SPE MP ····· 2026-2027 | **PROGRAMME DE COLLE 9**

Cours (les 2 derniers piliers de la réduction) : MATRICES - DÉTERMINANTS

MATRICES

Matrice d'une application linéaire - d'un endomorphisme
Formules de changement de base : $X = PX'$, $A = PDP^{-1}$ et $A = QDP^{-1}$
Matrice inversible. Les étudiants doivent savoir calculer l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot.
Matrices équivalentes et leurs caractérisation avec la matrice J_r, Matrices semblables.
Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.
- Trace d'un projecteur : $\mathrm{rg}(p)$.

Opérations élémentaires (sur les lignes et les colonnes)

GROUPE SYMÉTRIQUE ET DÉTERMINANTS

Définition du groupe symétrique,
- Théorème de décomposition en produit de cycles, de transposition.

Signature et groupe alterné.
Définition de forme n-linéaire alternée et antisymétrique.
- Équivalence alternée $\Longleftrightarrow$ antisymétrique.
- (pour les plus fort) **Théorème fondamental de structure des forme n-linéaire alternée en dimension n.**

  Soit $b = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (donc de dimension n).
  Il existe une unique forme n-linéaire alternée φ_0 de E^n dans $\mathbb{K}$ telle que : $\varphi_0(e_1, \ldots, e_n) = 1$.
  $\forall f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
  $\boxed{f = \lambda\ \varphi_0}$ et $\boxed{\lambda = f(e_1, e_2, \ldots, e_n)}$. φ_0 est notée $\boxed{\det_b}$.
  $\det_b(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s'appelle le **<u>déterminant</u>** de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base $b = (e_1, \ldots, e_n)$.
  En d'autre terme l'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur E est de dimension $\boxed{1}$.

Définition du déterminant d'un endomorphisme et d'une matrice .
- Formule de changement de base.
- **Théorème fondamental de la liberté.**

Propriétés telle que $\det f \circ g = \det f \det g$...
Calcul pratique fondé sur la méthode du pivot de Gauss (on fait apparaitre des 0 et du développement selon une ligne ou une colonne).
<u>Applications</u> :
- Formules de Cramer pour un système de n équations à n inconnues.

Mineur - cofacteur - comatrice - formule fondamentale :
- $A \cdot \mathrm{com(A)}^{\mathrm{T}} = \mathrm{com(A)}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A} = (\det \mathrm{A})\mathrm{I_n}$ - expression de l'inverse d'une matrice
- Déterminants de Van der Monde (résultats et démonstration à connaitre)

Équation cartésienne de sous-espace vectoriel, de sous-espace affine.
Caractérisation du rang avec les matrices extraites carrées.
Matrices par blocs - Déterminants par blocs.
Matrice de transvections $T_{i,j}(\lambda)$. Lien avec les opérations élémentaires.
Théorème : Toute matrice de $SL_n(\mathbb{K})$ se décompose en produit de transvections.
Matrice de transvections par bloc.
(multiplication à gauche ou à droite par une matrice transvections par bloc de la forme : $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ T & I_q \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} I_p & T \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$)
pour faire apparaitre des blocs de 0.

<u>Prévisions</u> : Réductions des endomorphismes et des matrices.