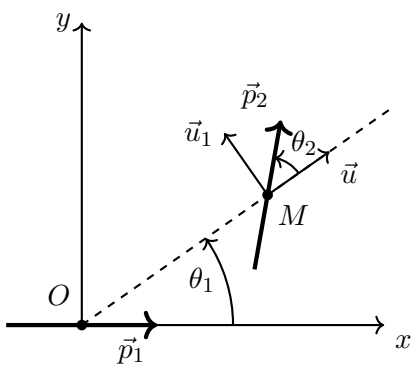
DM 5
Électromagnétisme

Exercice 1 : Interaction entre deux dipoles

Dans tout l'exercice, on envisage des situations dans un plan qui est ramené au repère (Oxy). On donne : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$.
Deux molécules (1) et (2) possèdent des moments dipolaires permanents notés $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$. La première est supposée fixe en O, son moment étant dirigé selon $\vec{u}_x$: $\vec{p}_1 = p_1\vec{u}_x$. La seconde molécule (2) est placée en un point M de coordonnées polaires (r, θ_1). On notera $(\vec{u},\, \vec{u}_1)$ la base polaire locale associée à M. On supposera dans toute la suite que $\theta_1 \in [0, \pi/2]$.
Dans la base $(\vec{u},\, \vec{u}_1)$, le champ électrique $\vec{E}_1(M)$ créé par $\vec{p}_1$ au point M s'écrit :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,(2\cos\theta_1\,\vec{u} + \sin\theta_1\,\vec{u}_1)$$



Q.1 Exprimer l'énergie potentielle électrique E_{p2} de la molécule (2) placée dans ce champ, à exprimer en fonction (entre autres) de θ_1 et θ_2.

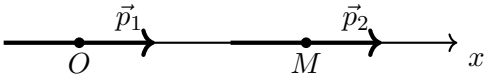
Q.2 On suppose dans cette question que $\vec{p}_2$ ne peut que pivoter autour de M, sans se déplacer. Déterminer l'angle d'équilibre θ_{2e} que fait $\vec{p}_2$ avec $\overrightarrow{OM}$. On montrera que : $2\tan\theta_{2e} = \tan\theta_1$.
Application numérique : calculer θ_{2e} pour $\theta_1 = 0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}$.

Q.3 Montrer que dans la configuration d'équilibre de la question précédente, $\vec{p}_2$ est aligné avec le champ électrique $\vec{E}_1(M)$.

On suppose maintenant que l'angle θ_2 est égal à sa valeur d'équilibre : $\theta_2 = \theta_{2e}$. On étudie l'évolution de l'énergie potentielle de la molécule (2) en fonction de sa position angulaire θ_1, en considérant que r reste constant.

Q.4 Montrer que E_{p2} peut se mettre sous la forme : $E_{p2} = -\dfrac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta_1}$. Pour quelle valeur θ_{1e} de θ_1 cette énergie est-elle minimale ?

Pour toute la suite, les deux molécules sont placées selon la figure suivante, la molécule (2) étant située en M de coordonnées $(x, 0)$.



Q.5 Quelle est la force $\vec{F}$ subie par $\vec{p}_2$? La mettre sous la forme $\vec{F} = -\dfrac{K}{x^4}\vec{u}_x$ et déterminer l'expression de K en fonction de p_1, p_2 et ε_0. Est-elle attractive ou répulsive ?
Application numérique : deux molécules d'eau de moments dipolaires $p_1 = p_2 = 1{,}85\,\mathrm{D}$ sont distantes de 300 pm. Calculer $\|\vec{F}\|$. On rappelle que $1\,\mathrm{D} = 0{,}33 \times 10^{-29}\,\mathrm{C \cdot m}$.

On s'intéresse finalement au cas où la molécule (1) possède un moment dipolaire permanent $\vec{p}_1$ et la molécule (2) n'en possède pas. Sous l'influence du champ électrique $\vec{E}_1$ créé par (1), elle peut acquérir un moment dipolaire induit de la forme $\vec{p}_2 = \alpha_2\varepsilon_0\vec{E}_1$. Le coefficient positif α_2 est la polarisabilité de la molécule (2). Les deux molécules sont alors dans la situation de la figure précédente.

Q.6 Montrer que la force subie par la molécule (2) peut se mettre sous la forme : $\vec{F} = -\dfrac{K'}{x^7}\vec{u}_x$ en exprimant K' en fonction de p_1, ε_0 et α_2. Cette force est appelée force de Van Der Waals.

Exercice 2 : Création de champs magnétiques intenses

L'imagerie médicale a besoin de champ magnétique intense, permanent et uniforme. On se propose ici de dimensionner une bobine dans laquelle règne un champ magnétique de 2 T.
On rappelle que la résistance électrique R d'un conducteur de conductivité électrique γ, de section S et de longueur L est donnée par $R = \dfrac{L}{\gamma S}$.

I – Création d'un champ magnétique intense à l'aide d'un solénoïde

I.A Caractéristiques de la bobine à température ambiante

On suppose pour le moment que la bobine est maintenue à température ambiante $T = 300\,\text{K}$. La bobine (FIGURE 1) est assimilée à un solénoïde d'axe (Oz), de longueur L, de rayon R_{moy} avec $R_{moy} \ll L$. Les effets de bords sont négligés, le solénoïde est donc considéré comme infini. Il est constitué de spires jointives d'un fil de cuivre de diamètre d et de conductivité électrique γ_{Cu}. Chaque spire est parcourue par un courant I. Il comporte p couches de bobinage superposées.

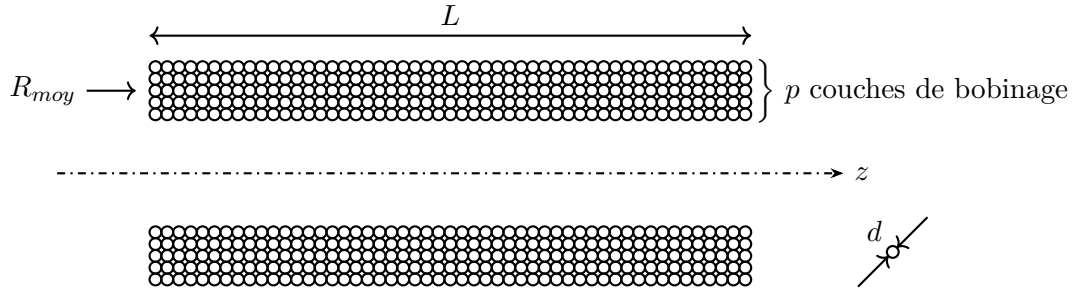


FIGURE 1 – Bobine comportant plusieures couches de bobinage

Q.1 Sur une seule couche de bobinage, combien y-a-t-il de spires jointives par unité de longueur de solénoïde ? En déduire le nombre de spires par unité de longueur, noté n, que comporte ce solénoïde.

Q.2 Déterminer soigneusement, en fonction de d, p, I et μ_0, l'expression du champ magnétique créé à l'intérieur du solénoïde. Calculer le nombre de bobinage p nécessaire pour avoir $B = 2{,}0\,\text{T}$ avec $d = 3{,}0\,\text{mm}$ et $I = 35\,\text{A}$.

Q.3 En assimilant le rayon de chaque spire au rayon moyen R_{moy}, exprimer la longueur de fil L_{fil} nécessaire à la réalisation de cette bobine en fonction de R_{moy}, d, p et L. Evaluer L_{fil} avec $L = 1{,}8\,\text{m}$ et $R_{moy} = 50\,\text{cm}$.

Q.4 Exprimer la résistance électrique R_{elec} de la bobine en fonction de γ_{Cu}, de L_{fil} et de d. Évaluer alors la puissance P_J, dissipée par effet Joule dans la bobine. Commenter.

I.B Caractéristiques de la bobine refroidie

Pour diminuer la puissance dissipée, on peut envisager de refroidir le conducteur en cuivre par l'intermédiaire d'un bain d'azote liquide. On peut alors imposer dans un conducteur de cuivre de même diamètre $d = 3\,\text{mm}$, un courant plus important $I' = 80\,\text{A}$. On réduit ainsi le nombre de spire de la bobine et donc sa résistance électrique ainsi que son rayon moyen. On suppose donc maintenant que la bobine est maintenue à la température de 77 K.

Q.5 Quel est alors le nombre de couches de bobinage p' à superposer pour obtenir un champ magnétique de 2 T ? En assimilant la rayon de chaque spire au nouveau rayon moyen $R'_{moy} = 40\,\text{cm}$, évaluer la nouvelle puissance P'_J dissipée par effet Joule dans la bobine.

Compte-tenu du coût de la réfrigération à 77 K, il faut tenir compte de l'efficacité de la machine thermique assurant le maintien de cette basse température. La machine frigorifique en question fonctionne de manière réversible entre une source chaude T_c et une source froide T_f par l'intermédiaire d'un fluide caloporteur.

Q.6 Exprimer l'efficacité η_r de cette machine en fonction de T_f et T_c. Effectuer l'application numérique avec $T_f = 77\,\text{K}$ et $T_c = 300\,\text{K}$.

Q.7 Évaluer alors la puissance minimale P' à apporter à la machine frigorifique pour absorber la puissance P'_J dissipée dans la bobine en cuivre refroidi. Commenter.

II – Puissance dissipée dans le supraconducteur lors des régimes transitoires

L'utilisation des supraconducteur permet d'éliminer les pertes par effet Joule mais si les supraconducteurs sont dépourvus de pertes en régime continu, il n'en est pas de même en régime variable. Pour les bobines alimentées en régime continu, ces pertes ont lieu lors des deux régimes transitoires qui correspondent en début d'utilisation de la bobine à l'installation du courant dans le conducteur, puis en fin d'utilisation de la bobine, lors de la redescente à zéro de ce courant.

On se propose ici de déterminer l'ordre de grandeur de la puissance dissipée par unité de longueur du conducteur lors de la première montée de courant, dans une situation dite de champ propre, c'est-à-dire lorsqu'une portion de conducteur est soumise aux variations temporelles du champ magnétique qu'il crée sur lui-même. On assimile le supraconducteur (Figure 2 (gauche)) à un fil rectiligne infini suivant l'axe (Oz), de rayon R. On adopte les coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

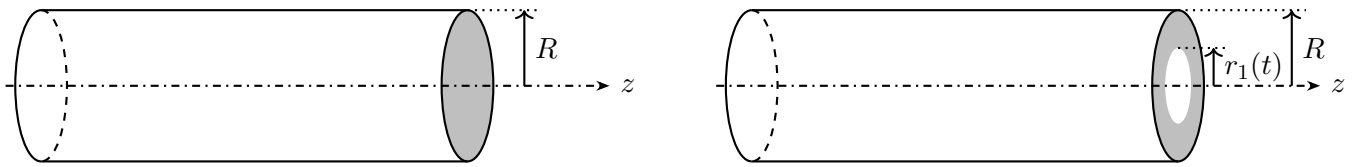


Figure 2 – Supraconducteur (gauche) et répartition du courant dans le supraconducteur (droite)

Compte–tenu des invariances du problème, la densité volumique de courant dans le supraconducteur, notée $\vec{j}_e$, ne dépend que de r et est portée par le vecteur $\vec{e}_z$: $\vec{j}_e = j_e(r)\vec{e}_z$. Pour un courant de transport I donné, la densité de courant n'est pas uniforme dans le supraconducteur, son amplitude vaut soit $\pm j_0$ soit 0, avec j_0 une constante.

Q.8 Déterminer en fonction de j_0 et de R, la valeur maximale I_c, dite valeur critique du courant de transport de ce conducteur.

On ne s'intéresse ici qu'à la première montée du courant $I(t)$ dans le supraconducteur. On suppose que cette première montée s'effectue pendant une durée T, suivant une consigne en rampe de sorte que : $I(t) = I_0 \dfrac{t}{T}$ avec I_0 la valeur finale du courant dans le supraconducteur.

Ce courant se distribue de façon à protéger le centre du supraconducteur de toute variation de champ magnétique, de sorte qu'il se répartit, à un instant t de cette première étape, à la périphérie du supraconducteur dans la zone : $r_1(t) < r < R$ (Figure 2 (droite)) :

$$j_e(r,t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad r < r_1(t) \\ j_0 & \text{pour} \quad r > r_1(t) \end{cases}$$

Q.9 On définit par $u = \dfrac{I_0}{I_c}$ le taux d'utilisation du supraconducteur. Exprimer u en fonction de j_0, R et I_0.

Q.10 Déterminer la relation qui existe entre $I(t)$, j_0, $r_1(t)$ et R. En déduire l'expression de $r_1(t)$ en fonction de R, u, T et t. Exprimer alors $r_1(T)$ en fonction de u et R.

Q.11 À l'aide des propriétés de symétries et d'invariance, préciser de quelle(s) variable(s) de l'espace dépend le champ magnétique $\vec{B}$ dans le supraconducteur et par quel(s) vecteur(s) de base il est porté.

Q.12 Par application du théorème d'Ampère, dans l'approximations des régimes quasi-stationnaires, sur un contour que l'on précisera, déterminer à l'instant t le champ magnétique dans la zone $0 < r < r_1(t)$. De même, déterminer en fonction de μ_0, j_0 et $r_1(t)$, le champ magnétique dans la zone $r_1(t) < r < R$. Tracer l'allure de $\|\vec{B}\|$ en fonction de r à un instant t, pour $0 < r < R$.

On donne, en régime variable, l'équation différentielle reliant le champ électrique $\vec{E}$ au champ magnétique $\vec{B}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

appelée équation de Maxwell-Faraday. On admettra que toute contribution du champ électrique qui ne dépend que de l'espace ou que du temps sera assimilée à la fonction nulle.

Q.13 Que vaut le champ électrique pour $r < r_1(t)$? En remarquant que le champ électrique est continu en $r_1(t)$ et qu'il peut s'écrire sous la forme $\vec{E} = E(r,t)\vec{e}_z$, montrer que

$$E(r,t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi T} \ln\left(\frac{r}{r_1(t)}\right)$$

pour $r_1(t) < r < R$.

Dans un milieu conducteur, la densité volumique locale et instantanée de puissance dissipée par effet Joule est donnée par $p_v(r,t) = \vec{j}(r,t) \cdot \vec{E}(r,t)$.

Q.14 Donner l'expression de cette densité volumique de puissance dissipée dans le supraconducteur dans les zones $r < r_1(t)$ et $r_1(t) < r < R$.

Q.15 Par intégration sur l'espace, en déduire, en fonction de μ_0, I_0, T, L_{supra}, u et t, l'expression de la puissance $P(t)$ dissipée dans une longueur L_{supra} de supraconducteur à l'instant t lors de la première montée de courant.

Q.16 Par intégration sur le temps, déterminer l'énergie Q dissipée lors de la première montée du courant dans le supraconducteur. Est-il utile d'augmenter la durée T d'établissement de ce courant pour réduire l'énergie dissipée dans le supraconducteur ?

Q.17 La machine frigorifique qui assure le refroidissement du supraconducteur à 4,2 K a une efficacité de $1{,}5 \times 10^{-3}$. On donne $I_0 = 445\,\text{A}$, $L_{supra} = 14\,\text{km}$ et $u = 0{,}7$. Évaluer l'énergie consommée Q_r par le réfrigérateur devant absorber l'énergie Q dissipée lors de cette première montée de courant. Commenter.