MP DS n°5 26-27

Exercice 1

Dans tout cet exercice, λ désignera un réel strictement positif, et X une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ, c'est-à-dire telle que : $\forall j \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X = j) = \dfrac{\lambda^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

1. (a) Montrer que la variable aléatoire réelle discrète $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.

   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

2. Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(X \geqslant i) \leqslant \dfrac{\lambda^2 + \lambda}{i^2}$.

   Que peut-on en déduire pour la série de terme général $\mathbf{P}(X \geqslant i)$ où $i \in \mathbb{N}^*$?

3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite $(u_{i,k})_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ u_{i,k} = \frac{\lambda^i}{(k+1)(k+2)\dots(k+i)}$$

   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1} u_{i,k}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_{n,k} = \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} u_{i,k}$.

   (b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante K que l'on précisera telle que pour tout entier $k \geqslant K$, on a : $R_{n,k} \leqslant \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{k^i}$.

4. (a) Montrer que pour tout entier $k > \lambda$, $\mathbf{P}(X \geqslant k) \leqslant \dfrac{k}{k-\lambda}\mathbf{P}(X = k)$.

   Puis montrer que pour tout entier $k \geqslant 2\lambda$, $\mathbf{P}(X > k) \leqslant \mathbf{P}(X = k)$.

   (b) Dans cette question et uniquement cette question, on suppose que $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   Montrer à l'aide des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{i=2}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant i) \leqslant 1$.

   (c) Dans le cas général, que vaut $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant i)$? Le justifier.

5. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,\ 1\}$. Dans cette question, on considère Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

   (a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - t \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

(b) Montrer que : $\forall k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\},\ \binom{n}{k} \leqslant \dfrac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-\alpha(n,k)}$ où $\alpha(n,k) = \dfrac{(k-1)k}{2n}$.

(c) Montrer que : $\forall k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\},\ \mathbf{P}(Y = k) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{\beta(n,k,\lambda)}$ où $\beta(n,k,\lambda) = \dfrac{k(2\lambda+1-k)}{2n}$.

(d) Quelle majoration de $\mathbf{P}(Y = k)$ peut-on obtenir pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2\lambda + 1$?

(e) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2\lambda + 1$: $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} \mathbf{P}(Y = j) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

Exercice 2

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω et à valeurs dans $\{1, ..., n+1\}$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose, pour tout couple $(i,j) \in \{1, ..., n+1\}^2$ $a_{i,j} = \mathbf{P}(X = i, Y = j)$.

On suppose que : $a_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} & \text{si } |i+j-(n+2)| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Vérifier que la famille $(a_{i,j})$ ainsi définie est bien une loi de probabilité de couple.

2. Écrire la matrice $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le terme général est $a_{i,j}$.

3. Déterminer les lois de probabilité de X et Y.

4. Pour tout couple $(i,j) \in \{1, ..., n+1\}^2$, on pose : $b_{i,j} = \mathbf{P}(X = i / Y = j)$.

5. Déterminer la matrice $B \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le terme général est $b_{i,j}$.

6. Montrer que le vecteur $v = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X=1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X=n+1) \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B.

Exercice 3

Soit (b_n) une suite de complexes et soit, pour tout entier $n \geqslant 1$, le determinant de taille $n \times n$:

$$\Delta_n(b_1,\dots,b_n) = \begin{vmatrix} 1+b_1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1+b_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+b_{n-1} & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1+b_n \end{vmatrix} \text{ et donc } \Delta_1(b_1) = 1+b_1$$

a) Calculer $\Delta_2(b_1,b_2)$ et $\Delta_3(b_1,b_2,b_3)$ *(on donnera des expressions développées).*

b) Effectuer les opérations élémentaires suivantes sur $\Delta_n(b_1,\dots,b_n)$:

$$C_2 \longleftarrow C_2 - C_1, \text{ puis } C_3 \longleftarrow C_3 - C_1, \dots\dots \text{ puis } C_n \longleftarrow C_n - C_1.$$

Ensuite développer par rapport à la n-ième colonne pour obtenir une relation de récurrence du type : $\Delta_n(b_1,\dots,b_n) = c + d\Delta_{n-1}(b_1,\dots,b_{n-1})$ avec c et d que l'on déterminera en fonction de $b_1,\dots,b_n$.

En déduire l'expression de $\Delta_4(b_1,\dots,b_4)$ puis par récurrence l'expression de $\Delta_n(b_1,\dots,b_n)$.

c) Calculer $\Delta_n(b_1,\dots,b_n)$ en utilisant la n-linéarité du déterminant et l'introduction des vecteurs colonnes : $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ..... , $B_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

On écrira $\Delta_n(b_1,\dots,b_n) = det_{b_0}(X_1,\dots,X_n)$, un déterminant d'une famille de vecteurs $X_1,\dots,X_n$ que l'on écrira à l'aide de $U, B_1,\dots,B_n$ (b_0 base canonique de $\mathbb{C}^n$).

d) Soit $n \geqslant 2$ et $T_n = X^n - X + 1$ Quel est le nombre de racines distinctes de T_n dans $\mathbb{C}$?

e) Calculer $\Delta_n(b_1,\dots,b_n)$ lorsque $b_1,\dots,b_n$ sont les racines de T_n.

Exercice 4

Soit le déterminant d'ordre n (n lignes et n colonnes) :

$$D_n(s_1,s_2,\dots,s_n) = \begin{vmatrix} s_1 & \cdots & \cdots & s_1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{vmatrix} \qquad \text{où} \quad (s_1,s_2,\dots,s_n) \in \mathbb{R}^n.$$

1. Calculer $D_1(s_1)$, $D_2(s_1,s_2)$ et $D_3(s_1,s_2,s_3)$ que l'on donnera sous forme factorisées. Pour $D_3(s_1,s_2,s_3)$, on remarquera que l'on peut factoriser un facteur sur une des lignes puis on fera apparaitre des 0 grâce à "Gauss".
2. En s'inspirant du calcul pour $n = 3$, déterminer une relation entre $D_n(s_1,s_2,\dots,s_n)$ et $D_{n-1}(s'_1,s'_2,\dots,s'_{n-1})$ avec $s'_1,s'_2,\dots,s'_{n-1}$ que l'on déterminera. En déduire $D_4(s_1,s_2,c_3,s_4)$.
3. En déduire par récurrence, l'expression factorisée de $D_n(s_1,s_2,\dots,s_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. On souhaite le vérifier avec python. On suppose (notamment avec numpy) que l'on dispose d'une fonction **def matrice(n) :** qui crée une matrice $n \times n$ que l'on peut modifier par les instructions suivantes **M[i,j]=valeur** ainsi qu'une fonction **det** qui renvoie le déterminant d'une matrice.

   Exemple :

   >>> **M=matrice(2)**

   >>> **M[1,1]=1 ;M[1,2]=2 ;M[2,1]=3 ;M[2,2]=4 ;**

   renvoi $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   >>> **det(M)**

   renvoi -2.

   Compléter la fonction suivante qui renvoie le déterminant $D_n(S_0, \ldots, S_{n-1})$:

   def exo3(n,S) : # ici S est une liste de n **nombres** $S = [\ S[0]\ ,\ \ldots\ ,\ S[n-1]\ ]$

   M=matrix(n)

   ⋮

   return det(M)

Exercice 5

Soit Δ défini de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Calculer $d^0\Delta(P)$ en fonction de d^0P *(on fera 2 cas).*
2. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Calculer $\ker\Delta$. Δ est elle injective ?

   Soit $P_n = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_0 = 1$.
3. Montrer que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
4. Calculer $\Delta(P_0)$. Calculer $\Delta(P_n)$ en fonction de P_{n-1} pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire Im Δ. Δ est elle surjective ?
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : P_{n-1}(X-1) + P_n(X-1) = P_n(X)$.
6. Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } P(0) = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-ev et que $\mathcal{B}_1 = (X, X^2, X^3)$ en est une base.

On considére φ, la restriction de Δ de E rapporté à $\mathcal{B}_1$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ rapporté à $\mathcal{B}_2 = (1, X, X^2)$.

On pose $A = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\varphi)$.

7. Déterminer A puis A^{-1}. En déduire que φ est bijective et déterminer $\varphi^{-1}(Q)$, pour $Q \in \mathbb{R}_2[X]$.
8. Déterminer Q tel que $\Delta(Q) = X^2$. En déduire (à l'aide de Q), $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ *(cette question sert à trouver et démontrer l'expression bien connue de* S_n*).*