

COURS et EXERCICES : PROBABILITÉS (Tout sauf fonctions génératrices)**A) ESPACES PROBABILISÉS**

Axiomatique de Kolmogorov, Tribu, Système complet d'évènements, Lien entre le vocabulaire ensembliste et le vocabulaire probabiliste, Probabilité, Définition d'une probabilité à partir des singletons dans le cas fini ou dénombrable.

B) PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES PROBABILITÉS

Continuité croissante $\square$, continuité décroissante $\square$.

Première forme de la formule des probas totales, Inégalité de Boole (sous-additivité) $\square$.

Évènement presque sûr, propriété est vraie presque sûrement, évènement négligeable, réunion dénombrable d'évènements négligeables, intersection dénombrable d'évènements presque sûrs.

C) PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

Proba. conditionnelles, formule des probas composées $\square$, formules des probas totales $\square$, formules de Bayes.

Indépendance, indépendance d'une famille d'évènements.

Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n$ ($n \geq 1$), n évènements indépendants, si on note $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$, alors $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ sont des évènements indépendants $\square$.

D) VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Variable aléatoire discrète (VAD), Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

Notation : Si la VAD X a la même loi que la VAD Y , alors on note $X \sim Y$. On dit aussi que X et Y sont équidistribuées,

Fonction de répartition (HPTS) : positivité, croissance et limite en $\pm\infty$.

E) COUPLES DE VAD, VAD INDÉPENDANTES

Généralités, couple de variables aléatoires discrètes, Loi conjointe, Lois marginales,

$$\forall i \in I, \mathbf{P}(X = x_i) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j \in J} [(X = x_i) \cap (Y = y_j)]\right) = \sum_{j \in J} p_{i,j}$$

$$\text{et } \forall j \in J, \mathbf{P}(Y = y_j) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i \in I} [(X = x_i) \cap (Y = y_j)]\right) = \sum_{i \in I} p_{i,j}.$$

Loi conditionnelle, Extension aux n -uplets, vecteurs aléatoires discrets, Couple de variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux VAD indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des VAD indépendantes $\square$.

Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes

Lemme des coalitions : Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont des VAD indépendantes $\square$; généralisation à $p \geq 3$ coalitions.

F) LOIS USUELLES

Probabilité uniforme sur un ensemble fini, Loi de Bernoulli, Loi binomiale.

Soient $X_1, \dots, X_n$, n VAD indépendantes qui suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p , alors $S = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p $\square$.

Loi hypergéométrique (HPTS)

Loi géométrique (ou loi de Pascal)

HPTS : Loi sans mémoire ($P((X > n + k)/(X > n)) = P(X > k)$).

Loi de Poisson

Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson $\square$.

G) ESPÉRANCE

Espérance dans $\mathbb{R}^+$ d'une variable aléatoire positive Espérance finie d'une variable aléatoire réelle. Variable centrée.

Espérance des lois usuelles Espérance d'une fonction indicatrice - Espérance d'une fonction constante -

Formule de transfert $\square$ -

Linéarité $\square$ - Positivité et croissance - Soit Y , une VADR admettant une espérance finie et soit X , une VADR telle que $|X| \leq Y$, alors X admet une espérance finie et $|E(X)| \leq E(Y)$.

Inégalité de Markov $\square$ - Espérance d'un produit de VAD indépendantes.

Formule de l'antirépartition : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq n)$ $\square$.

H) VARIANCE, ÉCART-TYPE ET COVARIANCE

Moments - Moments d'ordre 2 - Cauchy-Schwarz - variance, écart-type - variable réduite - Propriétés

Formule de König-Huygens - $V(aX + b) = a^2 V(X)$ - Variance et écart-type des lois usuelles. Covariance de deux VADR-

Formule de König-Huygens - Cas de 2 VADR indépendantes - $Cov(aX + b, cY + d) = ac Cov(X, Y)$ - Variance d'une somme de VADR - Variance d'une somme de VADR indépendantes.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev $\square$

Théorème : Loi faible des grands nombres $\square$

Prévisions : Algèbre linéaire : EV - Matrices - Déterminants....