

Remarque : les valeurs numériques n'étaient pas demandées, on les mets pour se rendre compte plus concrètement des probabilités demandées.

Partie I – Probabilités conditionnelles

1. Par hypothèse, $P(A) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$, et $P(D/A) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$,

Conclusion: $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ et $P(D/A) = \frac{1}{50}$

2. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(A \cap D) = P(A)P(D/A).$$

Ainsi,

$$P(A \cap D) = \frac{3}{250} (= 0,012)$$

3. Les événements A et B forment un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales, $P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B)$. Par conséquent, $P(D) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{50} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{20}$ d'où

$$P(D) = \frac{4}{125} (= 0,032)$$

Ainsi, 3,2% des pièces produites sont défectueuses.

4. D'après la formule de Bayes,

$$P(B/D) = P(D/B) \cdot \frac{P(B)}{P(D)}.$$

Donc

$$P(B/D) = \frac{5}{8} (= 0.625)$$

5. On cherche $P(A/\overline{D})$. Toujours avec Bayes ,

$$P(A/\overline{D}) = \left(1 - \frac{1}{50}\right) \cdot \frac{P(A)}{P(\overline{D})} = \left(1 - \frac{1}{50}\right) \cdot \frac{3/5}{(1 - 4/125)}$$

Conclusion:

$$P(A/\overline{D}) = \frac{147}{242} (= 0.607...).$$

Partie II – Contrôle de trois pièces

Les prélèvements étant indépendants, les événements D_1, D_2, D_3 sont indépendants et ont tous la même probabilité p .

6. Par indépendance,

$$P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) = P(D_1)P(D_2)P(D_3).$$

Donc

$$P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) = p^3 (= 0,000032768.)$$

7. Par indépendance,

$$\mathbf{P}(D_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3) = \mathbf{P}(D_1)\mathbf{P}(\overline{D}_2)\mathbf{P}(\overline{D}_3).$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}(D_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3) = pq^2 (= 0,02998\dots)}$$

8. L'événement « exactement une pièce est défectueuse » est la réunion disjointe des trois événements

$$D_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3,$$

$$\overline{D}_1 \cap D_2 \cap \overline{D}_3,$$

$$\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \cap D_3.$$

Ces trois événements ont la même probabilité pq^2 . Par conséquent,

$$\boxed{\mathbf{P}(\text{exactement une pièce défectueuse}) = 3pq^2 (= 0,089954304.)}$$

9. L'événement « au moins une pièce est défectueuse » est le complémentaire de l'événement $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}(\text{au moins une pièce défectueuse}) = 1 - q^3 (= 0,929607680.)}$$

Partie III – Étude d'une variable aléatoire

10. Le nombre X de pièces défectueuses parmi les trois pièces prélevées peut prendre les valeurs

$$\boxed{X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}}$$

11. On calcule les probabilités de chacune des valeurs de X :

$\forall k \in X(\Omega)$, $(X = k)$ correspond à choisir k tirages qui seront défectueux : il y en a $\binom{n}{k}$, puis

par indépendance des tirages on obtient $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ (p est la proba du succès).

Conclusion: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

12. On a immédiatement :

$$\boxed{\mathbf{P}(X \leq 2) = \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) = q^n + npq^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} p^2 q^{n-2}.$$

13. La question demande la probabilité que toutes les pièces soient défectueuses sachant qu'au moins une pièce est défectueuse.

On cherche donc $\mathbf{P}(X = n / X \geq 1) = \frac{\mathbf{P}((X = n) \cap (X \geq 1))}{\mathbf{P}(X \geq 1)}$. Or $(X = n) \subset (X \geq 1)$,

donc

$$\mathbf{P}(X = n / X \geq 1) = \frac{\mathbf{P}(X = n)}{\mathbf{P}(X \geq 1)} = \frac{p^n}{1 - \mathbf{P}(X = 0)} = \frac{p^n}{1 - q^n}$$

Conclusion: la probabilité vaut donc $\frac{p^n}{1 - q^n}$

Lorsque n tend vers l'infini, p^n tend vers 0 et $1 - q^n$ tend vers 1. Ainsi, même si l'on sait qu'au moins une pièce est défectueuse, il est extrêmement improbable que les n pièces le soient toutes lorsque n est grand.

Partie IV – Un second contrôle

On note C l'événement « le contrôle signale une pièce comme défectueuse ».

14. Le dispositif détecte une pièce défectueuse avec une probabilité de 95 %. Il signale à tort une pièce non défectueuse dans 3 % des cas. Ainsi,

$$\mathbf{P}(C/D) = \frac{19}{20}, \quad \mathbf{P}(C/\overline{D}) = \frac{3}{100}$$

15. Les événements D et $\overline{D}$ forment un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(D)\mathbf{P}(C/D) + \mathbf{P}(\overline{D})\mathbf{P}(C/\overline{D}).$$

D'où

$$\mathbf{P}(C) = \frac{4}{25} \frac{19}{20} + \left(1 - \frac{4}{25}\right) \frac{3}{100}$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}(C) = \frac{743}{12500} (= 0.594\dots)$$

16. On cherche $\mathbf{P}_C(D)$. D'après la formule de Bayes,

$$\mathbf{P}(D/C) = \mathbf{P}(C/D) \cdot \frac{\mathbf{P}(D)}{\mathbf{P}(C)}.$$

Conclusion:

$$\mathbf{P}_C(D) = \frac{380}{743} \approx 0,5114.$$

Remarque : La probabilité qu'une pièce signalée comme défectueuse le soit réellement est donc d'environ 51,1 %.

17. Avant le contrôle, la probabilité qu'une pièce soit défectueuse est

$$\mathbf{P}(D) = 0,032 = 3,2 \, \%.$$

Après un signalement positif, cette probabilité devient

$$\mathbf{P}(D/C) \approx 51,1 \, \%.$$

Le contrôle multiplie par 16 la probabilité que la pièce soit réellement défectueuse. Mais $\mathbf{P}(D/C)$ est loin des 95 % : bien que le dispositif détecte 95 % des pièces défectueuses, celles-ci sont rares (3,2 % de la production), alors que les fausses alertes s'appliquent à la grande masse des pièces saines (96,8 %). Près de la moitié des pièces signalées sont donc de fausses alertes : c'est l'illustration classique du paradoxe du faible taux de base.

exercice 2

E3A 2002 (PC)

1°) (u_n) est constante si $u_2 = u_1$, donc $a^2 = a$ donc

①

$a = 0$ ou $a = 1$, si $a = 1$ $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1$ donc $a = 0$

Réciproquement si $a = 0$ par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 0$$

d u est constante ou $a = 0$

2°) si (u_n) est vers l alors par T.G. $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{l^2}{l} = 0$

d $l = 0$

3°) si $\forall n \geq 1 \quad u_n \geq \sqrt{n}$ alors $\forall n \geq 1 \quad u_n > 0$ et on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{n}} \geq 1 \quad \text{et } u_n > 0 \quad \text{donc } \underline{\forall n \geq 1 \quad u_{n+1} \geq u_n}$$

et par théorème d'encadrement $(u_n \geq \sqrt{n}) : \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

d si $\forall n \geq 1 \quad u_n \geq \sqrt{n}$ alors (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$

4°) a) Récurrence sur n : $H_n : u_n < \sqrt{n}$

* H_k est vraie

* si H_n est vraie alors $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} < \frac{(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$

d $\forall n \geq k \quad u_n < \sqrt{n}$

b) Si $u_k = 0$ alors $\forall n \geq k$ $u_n = 0$ donc $(u_n)_{n \geq k}$ décroissante (2)

Si $u_k \neq 0$ alors comme $u_1 = a > 0$ ($\forall n, u_n = 0$)

donc par récurrence $\forall n \geq k$ $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{n}} < 1 \quad \text{donc} \quad u_{n+1} \leq u_n$$

al $(u_n)_{n \geq k}$ est décroissante

c) $(u_n)_{n \geq k}$ est alors décroissante et minorée (par 0) donc

elle converge par TLM. vu le 2/

on a $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0}$

$$\begin{aligned} 5^\circ) \quad u_n &= \frac{u_{n-1}^2}{\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left(\frac{u_{n-2}^2}{\sqrt{n-2}} \right)^2 = \frac{u_{n-2}^4}{\sqrt{n-1} (n-2)} = \frac{u_{n-3}^8}{\sqrt{n-1} (n-2) (n-3)^2} \\ &= \frac{u_1^{2^{n-1}}}{\sqrt{n-1} (n-2) (n-3)^2 (n-4)^4 \dots (2)^{2^{n-4}} 1^{2^{n-3}}} \end{aligned}$$

al $\boxed{u_n = \frac{a^{2^{n-1}}}{\sqrt{n-1} (n-2) (n-3)^2 (n-4)^4 \dots 2^{2^{n-4}}}}$

$$6^\circ) \quad a) \quad n^2 w_n = \frac{n^2 \ln(n+1)}{2^n} < \frac{n^2 x_n}{2^n} = \frac{n^3}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.C.} 0$$

CSG : $w_n = o(\frac{1}{n^2})$, $\frac{1}{n^2} \geq 0$ et $(\sum \frac{1}{n^2})$ cv

al par T.C. $(\sum w_n)$ converge (rem d'Alaube et mardait cv)

b) Si (u_n) converge alors (2°) elle converge vers 0
 d'où pour $\varepsilon = \frac{1}{2} \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N \mid u_n - 0 \mid \leq \varepsilon = \frac{1}{2}$

donc $0 \leq u_k \leq \frac{1}{2} < 1$ donc $\exists k \in \mathbb{N} \mid u_k < 1$
 [avec $k = N+3 > 2$]

reciproquement: s'il existe $k > 2 \mid u_k < 1$ donc

$u_k < 1 < \sqrt{k}$ donc d'après le 4°) (u_n) converge

d) $(u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \exists k > 2 \mid u_k < 1$

c) Utilisons le 5°) et le 6°) b) :

$u \text{ converge} \Leftrightarrow \exists k > 2 \mid u_k < 1$

$\Leftrightarrow \exists k > 2 \mid \frac{a^{2^{k-1}}}{\sqrt{k-1}(k-2) \cdots 2^{2^{k-4}}} < 1$

$\Leftrightarrow \exists k > 2 \mid \ln(u_k) < \ln 1 = 0$

$\Leftrightarrow \exists k > 2 \mid 2^{k-1} \ln a < \ln[\sqrt{k-1}(k-2) \cdots 2^{2^{k-4}}]$

$\Leftrightarrow \exists k > 2 \mid \ln a < \frac{1}{2^{k-1}} \left(\frac{1}{2} \ln(k-1) + \ln(k-2) + 2 \ln(k-3) + \cdots + 2^{k-4} \ln 2 \right)$

$\Leftrightarrow \exists k > 2 \mid \ln a < \frac{1}{2^k} \left[\frac{\ln(k-1)}{2^{k-1}} + \frac{\ln(k-2)}{2^{k-2}} + \frac{\ln(k-3)}{2^{k-3}} + \cdots + \frac{\ln 2}{2^2} \right]$

$\Leftrightarrow \exists k > 2 \mid a < \exp(S_k/2)$ où $S_k = \sum_{n=1}^k w_n$

et (w_n) converge on a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = W = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$

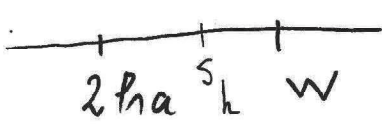
CSG Si u converge alors $\exists h > 2 \mid a < \exp(s_h/2)$ (4)

On $s_n \leq W$ ($W_n > 0$) donc $a < \exp(s_n/2) \leq \exp(W/2)$

donc $a < \exp(W/2)$

Réciproquement si $a < \exp(W/2)$. Comme on a:

$\forall n \geq 1$ $W_n > 0$ la suite (s_n) est croissante vers W .

 on voit $2\ln a$ comme $W - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$
car $2\ln a < W$ ($\varepsilon = W - 2\ln a > 0$)

d'où $\exists h > 2 \mid 2\ln a = W - \varepsilon < s_h \leq \exp(W/2)$

donc $a < \exp(s_h/2)$ d'où u converge

d'après l'équivalence au début de cette question.

cl

$u \text{ converge} \Leftrightarrow a < \exp(W/2)$

(rem. $\exp(W/2) \approx 1,289$)

Problème 23a

①

$$I 1^o) \forall n \in \mathbb{N}; 0 \leq P_{n+1} = u_{n+1} P_n \leq P_n \quad \text{car } 0 \leq u_{n+1} \leq 1)$$

donc (P_n) est décroissante

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \geq 0$ (P_n) minorée

Par TLN : (P_n) converge d'; $\boxed{\prod_{k=0}^{\infty} u_k \text{ existe}}$

$$2^o) * \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$d': \boxed{\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ n'existe pas}}$$

$$* \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$d': \boxed{\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0}$$

$$* \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^n (k-1) \times \prod_{k=2}^n (k+1)}{\left(\prod_{k=2}^n k\right)^2} = \frac{(n-1)! \times \frac{(n+1)!}{2}}{(n!)^2}$$
$$= \frac{(n-1)! \times \frac{(n+1)!}{2}}{(n!)^2} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

$$d^o \boxed{\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}}$$

3°) Etudions $P_n = \prod_{h=0}^n (1+u_h)$

comme $|u_h| < 1$ on a $1+u_h > 0$ donc $P_n > 0$

$$\text{d'où } S_n = \ln P_n = \sum_{h=0}^n \ln(1+u_h)$$

Comme $(\sum u_n)$ cvg on a $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

$$\text{donc } |\ln(1+u_h)| \sim |u_h| \geq 0$$

a) Si $(\sum u_h)$ Abs cvg alors $(\sum \ln(1+u_h))$ est
par T.L.
Absolument convergente & donc (S_n) admet une
limite l d'où (P_n) cvg vers $e^l > 0$

$$\text{ic } \left[\left(\prod_{h=0}^{\infty} (1+u_h) \right) \text{ cvg} \mid \left(\text{et } \prod_{h=0}^{\infty} (1+u_h) = e^l > 0 \right) \right]$$

b) Si $(\sum u_n)$ cvg $\ln(1+u_h) \sim u_h$ est insuffisant
c) on fait donc un DL:

$$f_n(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$$

③

$$= u_n - v_n$$

avec $(\sum u_n)$ cvg et $v_n = \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$

Donc $v_n \sim \frac{u_n^2}{2} \geq 0$

b) si $(\sum v_n)$ cvg Alors $(\sum f_n(1+u_n))$ cvg par TC
comme somme de 2 séries cvg. et
linéarité

donc la suite (P_n) cvg (comme + limit)

ie $(\prod (1+u_n))$ cvg vers $e^l > 0$

c) si $(\sum v_n)$ Dvg Alors $\sum_{h=0}^{\infty} v_h \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

car c'est une série à termes positifs

d'où $\sum_{h=0}^n f_h(1+u_h) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{h=0}^{+\infty} u_h - \infty = -\infty$
(par T.G.)

d'où $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\infty} = 0$ (critère séquentiel)

il $(\prod (1+u_n))$ existe et $\prod_{n=0}^{\infty} (1+u_n) = 0$

(4)

d) Si $(\sum u_n)$ cvg absolument ou si $(\sum u_n)$ et $(\sum u_n^2)$ cvg

$$\text{alors } \prod_{n=0}^{\infty} (1+u_n) = e^{\lim S_n} = \underline{\underline{e^l > 0}}$$

Comme $0 \leq u_n^2 \leq |u_n|$, si $(\sum u_n)$ cvg absolument alors $(\sum u_n^2)$ cvg par TC. On peut conclure :

$$\boxed{\prod_{n=0}^{\infty} (1+u_n) > 0 \Leftrightarrow (\sum u_n) \text{ cvg et } (\sum u_n^2) \text{ cvg}}$$

e) * $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$

Comme $(\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k})$ et $(\sum (\frac{(-1)^{k+1}}{k})^2) = (\sum \frac{1}{k^2})$ (TSA* et Riemann) convergent, le produit infini existe et est > 0 . D'où le produit $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}$

$$\text{Or } P_{2n} = \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2n}{2n-1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \times \underbrace{\frac{2n-1}{2n}}_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } \boxed{\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}}$$

* $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, on a $(\sum u_n)$ cvg et $(\prod u_n^2)$ diverg

$$\text{d'où } \boxed{\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) = 0}$$

* (TSA) car $a_n = 1/n$ positive, décroissante et tend vers 0)

II 1°) $|1 + \frac{i}{n}|^2 = 1 + \frac{1}{n^2}$ donc si $P_n = \prod_{k=1}^n |1 + \frac{i}{k}|$ alors

$P_n = \sqrt{\prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k^2})}$ et comme $(\sum \frac{1}{n^2})$ cvg abs. on a

avec la 4°) a), (P_n) qui cvg vers $\sqrt{\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n^2})}$

cl' : $\boxed{\prod_{n=1}^{\infty} |1 + \frac{i}{n}| \text{ existe (et } > 0)}$

2°) $\left| \prod_{k=1}^n (1 + z_k) - 1 \right| = \left| (1 + z_1) \cdots (1 + z_n) - 1 \right|$ on développe tout :

$= \left| 1 + z_1 + \cdots + z_n + z_1 z_2 + \cdots + z_{n-1} z_n + z_1 z_2 z_3 + \cdots + z_1 z_2 \cdots z_n - 1 \right|$

$\leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + |z_1||z_2| + \cdots + |z_{n-1}||z_n| + \cdots + |z_1| \cdots |z_n|$

inégalité triangulaire

cette expression est la même qu'au dessus avec les modules donc :

$|z_1| + \cdots + |z_n| + |z_1 z_2| + \cdots + |z_1| \cdots |z_n| = \prod_{k=1}^n (1 + |z_k|) - 1$

$\underline{\text{cl}} \quad \boxed{\left| \prod_{k=1}^n (1 + z_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |z_k|) - 1}$

Alors Pour récurrence, ça marche aussi,

$$3^\circ) \forall n \geq p+1 \quad |P_n - P_p| = |P_p| \left(\prod_{k=p+1}^n (1+u_k) - 1 \right) \quad (6)$$

$$\leq \prod_{k=0}^p (1+|u_k|) \left(\prod_{k=p+1}^n (1+|u_k|) - 1 \right) \text{ avec } (2^\circ)$$

$$\leq P'_n - P'_p = |P'_n - P'_p|$$

$$\text{soit } P'_n = \prod_{k=0}^n (1+|u_k|)$$

Or suite cvg grâce au I 5° a) donc elle est de Cauchy donc la suite (P_n) aussi donc :

la suite (P_n) cvg ie $\prod_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ existe

$$4^\circ) \text{ Posons } P_n = \prod_{k=0}^n u_k \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^n \theta_k$$

$$\text{on a } \underline{P_n = e^{iS_n}}$$

* Si (S_n) cvg vers α alors (P_n) cvg vers $e^{i\alpha}$

* Si (P_n) cvg vers l . On a $|l|=1$ car $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|P_n|=1 \text{ d'où } \exists \alpha \in \mathbb{R} \mid l = e^{i\alpha}$$

$$\text{d'autre part comme } u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \longrightarrow \frac{l}{l} = 1 \text{ on a } \underline{\theta_n \rightarrow 0}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists k_n \in \mathbb{Z} \mid -\pi < S_n - \alpha - 2k_n\pi \leq \pi$$

$$\text{donc } e^{i(S_n - \alpha - 2k_n\pi)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{posons } \alpha_n = S_n - \alpha - 2k_n\pi$$

$$\alpha_n \in [-\pi, \pi] \text{ et } e^{i\alpha_n} \rightarrow 1 \text{ donc } (1) \alpha_n = (1) |\alpha_n| \rightarrow 1 \quad (\operatorname{Re}(e^{i\alpha_n}))$$

$$\text{or } |\alpha_n| \in [0, \pi] \text{ donc } \operatorname{Arg}((1) |\alpha_n|) = |\alpha_n| \rightarrow \operatorname{Arg} 1 = 0$$

donc $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(7)

donc $\alpha_{n+1} - \alpha_n = S_{n+1} - S_n - 2h_{n+1}\pi + 2h_n\pi \rightarrow 0$

comme $S_{n+1} - S_n = \theta_{n+1} \rightarrow 0$ on obtient;

$h_{n+1} - h_n \rightarrow 0$ et comme $h_n \in \mathbb{Z}$ il faut:

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad h_n = h_{n_0} = p \in \mathbb{Z}$

comme $S_n = \alpha_n + \alpha + 2h_n\pi$ on a:

(S_n) cvg vers $0 + \alpha + 2p\pi$ ie $(\sum \theta_n)$ cvg

d (P_n) cvg $\Leftrightarrow (S_n)$ cvg

5°) $1 + \frac{i}{n} = |1 + \frac{i}{n}| e^{i\theta_n}$ avec $\theta_n = \text{Arctan} \frac{1}{n}$ (diminuant vers 0)

on $\theta_n \sim \frac{1}{n} > 0$ donc $(\sum \theta_n)$ Dvg donc $(\prod e^{i\theta_n})$ Dvg

comme $(\prod |1 + \frac{i}{n}|)$ cvg vers un réel non nul vu

le I 4°) a), si $\prod (1 + \frac{i}{n})$ converge vers l

on avait $\prod_{n=0}^{\infty} e^{i\theta_n} = \frac{l}{\prod_{n=0}^{\infty} |1 + \frac{i}{n}|}$ absurde

d $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{i}{n})$ n'existe pas

A. Préliminaires

1) On a $E(X) = \sum_{k=1}^n kP(X=k) = \sum_{k=1}^{m-1} kP(X=k) + \sum_{k=m}^n kP(X=k)$ donc

$$E(X) \leq \sum_{k=1}^{m-1} (m-1)P(X=k) + \sum_{k=m}^n nP(X=k) \leq (m-1) \sum_{k=1}^n P(X=k) + \sum_{k=m}^n nP(X=k)$$

Or on a $\sum_{k=m}^n P(X=k) = P(X \geq m)$. Conclusion: $E(X) \leq m-1 + nP(X \geq m)$

Remarque : Les majorations ci-dessus sont valables si $m = 1$.

2) On trace la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $[1, +\infty[$ qui est continue, croissante et positive sur $[1, +\infty[$.

La formule demandée est vraie si $n = 1$ (on a même l'égalité).

Soit $n \geq 2$, on a :

$\forall k \geq 2, \forall t \in [k-1, k] : \ln t \leq \ln k$ que l'on intègre de $k-1$ à k : $\int_{k-1}^k \ln t dt \leq \ln k$ puis on somme de 2 à n : $\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln t dt \leq \sum_{k=2}^n \ln k$ soit $\int_1^n \ln t dt \leq \sum_{k=1}^n \ln k$ (car $\ln 1 = 0$).

Comme $\int_1^n \ln t dt = [t \ln t - t]_1^n = n \ln n - n + 1$, Conclusion: $\forall n \geq 1 : n \ln n - n + 1 \leq \sum_{k=1}^n \ln k$

On en déduit que $e^{n \ln n - n + 1} \leq e^{\sum_{k=1}^n \ln k} = n!$.

Or $\left(\frac{n}{e}\right)^n = e^{n \ln n - n} \leq e^{n \ln n - n + 1} \leq n!$ Conclusion: $\forall n \geq 1 : \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$

B. Le lemme de sous-additivité de Fekete

3) Faire un dessin sur une droite horizontale de la situation des éléments présentés.

Comme u est bornée, U_n est un ensemble borné et comme $u_n \in U_n$, U_n est non vide,

Conclusion: $(\underline{u}_n)$ et $(\bar{u}_n)$ sont bien définies

$\forall n \geq 1 : U_{n+1} \subset U_n$, donc $\bar{u}_n$ majore U_{n+1} et $\underline{u}_n$ minore U_{n+1} , on a alors : $\bar{u}_{n+1} \leq \bar{u}_n$ et $\underline{u}_{n+1} \geq \underline{u}_n$.

En conséquence, la suite $(\underline{u}_n)$ est croissante et la suite $(\bar{u}_n)$ est décroissante.

Comme ces deux suites sont bornées (par les bornes de (u_n)), par le théorème de limite monotone

on a : Conclusion: $(\underline{u}_n)$ et $(\bar{u}_n)$ sont monotones et convergentes

4) • On a vu au 3) que la suite $(\bar{u}_n)$ est décroissante.

Comme , pour tout $n \geq 1$, $u_n \in U_n$, $u_n \leq \bar{u}_n$ donc $\bar{u} \succeq u$.

Soit v telle que v soit décroissante et telle que $u \preceq v$, montrons que $\bar{u} \preceq v$.

Soit $n \geq 1$ et soit $k \geq n$, $u_k \leq v_k \leq v_n$ car v est décroissante. v_n est donc un majorant de U_n , donc

$\bar{u}_n \leq v_n$ et donc $\bar{u} \preceq v$. Conclusion: $\bar{u}$ est la plus petite suite décroissante et plus grande que u

• De la même manière, la suite u est décroissante.

Comme , pour tout $n \geq 1$, $u_n \in U_n$, $\underline{u}_n \leq u_n$ donc $\underline{u} \preceq u$.

Soit v telle que v soit croissante et telle que $v \preceq u$, montrons que $v \preceq \underline{u}$.

Soit $n \geq 1$ et soit $k \geq n$, $u_k \geq v_k \geq v_n$ car v est croissante. v_n est donc un minorant de U_n , donc

$v_n \leq \underline{u}_n$ et donc $v \preceq \underline{u}$. Conclusion: $\underline{u}$ est la plus grande suite croissante et plus petite que u

5) Soit $n \geq 1$ et soit $k \geq n$, $u_k \leq v_k \leq \bar{v}_n$ car $\bar{v}_n$ est un majorant de V_n . $\bar{v}_n$ est donc un majorant de U_n , donc $\bar{u}_n \leq \bar{v}_n$. Comme ces deux suites sont convergentes, on a

Conclusion: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{u}_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{v}_n$

6) $\Rightarrow$ Supposons que $\bar{u}$ et $\underline{u}$ soient adjacentes. Comme pour tout entier $n \geq 1$, $\underline{u}_n \leq u_n \leq \bar{u}_n$, grâce au théorème d'encadrement : u converge et sa limite est égale à celle de $\bar{u}$ et $\underline{u}$.

$\Leftarrow$ Supposons que u converge. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que $\forall k \geq N$ $|u_k - \ell| \leq \varepsilon$ (avec ℓ limite de u). On a donc $\forall k \geq N$, $\ell - \varepsilon \leq u_k \leq \ell + \varepsilon$, d'où pour tout $n \geq N$: $U_n \subset [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ et donc $\ell - \varepsilon \leq \underline{u}_n \leq u_n \leq \bar{u}_n \leq \ell + \varepsilon$. On en déduit que les suites $\bar{u}$ et $\underline{u}$ convergent vers ℓ .

Conclusion:

$\bar{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si u converge et dans ce cas les trois suites ont la même limite

7) On a : $m = nq + r = n(q-1) + n + r$ et comme $0 \leq r < n$, $1 \leq n \leq r + n$ et comme $m \geq 2n$, $m - 2n = (q-2)n + r \geq 0$ d'où $(q-2)n \geq -r > -n$, soit $q-2 > -1$ (car $n > 0$) et donc $q > 1$.

On a donc $m = nq + r = n(q-1) + n + r$ avec $n(q-1) > 0$ et $n + r > 0$. On peut appliquer la sous-additivité : $u_m = u_{n(q-1)+n+r} \leq u_{n(q-1)} + u_{n+r}$.

Enfin par récurrence sur q , on a $u_{n(q-1)} \leq (q-1)u_n$: en effet c'est vraie pour $q = 2$ et si c'est vraie pour $q \geq 2$, $u_{n(q)} \leq u_{n(q-1)} + u_n \leq (q-1)u_n + u_n = (q+1-1)u_n$.

Conclusion: $u_m \leq (q-1)u_n + u_{n+r}$

Multiplions par $\frac{1}{m}$, on a donc $\frac{u_m}{m} \leq \frac{(q-1)u_n}{m} + \frac{u_{n+r}}{m}$.

Tout d'abord, comme on a $n \leq n+r \leq n+n-1 = 2n-1$, on a $\frac{u_{n+r}}{m} \leq \frac{\max(u_n, \dots, u_{2n-1})}{m}$.

Ensuite $\frac{q-1}{m} - \frac{m-n-r}{nm} = \frac{1}{m} \frac{nq - n - m + n - r}{n} = 0$

Conclusion: $\frac{u_m}{m} \leq \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max(u_n, \dots, u_{2n-1})}{m}$

8) On prend $n = 1$ et pour tout $m \geq 2$, on a :

$0 \leq \frac{u_m}{m} \leq \frac{m-1-0}{m} \cdot \frac{u_1}{1} + \frac{\max(u_1)}{m} \leq 1 \cdot \frac{u_1}{1} + \frac{u_1}{1} = 2u_1$. Conclusion: $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est bornée

Soit $n \geq 1$ fixé et soit m quelconque tel que $m \geq 2n$. Posons $v_m = \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max(u_n, \dots, u_{2n-1})}{m}$

On a $\forall m \geq 2n : \frac{u_m}{m} \leq v_m$. La démonstration du 5) reste valable si l'on n'a l'inégalité qu'à partir

d'un certain rang et comme $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est bornée et que $\lim_{m \rightarrow +\infty} w_m = 1 \cdot \frac{u_n}{n} + 0$ par théorèmes généraux et car $\max(u_n, \dots, u_{2n-1})$ est indépendant de m , on peut conclure avec le 5) :

Conclusion: Pour tout entier $n \geq 1 : \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n}$

9) Posons $x_n = \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m}{m}$ et $y_n = \frac{u_n}{n}$. La suite x est constante donc convergente vers sa valeur.

D'autre part, on a $x \preceq y$ et la suite x est croissante, avec le 4) on a donc $x \preceq \underline{y}$ et comme x converge vers $\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m}{m}$ et $\underline{y}$ vers $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$, on a ensuite grâce au 5) : $\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m}{m} \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$, puis enfin il est clair que pour toute suite $z, z_n \leq \bar{z}_n$ et $\lim z_n \leq \lim \bar{z}_n$ donc $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m}{m}$.

Grâce au 6) on a : Conclusion: La suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}$

10) • Si $\forall i \in [1, n] X_i(\omega) < x$ alors $Y_n(\omega) < \frac{nx}{n}$. On a donc $\bigcap_{i=1}^n (X_i < x) \subset (Y_n < x)$ d'où

$P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i < x)\right) \leq P(Y_n < x)$. Comme les variables X_i sont indépendantes et de même loi,

$P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i < x)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i < x) = \prod_{i=1}^n P(X_1 < x) = 1^n = 1$.

On en déduit que $1 \leq P(Y_n < x) \leq 1$. Conclusion: $P(Y_n < x) = 1$

• Si $\forall i \in [1, n] X_i(\omega) \geq x$ alors $Y_n(\omega) \geq \frac{nx}{n}$. On a donc $\bigcap_{i=1}^n (X_i \geq x) \subset (Y_n \geq x)$ d'où

$P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \geq x)\right) \geq P(Y_n \geq x)$. Comme les variables X_i sont indépendantes et de même loi,

$P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \geq x)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \geq x) = \prod_{i=1}^n P(X_1 \geq x) = P(X_1 \geq x)^n > 0$.

Conclusion: $P\left((Y_n \geq x)\right) > 0$

11) • Soit $\omega \in \left(\left\{Y_m \geq x\right\} \cap \left\{\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right\}\right)$, on a alors

$$Y_{m+n}(\omega) = \frac{1}{m+n} \sum_{k=1}^{m+n} X_k(\omega) = \frac{1}{m+n} \left(mY_m + \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega) \right) \geq \frac{1}{m+n} (mx + nx) = x, \text{ donc}$$

$$Y_{m+n}(\omega) \geq x. \quad \text{Conclusion: } \left(\left\{Y_m \geq x\right\} \cap \left\{\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right\} \right) \subset \{Y_{m+n} \geq x\}$$

• Par le lemme des coalitions, Y_m et $\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ sont indépendantes donc

$$P\left(\left\{Y_m \geq x\right\} \cap \left\{\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right\}\right) = P\left(Y_m \geq x\right) \cdot P\left(\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right) \leq P\left(Y_{m+n} \geq x\right)$$

Or $P\left(\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\right) = P\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq x\right)$ car les X_i suivent la même loi (rigoureusement on montrerait que $\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ ont même loi et en utilisant $P(X_i = a) = P(X_j = a)$).

$$\text{Conclusion: } P\left(Y_{m+n} \geq x\right) \geq P\left(Y_m \geq x\right) P\left(Y_n \geq x\right)$$

12) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Premier cas : $P(X_1 \geq x) = 0$, dans ce cas, $P(X_1 < x) = 1$ et donc avec le **10)**, pour tout entier

$$n \geq 1 : P(Y_n < x) = 1, \text{ donc } P(Y_n \geq x) = 0. \quad \text{Conclusion: } \left((P(Y_n \geq x))^{\frac{1}{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0$$

Deuxième cas : $P(X_1 \geq x) > 0$, dans ce cas, avec le **10)**, pour tout entier $n \geq 1 : P(Y_n \geq x) > 0$.

On peut donc poser $u_n = -\ln(P(Y_n \geq x))$ pour tout entier $n \geq 1$. De l'inégalité de la question précédente, on en déduit que pour tous m, n dans $\mathbb{N}^* : u_{m+n} \leq u_m + u_n$. Enfin par définition d'une probabilité, $u_n \geq 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

On applique le **9)** : la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers un réel ℓ . On en déduit par critère séquentiel que $\frac{u_n}{n}$ converge vers un réel e^ℓ . Or $e^{\frac{u_n}{n}} = \frac{1}{P(Y_n \geq x)^{\frac{1}{n}}}$

$$\text{Conclusion: } \left((P(Y_n \geq x))^{\frac{1}{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } e^{-\ell}$$

13) Amorce :

Si $s = 1$ alors il n'y a qu'une seule pile qui contient de bas en haut $(a_1, a_2, \dots, a_r)$. Soit un jeton

$a_j = z$, la suite à un élément $b = (a_j)$ est bien :

• décroissante de longueur $s = 1$,

- le jeton n°1 de valeur $b_1 = a_j = z$ est dans l'unique pile n°1 ,
- $b_1 = a_j = z$.

(Pas obligatoire, mais utile pour comprendre rapidement ce qui se passe :

Si $s = 2$ alors il y a deux piles qui contiennent $(a_1, a_2, \dots, a_r)$.

Soit un jeton $a_j = z$ de la deuxième pile. Si on a posé ce j -ième jeton sur la deuxième pile, c'est qu'il y avait sur le sommet de la première pile, à ce moment là, un élément a_k avec $k < j$ et $a_j \leq a_k$.

Posons $b = (a_k, a_j)$ c'est bien une suite décroissante de longueur 2, pour $i = 1$ le jeton de valeur $b_1 = a_k$ est dans la pile 1 , pour $i = 2$ le jeton de valeur $b_2 = a_j$ est dans la pile 2 et $b_2 = z$.)

Hérédité

Supposons le résultat vraie pour s et soit une répartition des jetons qui donne $s + 1$ piles. Soit un jeton de la $s + 1$ -ième pile de valeur $z = a_j$. Comme pour $s = 2$, si on a posé ce j -ième jeton sur cette $s + 1$ -ième pile, c'est qu'il y avait sur le sommet de la s -ième pile, à ce moment là, un élément $z' = a_k$ avec $k < j$ et $a_j \leq a_k$.

On applique pour z' l'hypothèse de récurrence :

il existe une liste $b = (b_1, \dots, b_s)$ décroissante de longueur s , pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$ le jeton n° i de valeur b_i est dans la i -ième pile et $b_s = z'$

La suite $b' = (b_1, \dots, b_s, z)$ possède alors toutes les propriétés demandées car $k < j \implies a_j \leq a_k$ et $b_{s+1} = z$. Conclusion: On a le résultat demandé pour tout $s \in \mathbb{N}^*$

14) On range donc les $pq + 1$ éléments de la suite a selon le procédé de l'énoncé. Soit s le nombre de piles que cela a crée.

Premier cas : $s \geq q + 1$

Dans ce cas avec le **13)**, il existe une suite $b = (b_1, \dots, b_s)$ extraite de la liste a et décroissante. La liste $b = (b_1, \dots, b_{q+1})$ est extraite de la liste a , elle est décroissante et de longueur $q + 1$.

Deuxième cas : $s \leq q$

Dans ce cas , montrons qu'il y a au moins une pile qui contient au moins $p + 1$ éléments. Si les s

pires avaient toutes un nombre inférieur ou égal à p alors les s piles auraient un nombre inférieur ou égal à $ps \leq pq < pq + 1$: **absurde**. Il existe une pile qui contient au moins $p + 1$ éléments. Notons $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{p+1}}, \dots, a_{i_t})$ cette pile.

On a alors $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{p+1}})$ qui est extraite de la liste a , elle est strictement croissante et de longueur $p + 1$. Conclusion:

La liste a admet au moins une liste extraite croissante de longueur $p + 1$ ou une liste extraite décroissante de longueur $q + 1$.

Remarque : le principe du deuxième cas s'appelle le principe des tiroirs : s'il y a 5 tiroirs et 6 chapeaux à ranger, il y aura au moins un tiroir qui recevra deux chapeaux.

15) Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, si $\omega \in (A_1 = i) \cap (A_2 = i)$, alors $B(\omega)(1) = B(\omega)(2) = i$: impossible car $B(\omega)$ est une bijection. Donc $(A_1 = i) \cap (A_2 = i) = \emptyset$ et $P((A_1 = i) \cap (A_2 = i)) = 0$.

Or $P(A_1 = i) = \sum_{\sigma \in S_n} P(A_1 = i / B = \sigma) \cdot P(B = \sigma)$ (c'est la F.P.T.), donc $P(A_1 = i) = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n} \frac{1}{n!}$
d'où $P(A_1 = i) = P(A_2 = i) = \frac{1}{n} \neq 0$.

On ne peut donc avoir $P(A_1 = i) \cdot P(A_2 = i) = P((A_1 = i) \cap (A_2 = i))$

Conclusion: $A_1, \dots, A_n$ ne sont pas mutuellement indépendantes

16) Erreur d'énoncé : il faut que la liste s soit strictement croissante (par exemple si $k = 3$ et $s = (1, 1, 1)$ alors $P(A^s) = 1 \neq \frac{1}{6}$).

Soient donc $k \in \{1, \dots, n\}$ et $s = (s_1, \dots, s_k)$ telle que $s_1 < \dots < s_k$.

Posons $\mathcal{S}_{n,s}$ l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$, telle que $\sigma(s_1) < \dots < \sigma(s_k)$.

Montrons que $A^s = (B \in \mathcal{S}_{n,s})$:

$$\omega \in A^s \iff B(\omega)(s_1) < B(\omega)(s_2) < \dots < B(\omega)(s_k) \iff B(\omega) \in \mathcal{S}_{n,s} \iff \omega \in (B \in \mathcal{S}_{n,s})$$

Puisque B suit une loi uniforme, on a : $P(A^s) = P(B \in \mathcal{S}_{n,s}) = \frac{|\mathcal{S}_{n,s}|}{|S_n|}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & s_1 & \dots & s_2 & \dots & s_k & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(s_1) & \dots & \sigma(s_2) & \dots & \sigma(s_k) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Pour déterminer une permutation de $\mathcal{S}_{n,s}$, on commence par choisir les k images de $s_1, \dots, s_k$:

$s'_1, \dots, s'_k$. Cela revient donc à choisir une suite strictement croissante $1 \leq s'_1 < \dots < s'_k \leq n$. Ce

nombre de possibilités est $\binom{n}{k}$. Il reste ensuite $n - k$ éléments (ce sont les éléments de l'ensemble : $\{1, \dots, n\} - \{s'_1, \dots, s'_k\}$) à placer sur la deuxième ligne de σ : il y a donc $(n - k)!$ possibilités de les placer.

On en déduit que $|\mathcal{S}_{n,s}| = \binom{n}{k} (n - k)!$ Conclusion:
$$P(A^s) = \frac{|\mathcal{S}_{n,s}|}{|S_n|} = \frac{\binom{n}{k} (n - k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$$

17) • Posons $\mathcal{C}_{n,\ell}$ l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$, telle que la plus longue liste croissante extraite de $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ soit de longueur ℓ .

Posons $\mathcal{D}_{n,\ell}$ l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$, telle que la plus longue liste décroissante extraite de $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ soit de longueur ℓ .

Montrons que $\mathcal{C}_{n,\ell}$ et $\mathcal{D}_{n,\ell}$ ont même cardinaux. Pour cela considérons l'application Φ de S_n dans S_n qui à une permutation σ associe la permutation σ' définie par $\sigma'(k) = n + 1 - \sigma(k)$. Il est clair que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $n + 1 - \sigma(k) \in \{1, \dots, n\}$ et que si $\Phi(\sigma_1) = \Phi(\sigma_2)$ alors $\sigma_1 = \sigma_2$. On en déduit que Φ est injective et comme S_n est de cardinal fini, Φ est bijective.

Enfin si $\sigma \in S_n$ et σ possède une liste croissante extraite de $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ de longueur ℓ , alors $\Phi(\sigma) \in S_n$ et $\Phi(\sigma)$ possède une liste décroissante extraite de $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ de longueur ℓ . On déduit que $\Phi(\mathcal{C}_{n,\ell}) = \mathcal{D}_{n,\ell}$ et donc que $\mathcal{C}_{n,\ell}$ et $\mathcal{D}_{n,\ell}$ ont même cardinaux.

On a donc $P(B \in \mathcal{C}_{n,\ell}) = \frac{|\mathcal{C}_{n,\ell}|}{n!} = \frac{|\mathcal{D}_{n,\ell}|}{n!} = P(B \in \mathcal{D}_{n,\ell})$.

D'autre part, par double inclusion, on a : $(C_n = \ell) = (B \in \mathcal{C}_{n,\ell})$ et $(D_n = \ell) = (B \in \mathcal{D}_{n,\ell})$.

Conclusion:
$$\forall \ell \in \{1, \dots, n\} : P(C_n = \ell) = P(D_n = \ell) \text{ et donc } C_n \text{ et } D_n \text{ ont même loi}$$

• Il existe un entier $p \geq 1$ tel que $p^2 + 1 \leq n < (p + 1)^2 + 1$ ($p = \lfloor \sqrt{n - 1} \rfloor$).

On appliquant le **14)** à la suite formée par les $p^2 + 1$ premiers éléments, on a $C_n \geq p + 1$ ou $D_n \geq p + 1$. On a donc $C_n + D_n \geq p + 1 + 1$ (puisque l'une des deux valeurs est supérieure à $p + 1$ et l'autre est supérieure à 1), ce qui donne $E(C_n + D_n) = E(C_n) + E(D_n) \geq p + 2$

D'une part $p + 2 - \sqrt{n} = \frac{(p + 2)^2 - n}{p + 2 + \sqrt{n}} \geq \frac{(p + 1)^2 + 1 + 2(p + 1) - n}{p + 2 + \sqrt{n}} > 0$ d'où $p + 2 \geq \sqrt{n}$.

D'autre part C_n et D_n ont la même loi, donc $E(C_n) = E(D_n)$.

On a donc $2E(C_n) \geq p + 2 > \sqrt{n}$. Conclusion:
$$E(C_n) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$$

18) On a $(C_n \geq k) \subset \bigcup_{s \in T} A^s$ où T est l'ensemble des suites strictement croissantes de $\{1, \dots, n\}$

et de longueur k

Appliquons l'inégalité de Boole : $P(C_n \geq k) \leq P\left(\bigcup_{s \in T} A^s\right) \leq \sum_{s \in T} P(A^s) = \sum_{s \in T} \frac{1}{k!}$ et comme $|T| = \binom{n}{k}$, on a l'inégalité demandée. Conclusion: $P(C_n \geq k) \leq \frac{\binom{n}{k}}{k!}$

19) • Posons $i = \lfloor -\alpha e \sqrt{n} \rfloor$, on a $i \leq -\alpha e \sqrt{n} \leq i + 1$ donc $-i - 1 < \alpha e \sqrt{n} \leq -i$. Posons $k = -i$, on a donc $k - 1 < \alpha e \sqrt{n} \leq k$ et comme $\alpha e \sqrt{n} > 1$, $-\alpha e \sqrt{n} < 1$ et donc $i \leq -2$

Conclusion: $k - 1 < \alpha e \sqrt{n} \leq k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

• On a $(C_n \geq \alpha e \sqrt{n}) \subset (C_n > k - 1) = (C_n \geq k)$ car C_n est à valeurs entières.

On a donc $P(C_n \geq \alpha e \sqrt{n}) \leq \frac{\binom{n}{k}}{k!} \leq \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!^2} \leq \frac{n^k}{k!^2} \leq n^k \left(\frac{e}{k}\right)^k = \left(\frac{e \sqrt{n}}{k}\right)^{2k}$

On en déduit donc que $P(C_n \geq \alpha e \sqrt{n}) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2k} \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e \sqrt{n}}$ car $2k \geq 2\alpha e \sqrt{n}$ et $\frac{1}{\alpha} < 1$.

Conclusion: $P(C_n \geq \alpha e \sqrt{n}) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e \sqrt{n}}$

20) • Utilisons le **1)** avec le k du **19)** avec $\alpha = 1 + \frac{1}{n^{1/4}} > 1$: $E(C_n) \leq k - 1 + nP(X \geq k)$.

On a vu au **19)** que $P(X \geq k) = P(C_n \geq \alpha e \sqrt{n}) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e \sqrt{n}}$ et $k - 1 < \alpha e \sqrt{n}$.

On a donc $\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{\alpha e \sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e \sqrt{n}} = \left(1 + \frac{1}{n^{1/4}}\right)e + \sqrt{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n^{1/4}}}\right)^{2(1 + \frac{1}{n^{1/4}})} \sqrt{n}$

Posons $\varepsilon_n = \sqrt{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n^{1/4}}}\right)^{2(1 + \frac{1}{n^{1/4}})} \sqrt{n}$

$\ln(\varepsilon_n) = \frac{1}{2} \ln n - 2(1 + \frac{1}{n^{1/4}}) \sqrt{n} \ln(1 + \frac{1}{n^{1/4}})$

Or $2(1 + \frac{1}{n^{1/4}}) \sqrt{n} \ln(1 + \frac{1}{n^{1/4}}) \sim \frac{2}{n^{1/4}}$ donc par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\varepsilon_n) = -\infty$ et donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$. Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leq \left(1 + \frac{1}{n^{1/4}}\right)e + \varepsilon_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$

• On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \frac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leq 2e + M$ où M est un majorant de la suite (ε_n) qui converge vers 0. La suite $\left(\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}}\right)$ est donc bornée.

Enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n^{1/4}}\right)e + \varepsilon_n\right) = e$.

On conclut avec le **5)** et **6)**. Conclusion: $\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{E(C_n)}{\sqrt{n}}$ existe et $\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leq e$

FIN