

**Question de cours :**

- Énoncer la continuité croissante.
- La formule des probabilités composées (version avec  $n$  événements  $A_1, \dots, A_n$ ).

**Exercice 1 : Contrôle de qualité d'une production**

Une usine possède deux machines  $A$  et  $B$  qui fabriquent des pièces identiques en apparence.

- La machine  $A$  fabrique 60 % des pièces et la machine  $B$  les 40 % restantes.
- 2 % des pièces fabriquées par  $A$  sont défectueuses.
- 5 % des pièces fabriquées par  $B$  sont défectueuses.

On prélève une pièce au hasard dans la production. On note  $A$ ,  $B$  et  $D$  les événements : « la pièce provient de  $A$  », « la pièce provient de  $B$  » et « la pièce est défectueuse ».

**Remarque importante :**

- Dans les parties I. et IV. de cet exercice, on donnera les probabilités demandées sous forme de **fraction irréductible** (par exemple  $\mathbf{P}(A) = \frac{13}{18}$  et non  $\frac{130}{180}$  ou  $\frac{26}{36}$ ).
- Dans les parties II. et III. de cet exercice, on donnera les probabilités demandées uniquement à l'aide de  $p$  et  $q$  (par exemple  $\mathbf{P}(A) = 27p^2 + q^3$ ).

**Partie I – Probabilités conditionnelles**

- Donner  $\mathbf{P}(A)$ ,  $\mathbf{P}(B)$ ,  $\mathbf{P}(D/A)$ .
- Calculer la probabilité qu'une pièce provienne de  $A$  et soit défectueuse.
- Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.
- Une pièce est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine  $B$ .
- Une pièce est non défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine  $A$ .

**Partie II – Contrôle de trois pièces**

On prélève maintenant successivement trois pièces, en assimilant ces prélèvements à des tirages indépendants dans la production. On note  $D_i$  l'événement « la  $i$ -ième pièce est défectueuse », pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ . On pose enfin  $p = \mathbf{P}(D)$  et  $q = \mathbf{P}(\overline{D})$ .

- Calculer la probabilité que les trois pièces soient défectueuses.
- Calculer la probabilité que la première pièce soit défectueuse et que les deux suivantes ne le soient pas.
- Calculer la probabilité qu'exactement une des trois pièces soit défectueuse.
- Calculer la probabilité qu'au moins une des trois pièces soit défectueuse.

**Partie III – Étude d'une variable aléatoire**

On note  $X$  le nombre de pièces défectueuses parmi  $n$  pièces prélevées avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Déterminer l'ensemble  $X(\Omega)$  des valeurs prises par  $X$ .

11. Déterminer  $\mathbf{P}(X = k)$  pour tout  $k \in X(\Omega)$ . En déduire la nature de la loi de  $X$ .
12. Calculer  $\mathbf{P}(X \leq 2)$ .
13. Sachant qu'au moins une pièce est défectueuse, calculer la probabilité que toutes les pièces soient défectueuses. On montrera que cette probabilité vaut  $\frac{p^n}{1 - q^n}$ .  
Commenter le résultat lorsque  $n$  devient très grand.

#### Partie IV – Un second contrôle

Un dispositif de contrôle détecte une pièce défectueuse avec une probabilité de 95 %. Cependant, il signale à tort une pièce non défectueuse comme défectueuse dans 3 % des cas.

On note  $C$  l'événement « le contrôle signale une pièce comme défectueuse ».

14. Donner  $\mathbf{P}(C/D)$  et  $\mathbf{P}(C/\overline{D})$ .
15. Calculer  $\mathbf{P}(C)$ .
16. Une pièce est signalée comme défectueuse par le dispositif. Calculer la probabilité qu'elle soit réellement défectueuse.
17. **Question à ne pas faire (admise)** : Le corrigé vous montrera à l'aide des valeurs numériques que les résultats (justes !) sont paradoxaux.  
Comparer  $\mathbf{P}(D)$  et  $\mathbf{P}_C(D)$ . Expliquer pourquoi le résultat obtenu n'est pas nécessairement proche de 95 %.

#### Exercice 2

Soit  $a$  un réel positif ou nul. On considère la suite  $\mathbf{u} = (u_n)_{n \geq 1}$  telle que  $u_1 = a$  et définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}}$$

- 1°. Montrer qu'il existe une unique valeur de  $a$  pour laquelle la suite  $\mathbf{u}$  est constante. Déterminer cette valeur.
- 2°. On suppose que la suite  $\mathbf{u}$  converge vers une limite finie  $\ell$ . Montrer que  $\ell = 0$ .
- 3°. On suppose que la suite  $\mathbf{u}$  vérifie la propriété :  $\forall n \geq 1, u_n \geq \sqrt{n}$ . Montrer que  $\mathbf{u}$  est une suite croissante qui tend vers  $+\infty$ .
- 4°. On suppose que la suite  $\mathbf{u}$  vérifie la propriété

$$(\#) : \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_k < \sqrt{k}.$$

- (a) Montrer que  $\forall n \geq k, u_n < \sqrt{n}$ .
- (b) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq k}$  est décroissante.
- (c) Que peut-on en déduire pour la suite  $\mathbf{u}$  ?

5°. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $a$  et de  $n$ , pour tout entier naturel  $n$ . **indication** : On partira de l'expression de  $u_n$  en fonction de  $u_{n-1}$  et  $\sqrt{n-1}$  puis on recommencera avec  $u_{n-1}$  en fonction de  $u_{n-2}$ ... jusqu'à  $u_1 = a$ .

6°. Dans cette question, on considère de plus la série de terme général  $w_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(n+1)$ .

(a) Montrer que cette série est convergente.

(b) Montrer que la suite  $\mathbf{u}$  est convergente si et seulement si il existe un entier  $k > 2$  tel que  $u_k < 1$ .

(c) En déduire que la suite  $\mathbf{u}$  est convergente si et seulement si  $a < \exp\left(\frac{W}{2}\right)$ , où  $W$  désigne la somme de la série de terme général  $w_n$ .

## PROBLÈME

**Notation** :  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$ , on note, si  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall n \geq n_0, P_n = \prod_{k=n_0}^n u_k$$

Si la suite  $(P_n)_{n \geq n_0}$  converge, on notera  $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$  sa limite et on dira que le produit  $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$  existe.

### I. Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

1. On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$ . Montrer que  $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$  existe (on montrera donc, conformément à la définition, que la suite  $(P_n)$  est convergente dans  $\mathbb{R}$ ).

2. Étudier l'existence et calculer si le produit existe de

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Pour chacun des 3 produit, on évaluera la valeur de  $P_n$  puis on passera à la limite.

3. (a) On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < 1$  et que la série  $\sum u_n$  converge absolument.

Montrer l'existence de  $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ .

(b) On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < 1$ , que la série  $\sum u_n$  est semi-convergente et la série  $\sum u_n^2$  est convergente.

Montrer l'existence de  $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ .

(c) On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < 1$ , que la série  $\sum u_n$  est semi-convergente et la série  $\sum u_n^2$  est divergente.

Montrer l'existence de  $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ .

(d) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que  $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$  existe et soit non nul.

(e) Calculer  $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$  et  $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$ .

## II. Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

1. Montrer que  $\prod_{n=2}^{+\infty} \left|1 + \frac{i}{n}\right|$  existe.

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $n$  nombres complexes  $z_1, \dots, z_n$ . Montrer par récurrence que

$$\left| \prod_{k=1}^n (1 + z_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |z_k|) - 1$$

3. (a) **Question difficile**

On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n| < 1$  et que la série  $\sum u_n$  converge absolument.

Montrer l'existence de  $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ .

[On pourra utiliser le critère de Cauchy :  $(x_n)$  converge dans  $\mathbb{C}$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall q > p \geq N : |x_q - x_p| \leq \varepsilon]$$

(b) On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n| = 1$  et  $u_n \neq -1$ .

On pose  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = e^{i\theta_n}$ ,  $-\pi < \theta_n < \pi$

Montrer que  $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$  existe si et seulement si la série  $\sum \theta_n$  converge.

4. Le produit  $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)$  existe-t-il ?