

```
> toto:=proc(a,e) # ici e représente le epsilon
  produit:=a(0);n:=1; # recherche du n tel que produit<=e
  while produit>e do produit:=produit*a(n);n:=n+1;od;
  p:=0;# début du calcul de p_n
  for i from n-1 to 0 by -1 do p:=a(i)/(1+p);od;
  [n,evalf(p,30)];end: #toto sort l'entier n et p_n
```

Warning, 'produit' is implicitly declared local
Warning, 'n' is implicitly declared local
Warning, 'p' is implicitly declared local
Warning, 'i' is implicitly declared local

```
> toto(aa,10^(-5));toto(aa,10^(-50));
```

[6,.433127424220657951443758080736]

[25,.433127426722311758317183455776]

```
> r0:="[2];
```

r0 := .433127426722311758317183455776

```
> u(500,1,-r0,aa);
```

$u_0 = 1, u_1 = -r_0 u_0 \rightarrow .2186895468 \cdot 10^{-10}$

```
> p:=0:for i from 7 to 0 by -1 do p:=a(i)/(1+p);od:p; #voici p_7
```

$$\frac{a(0)}{1 + \frac{a(1)}{1 + \frac{a(2)}{1 + \frac{a(3)}{1 + \frac{a(4)}{1 + \frac{a(5)}{1 + \frac{a(6)}{1 + a(7)}}}}}}}$$

(fraction continue)

exemple: $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$
 $= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$