MP DS n°5* 26-27

Exercice 1

Dans tout cet exercice, λ désignera un réel strictement positif, et X une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

1. (a) Montrer que la variable aléatoire réelle discrète $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.

   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

2. Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(X \geqslant i) \leqslant \dfrac{\lambda^2+\lambda}{i^2}$.

   Que peut-on en déduire pour la série de terme général $\mathbf{P}(X \geqslant i)$ où $i \in \mathbb{N}^*$?

3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite $(u_{i,k})_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ u_{i,k} = \frac{\lambda^i}{(k+1)(k+2)\dots(k+i)}$$

   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1} u_{i,k}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_{n,k} = \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} u_{i,k}$.

   (b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante K que l'on précisera telle que pour tout entier $k \geqslant K$, on a : $R_{n,k} \leqslant \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{k^i}$.

4. (a) Montrer que pour tout entier $k > \lambda$, $\mathbf{P}(X \geqslant k) \leqslant \dfrac{k}{k-\lambda}\mathbf{P}(X=k)$.

   Puis montrer que pour tout entier $k \geqslant 2\lambda$, $\mathbf{P}(X > k) \leqslant \mathbf{P}(X=k)$.

   (b) Dans cette question et uniquement cette question, on suppose que $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   Montrer à l'aide des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{i=2}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant i) \leqslant 1$.

   (c) Dans le cas général, que vaut $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant i)$? Le justifier.

5. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,\ 1\}$. Dans cette question, on considère Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

   (a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1-t \leqslant \mathbf{e}^{-t}$.

   (b) Montrer que : $\forall k \in \{0,\ 1, \dots,\ n\},\ \dbinom{n}{k} \leqslant \dfrac{n^k}{k!}\mathbf{e}^{-\alpha(n,k)}$ où $\alpha(n,k) = \dfrac{(k-1)k}{2n}$.

   (c) Montrer que : $\forall k \in \{0,\ 1, \dots,\ n\},\ \mathbf{P}(Y=k) \leqslant \dfrac{\mathbf{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\mathbf{e}^{\beta(n,k,\lambda)}$ où $\beta(n,k,\lambda) = \dfrac{k(2\lambda+1-k)}{2n}$.

(d) Quelle majoration de $\mathbf{P}(Y = k)$ peut-on obtenir pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2\lambda + 1$?

(e) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2\lambda + 1$: $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} \mathbf{P}(Y = j) \leqslant \frac{\mathbf{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

Exercice 2

L'objet de l'exercice est d'étudier l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Soit X et Y deux telles variables aléatoires. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $p_k = \mathbf{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbf{P}(Y = k)$. On définit la distance entre X et Y par : $d(X, Y) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |p_k - q_k|$

a) Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, on a :

$|\mathbf{P}(X \in \overline{A}) - \mathbf{P}(Y \in \overline{A})| = |\mathbf{P}(X \in A) - \mathbf{P}(Y \in A)|$.

b) Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, on a : $|\mathbf{P}(X \in A) - \mathbf{P}(Y \in A)| \leqslant d(X, Y)$.

c) Démontrer la formule : $d(X, Y) = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \min(p_k, q_k)$.

d) En déduire $d(X, Y) \leqslant \mathbf{P}(X \neq Y)$.

2. a) Vérifier que pour tout $x \in [0, 1]$, le réel $f(x) = 1 - (1 - x)e^x$ appartient à $[0, 1]$.

Soit $U_1, \ldots, U_n, Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\dfrac{\lambda}{n} \leqslant 1$. On suppose que , pour $1 \leqslant i \leqslant n$, U_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $f(\dfrac{\lambda}{n})$ et Y_i suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$. On pose $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Enfin, pour $i \in [\![1, n]\!]$, on considère la variable de Bernoulli X_i telle que $X_i = 0$ si $U_i = Y_i = 0$ et $X_i = 1$ sinon.

b) Déterminer pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la loi de X_i. Montrer que $(X_1, \ldots, X_n)$ sont indépendantes. En déduire celle de $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

c) On admet que la somme de 2 variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre α et β (respectivement) suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha + \beta$.

Quelle est la loi de Y ?

d) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\mathbf{P}(X_i \neq Y_i) \leqslant \dfrac{\lambda^2}{n^2}$.

e) En déduire *l'inégalité de Le Cam* : $d(X, Y) \leqslant \dfrac{\lambda^2}{n}$.

Problème

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout ce problème, n est un entier au moins égal à 1. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients complexes.

On identifiera une matrice colonne X (un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) et le vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont les composantes dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ sont les coefficients de la matrice X.

On dira que X est une colonne propre pour la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $MX = \lambda X$.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ l'endomorphisme canoniquement associé de $\mathbb{C}^n$: $\overline{M}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. **On a donc $M_{b_0}(\overline{M}) = M$, avec b_0 base canonique de $\mathbb{C}^n$.**

Par ailleurs, $E_\lambda(\overline{M})$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ de l'endomorphisme $\overline{M}$.

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients $(m_{ij}, i, j = 1, \ldots, n)$ et pour $k = 0, \ldots, n-1$, on appelle k-ième diagonale supérieure de M, notée $D_k(M)$, l'ensemble des coefficients $(m_{i,i+k}, i = 1, \ldots, n-k)$. Une diagonale supérieure $D_k(M)$ est dite nulle lorsque tous ses éléments sont nuls.

Si V et W sont deux espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$, on note p_V la projection sur V parallèlement à W : pour $x = x_V + x_W$ avec $x_V \in V$ et $x_W \in W$, $p_V(x) = x_V$. Pour un endomorphisme u de $\mathbb{C}^n$, on note u_V sa restriction à V.

De sorte que si i_V représente l'injection canonique de V dans $\mathbb{C}^n$, $u_V(y) = u(i_V(y))$ pour tout y de V.

I Algèbres de Lie

On appelle crochet de Lie de deux éléments X et Y de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice, notée $[X, Y]$, définie par

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Définition 1 *Soit $\mathcal{U}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $[\mathcal{U}]$ l'espace vectoriel engendré par les crochets de Lie $[X, Y]$ lorsque X et Y décrivent $\mathcal{U}$. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie lorsque*

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{U}.$$

Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux algèbres de Lie qui vérifient

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}.$$

On souhaite prouver le théorème suivant.

Théorème 1 *Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est une colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$ et si A est une matrice dans $\mathcal{U}$ alors AX est soit la matrice nulle, soit une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$. De plus, si pour $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda X$ alors $M(AX) = \lambda(AX)$.*

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$, et soit A une matrice de $\mathcal{U}$.

☐ 1 - Établir l'existence d'une forme linéaire λ sur $\mathcal{V}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda(M)X$.

☐ 2 - Montrer que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $[M, A]$ appartient à $\mathcal{V}$.

On considère la suite de matrices colonnes $(X_k, k \geq 0)$ définie par

$$X_0 = X,\ X_{k+1} = AX_k,\ \text{pour tout } k \geq 0.$$

Pour $M \in \mathcal{V}$, on considère la suite de nombres complexes $(\lambda_k(M), k \geq 0)$ définie par

$$\begin{aligned} \lambda_0(M) &= \lambda(M) \\ \lambda_{k+1}(M) &= \lambda_k([M, A]),\ \text{pour tout } k \geq 0. \end{aligned}$$

☐ 3 - Démontrer, pour tout entier $i \geq 0$ et pour tout $M \in \mathcal{V}$, les identités suivantes :

$$MX_i = \sum_{j=0}^{i} \left(\begin{array}{c} i \\ j \end{array} \right) \lambda_{i-j}(M) X_j \tag{1}$$

$$[M, A]\, X_i = \sum_{j=0}^{i} \left(\begin{array}{c} i \\ j \end{array} \right) \lambda_{i-j+1}(M) X_j. \tag{2}$$

☐ 4 - On identifie dorénavant matrices colonnes et vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Démontrer qu'il existe un plus grand entier q tel que la famille de vecteurs $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_q\}$ soit libre.

On note G l'espace vectoriel engendré par la famille $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_q\}$.

☐ 5 - Montrer que $\overline{M_G}$, $\overline{A_G}$ et $\overline{[M, A]}_G$ sont des endomorphismes de G.

☐ 6 - Calculer la trace de $\overline{[M, A]}_G$.

☐ 7 - Quelle est la matrice de $\overline{[M, A]}_G$ dans la base $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_q\}$?

☐ 8 - Pour $M \in \mathcal{V}$, que vaut $\lambda([M, A])$?

☐ 9 - Établir le théorème 1.