exercice 1 e3a 2017 **DS 5 : corrigé**

1 a) Avec la formule de transfert, étudions la série $\left(\sum k(k-1)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right)_{k\geqslant 2} = \left(\sum \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-2)!}\right)$: série convergente (série exponentielle) et de somme :

$$\boxed{E(X(X-1)) = \lambda^2}$$

b) $X^2 = X(X-1) + X$ donc $\boxed{E(X^2) = \lambda^2 + \lambda}$

2) $P(X \geqslant i) = P(X^2 \geqslant i^2)$ (car $(X \geqslant i) = (X^2 \geqslant i^2)$ ↕ car bijection)

$\leqslant \frac{E(X^2)}{i^2}$ avec Markov

d° $\boxed{P(X \geqslant i) \leqslant \frac{\lambda^2 + \lambda}{i^2}}$

Cqs $P(X \geqslant i) = O\left(\frac{1}{i^2}\right)$ (car positif et vu le 2)).

Par TC, $\boxed{\left(\sum P(X \geqslant i)\right) \text{ cvg.}}$

3a) $0 < u_{i,k}$ et $\frac{u_{i+1,k}}{u_{i,k}} = \frac{\lambda}{k+i+1} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0 < 1$

d'où par d'Alembert, $\boxed{\left(\sum u_{i,k}\right)_{i\geq 1} \text{ cvg, } \forall k \geq 1}$ ②

b) $(k+1)(k+2)\cdots(k+i) \geq k^i > 0$, pour $\begin{vmatrix} k \geq 1 \\ i \geq 1 \end{vmatrix}$, donc

$$0 < u_{i,k} \leq \left(\frac{\lambda}{k}\right)^i$$

On $\left(\sum \left(\frac{\lambda}{k}\right)^i\right)_i$ cvg ssi $\left|\frac{\lambda}{k}\right| < 1$ soit $k > \lambda$

Posons $\boxed{K = \lfloor \lambda \rfloor + 1, \ \forall k \geq K \quad R_{n,k} \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\lambda^i}{k^i}}$

4a) $P(X \geq k) = P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} (X = i)\right)$

$= \sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ $\quad ((X=i)_{i\geq k}$ sont incompatibles

$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^i k!}{i!}$ $\quad$ cdV $i = k+j$

$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+1)\cdots(k+j)}$ ← pour $j=0$: $\frac{k!}{i!} = 1$

$\leq \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{k^j}$ $\quad$ car $k > \lambda$; valable pour $j=0$

$\leq P(X=k) \frac{1}{1-\frac{\lambda}{k}}$

d° $\boxed{\forall k > \lambda \quad P(X \geq k) \leq \frac{k}{k-\lambda} P(X=k)}$

On en déduit que $P(X>k) = P(X \geq k) - P(X=k)$

$\leq \left(\frac{k}{k-\lambda} - 1\right) P(X=k)$ si $k > \lambda$

or $\frac{k}{k-\lambda} - 1 = \frac{\lambda}{k-\lambda} \leq \frac{\lambda}{2\lambda - \lambda} = 1$ si $k \geq 2\lambda > \lambda$

↑ ↗ tout est positif

d° $\boxed{\forall k \geq 2\lambda \quad P(X>k) \leq P(X=k)}$

b) Si $\lambda \leq \frac{1}{2}$, $1 \geqslant 2\lambda$ donc $\forall k \geqslant 1 : k \geqslant 2\lambda$

d'où $\sum_{k=1}^{\infty} P(X>k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = P(\Omega) = 1$

Comme $P(X>k) = P(X \geqslant k+1)$ (↑ car $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$), d° $\boxed{\sum_{i=2}^{\infty} P(X \geqslant i) \leqslant 1}$

c) $\sum_{i=0}^{\infty} P(X \geqslant i) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P(X=j)$ inversons (si possible !) les 2 $\sum$:

$\sum_{i=0}^{j} P(X=j) = (j+1) P(X=j)$: terme général d'1

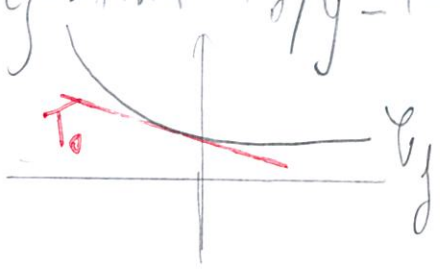
inutile , on applique la formule de l'antirépartition!

Série cvg car X possède une espérance finie

Comme $\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)P(X=j) = 1 + E(X)$

d° $\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} P(X \geq i) = 1 + \lambda}$

5a) Convexité ! $f(t) = e^{-t}$ $f''(t) = e^{-t} \geq 0$, donc f convexe sur $\mathbb{R}$. La tg en 0 a pour équation $T_0 / y = 1 - t$



d° $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} : 1 - t \leq e^{-t}}$

b) $\forall k \in [\![0, n]\!]$: $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

$$= \frac{n^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \underbrace{\left(1 - \frac{i}{n}\right)}_{>0}$$

or $\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \prod_{i=0}^{k-1} e^{-i/n} = e^{-\frac{k(k-1)}{2n}}$

↑ a)

d° $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!] : \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k(k-1)}{2n}}}$

c) $\forall k \in [\![0, n]\!] : P(Y=k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$$\leq \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k(k-1)}{2n}} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

et $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \leq \left(e^{-\lambda/n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda + \frac{\lambda k}{n}}$ (tout est positif

d'où $P(Y=k) \leq e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{e^{-\frac{k(k-1)}{2n}+\frac{\lambda k}{n}}}_{=e^{-\beta(n,k,\lambda)}}$

d'où : $\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!] : P(Y=k) \leq e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\beta(n,k,\lambda)}}$

d) Si $k \geqslant 2\lambda+1$, $\frac{k(2\lambda+1-k)}{2n} \leq 0$ d'où

d' $\boxed{\forall k \geq 2\lambda+1,\ P(Y=k) \leq \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}}$

e) $\sum_{j=k+1}^{\infty} P(Y=j) \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} P(X=j)$ car $\forall j,\ j \geqslant 2\lambda+1$

$= P(X>k)$

$\leq P(X=k)$ avec la 4a) car $k > 2\lambda$

d' $\boxed{\sum_{j=k+1}^{\infty} P(Y=j) \leq e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}$

exercice 2 (D55)

1) $\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} = \sum_{(i,j)\in G_n} \frac{1}{2n}$

où $G_n = \{(i,j) \in [\![1, n+1]\!] \setminus |i+j-(n+2)| = 1\}$

On $(i,j) \in G_n \Leftrightarrow i+j-(n+2) = \pm 1$

$\Leftrightarrow j = n+2 \pm 1 - i$

Pour $i=1$, $j = n$ ou ~~$j = n+2$~~

$i=2$, $j = n-1$ ou $j = n+1$

$\vdots$

$i = n$, $j = 1$ ou $j = 3$

$i = n+1$, ~~$j = 0$~~ ou $j = 2$

Comme $1 \leq j \leq n+1$,

$G_n = \{\underbrace{(1,n)}_{1}; \underbrace{(2,n-1);(2,n+1)}_{2}; \underbrace{(3,n-2);(3,n)}_{3}; \dots; \underbrace{(n,1);(n,3)}_{n}; \underbrace{(n+1,2)}_{n+1}\}$

d'où $|G| = 1 + 2\times(n-1)+1 = 2n$

Donc $\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} = 1$, comme $a_{ij} \geq 0$, $\forall i,j$

d° $\boxed{(a_{ij}) \text{ définie bien une loi de proba.}}$

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1/2n & 0 \\ \vdots & 0 & \iddots & 0 & 1/2n \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1/2n & 0 & \iddots & 0 & \\ 0 & 1/2n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2n}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 1 & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d° **A est diagonalisable car symétrique réelle**

3) D'après la F.P.T. associée au SCE $(Y=j)_{j\in[\![1,n+1]\!]}$,

$$\forall i \in [\![1,n+1]\!] \quad P(X=i) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} = \begin{cases} 1/2n & \text{si } i=1 \text{ ou } i=n+1 \\ 1/n & \text{si } i \in [\![2,n]\!] \end{cases}$$

(on somme sur la i-ème ligne)

et par symétrie **$Y \sim X$**

4) $b_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}}{P(Y=j)}$ d'où $B = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & 1/2 & 0 \\ & & & & 1/2 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & & \\ 0 & 1/2 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & 0 & \\ 0 & 1/2 & & & & & \end{pmatrix}$

$BV = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ où $\forall i \quad c_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_{i,j} \cdot P(X=j) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j}$ car $P(X=j) = P(Y=j)$

$= P(X=i)$ (3°)

d° **$BV = V$**

exercice 3 (DS5)

a) $\Delta_2(b_1,b_2) = \begin{vmatrix} 1+b_1 & 1 \\ 1 & 1+b_2 \end{vmatrix} = (1+b_1)(1+b_2) - 1$

$= \underline{b_1 + b_2 + b_1 b_2}$

$\Delta_3(b_1,b_2,b_3) = \begin{vmatrix} 1+b_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+b_1 & -b_1 & -b_1 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 1 & 0 & b_3 \end{vmatrix}$ ↙ idées "piquées" au b) ! ↖

$\begin{matrix} & C_2-C_1 & C_3-C_1 \end{matrix}$

$= -b_1 \begin{vmatrix} 1 & b_2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} 1+b_1 & -b_1 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix}$ dev. 3ème col

$= \underline{b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 + b_1 b_2 b_3}$

b) $\begin{matrix} & & C_2-C_1 & & C_n-C_1 \end{matrix}$

$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+b_1 & -b_1 & -b_1 & \cdots & -b_1 \\ 1 & b_2 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & b_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b_n \end{vmatrix}$

↙ dev. selon la n-ième colonne

$= (-1)^{n+1}(-b_1) \begin{vmatrix} 1 & b_2 & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & b_{n-1} \\ 1 & 0 & & 0 \end{vmatrix} + b_n \begin{vmatrix} 1+b_1 & -b_1 & \cdots & -b_1 \\ 1 & b_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & b_{n-1} \end{vmatrix}$

$= (-1)^n b_1 (-1)^n \begin{vmatrix} b_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{n-1} \end{vmatrix} + b_n \Delta_{n-1}$

↑ dev. selon la n-ième ligne

csq si on note $\Delta_n = \Delta_n(b_1, \dots, b_n)$, on a la relation :

$$\Delta_n(b_1, \dots, b_n) = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} + b_n \Delta_{n-1}(b_1, \dots, b_{n-1}) \quad (*)$$

On $\Delta_1 = 1 + b_1$, $\Delta_2 = (1+b_1)(1+b_2) - 1 = b_1 + b_2 + b_1 b_2$

$$\Delta_3 = b_1 b_2 + b_3(b_1 + b_2 + b_1 b_2) = b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 + b_1 b_2 b_3$$

Supposons $\Delta_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} b_1 b_2 \cdots b_{i-1} b_{i+1} \cdots b_{n-1} + \prod_{i=1}^{n-1} b_i$, alors

grâce à $(*)$: $\Delta_n = b_1 \cdots b_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} b_1 \cdots b_{i-1} b_{i+1} \cdots b_n + \prod_{i=1}^{n} b_i$

cl : $\boxed{\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} b_1 \cdots b_{i-1} b_{i+1} \cdots b_n + b_1 b_2 \cdots b_n}$

c) $\Delta_n = \det_{\mathcal{B}}(U + B_1, U + B_2, \dots, U + B_n)$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ $B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

par n-linéarité et alternance on a :

$$\Delta_n = \det_{\mathcal{B}}(B_1, \dots, B_n) + \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(B_1, \dots, B_{i-1}, U, B_{i+1}, \dots, B_n) + 0$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} b_1 & & & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & b_{i-1} & 1 & & \\ & & & b_{i+1} & & \\ 0 & & & 1 & & b_n \end{vmatrix}$$

d'où $\Delta_n = b_1 \cdots b_n + \sum_{i=1}^{n} b_1 \cdots b_{i-1} b_{i+1} \cdots b_n$ ↪ dev. selon la i-ième ligne

2ème cas : n impair $f'(x)=0 \iff x = \pm \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}}_{c_n}$

x	$-\infty$		$-c_n$		0		c_n		$+\infty$
f'		$+$	0		$-$		0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	>0	$\nearrow$	$+\infty$

On a toujours $f(c_n) \geq \frac{1}{n} > 0$

et $f(-c_n) \geq 1$

csq $\exists!\, \alpha$ racine de T_n entre $-\infty$ et $-c_n$ (th. de la bijection)

cl 2 $\boxed{\begin{array}{l} T_n \text{ n'a aucune racine réelle si } n \text{ est pair} \\ T_n \text{ a exactement } 1 \text{ ——— ——— impair} \end{array}}$

d)

1re méthode

Grâce à d'Alembert-Gauss, T_n admet n racines dans $\mathbb{C}$. Voyons si elles sont 2 à 2 distinctes. Si α est une racine double de T_n, on a $T_n(\alpha) = T_n'(\alpha) = 0$ donc

$$\begin{cases} \alpha^n - \alpha + 1 = 0 \\ n\alpha^{n-1} - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \alpha = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \omega$$

où ω racine $n-1$-ième de l'unité

d'où $f(\alpha) = \alpha^n - \alpha + 1 = \left(\frac{1}{n}\right)^{n/n-1} \omega^n - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \omega + 1$ or $\omega^{n-1} = 1$

$$= \omega \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \left[\frac{1}{n} - 1\right] + 1$$

d'où $|f(\alpha)| \geq \left| \left|\omega \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \left[\frac{1}{n} - 1\right]\right| - 1 \right| = \left| \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1 \right|$

et comme $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(1-\frac{1}{n}\right) \leq 1$, on a :

$$|f(\alpha)| \geqslant 1-\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(1-\frac{1}{n}\right) \geqslant 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}>0$$

d'où $f(\alpha) \neq 0$: aucune racine de T'_n n'est racine de T_n. Donc toutes les racines de T_n sont simples.

<u>2ème méthode</u> Si α racine de T_n et T'_n, alors α est racine du reste de T_n par T'_n

Or
$$\begin{array}{r|l} T_n & T'_n \\ \hline (\frac{1}{n}-1)X+1 & \frac{1}{n}X^n \end{array}$$
donc $\left(\frac{1}{n}-1\right)\alpha+1=0$ d'où $\alpha=\frac{n}{n-1} \in \mathbb{Q}$ absurde

donc T_n n'a que des racines simples.

<u>cl</u> $\boxed{T_n \text{ n'a que des racines 2 à 2 distinctes donc en a } n \text{ complexes si } n \text{ pair et } n-1 \text{ si } n \text{ impair.}}$

e) On a grâce au a) ou b), $\Delta_n = \sigma_{n-1}+\sigma_n$ où

$\sigma_p = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n} \alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_p}$. Or $T_n = X^n-\sigma_1X^{n-1}+\sigma_2X^{n-2}\dots+(-1)^n\sigma_n$
$= X^n - 0X^{n-1} \dots - X + 1$

Donc $\Delta_n = (-1)^n+(-1)^n$

<u>cl</u>. $\boxed{\forall n\geqslant 2 \quad \Delta_n = 2(-1)^n}$

exercice 4 (DS 5)

1) $\boxed{D_1(s_1) = s_1}$

$$D_2(s_1, s_2) = \begin{vmatrix} s_1 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = s_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}$$

donc $\boxed{D_2(s_1, s_2) = s_1(s_2 - s_1)}$

$$D_3(s_1, s_2, s_3) = \begin{vmatrix} s_1 & s_1 & s_1 \\ s_1 & s_2 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} = s_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix}$$

$$= s_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 - s_1 & s_2 - s_1 \\ s_1 & s_2 - s_1 & s_3 - s_1 \end{vmatrix}$$

$C_2 - C_1 \quad C_3 - C_1$

par 1ère ligne :

$$= s_1 \begin{vmatrix} s_2 - s_1 & s_2 - s_1 \\ s_2 - s_1 & s_3 - s_1 \end{vmatrix} = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2)$$

d'où $\boxed{D_3(s_1, s_2, s_3) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2)}$

2) $$D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ s_1 & s_2 & s_2 & \cdots & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{vmatrix}$$

$$= s_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 & s_2 - s_1 & \cdots & s_n - s_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_1 & s_2 - s_1 & \cdots & s_n - s_1 \end{vmatrix}$$

on reconnaît $\Delta_{1,1}$ comme D_{n-1}

$$C_2 - C_1 \quad \cdots \quad C_n - C_1$$

d'où $\boxed{D_n(s_1, \cdots, s_n) = s_1 D_{n-1}(s_2 - s_1, \cdots, s_n - s_1)}$

On en déduit que $D_4(s_1, s_2, s_3, s_4) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_1 - (s_2 - s_1))$
$(s_4 - s_1 - (s_3 - s_1))$

d'où $\boxed{D_4(s_1, s_2, s_3, s_4) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2)(s_4 - s_3)}$

3) Montrons par récurrence que :

$\forall n \geq 2 \quad D_n(s_1, \cdots, s_n) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \cdots (s_n - s_{n-1})$

c'est vraie pour $n = 2$, puis à l'aide des 2),

si c'est vraie pour $n-1$,

$$D_n(s_1, \cdots, s_n) = s_1 D_{n-1}(s_2 - s_1, \cdots, s_n - s_1)$$
$$= s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_1 - (s_2 - s_1), \cdots, s_n - s_1 - (s_{n-1} - s_1))$$
$$= s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \cdots (s_n - s_{n-1})$$

d $\forall n \geq 2 \quad D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1 \prod_{i=1}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)$

4)
```
def exo1(n, S):
    M = matrice(n)
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(1, i+1):
            M[i,j] = S[j-1]
        for j in range(i+1, n+1):
            M[i,j] = S[i]
    return(det(M))
```

Exercice 5 (DS 5)

1. Si $P = \lambda \in \mathbb{R}[X]$, $\Delta(P) = 0$, donc $d^\circ P \leq 0 \Rightarrow d^\circ(\Delta(P)) = -\infty$

Si $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$

$$P(X+1) = a_n (X+1)^n + a_{n-1} (X+1)^{n-1} + \dots \to a_1 (X+1) + a_0$$

$$-P(X) = -a_n X^n - a_{n-1} X^n \dots - a_1 X - a_0$$

Comme $(X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i = k X^{k-1} + \dots$, on a

$$\Delta(P) = n a_n X^{n-1} + \underbrace{\dots}_{d^\circ \leq n-2}$$

d° : $\boxed{d^\circ P \leq 0 \Rightarrow d^\circ \Delta(P) = -\infty \text{ et } d^\circ P \geq 1 \Rightarrow d^\circ \Delta(P) = d^\circ P - 1}$

2. - $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\Delta(P) \in \mathbb{R}[X]$ donc Δ "endo"

- $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda (P(X+1) - P(X)) + Q(X+1) - Q(X) \\ &= \lambda \Delta(P) + \Delta(Q)\end{aligned}$$ donc Δ "morphisme"

d' : $\boxed{\Delta \text{ endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$

d'après la 1, si $d^\circ P \geq 1$, $d^\circ \Delta(P) \geq 0$ donc $\Delta(P) \neq 0$

d'où $\ker \Delta \subset \mathbb{R}$ et $\Delta(\lambda) = 0$ donc :

d'; $\boxed{\ker \Delta = \mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K} \neq \{0\}}$ donc Δ non injectif.

3 * ~~Soit~~ $\forall n \in \mathbb{N}$ $(P_0, \dots, P_n)$ libre car degré échelonné

$\forall (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ / $Q = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$

inutile aujourd'hui!

s'il existe i / $\lambda_i \neq 0$, alors $d^\circ Q = \max\{i \in [\![0, n]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}$

$\in \mathbb{N}$ ↛ car $d^\circ Q = -\infty$

donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

* On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(P_0, \dots, P_n)$ base de $\mathbb{R}_n[X]$

car libre dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, donc :

$\text{vect}(P_0, \dots, P_n) = \mathbb{R}_n[X]$

On en déduit que $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$, $\exists n = \max(0, d^\circ Q) \in \mathbb{N}$

$Q \in \mathbb{R}_n[X] = \text{vect}(P_0, \dots, P_n)$, donc Q C.L. de $P_0, \dots, P_n$

d'; $\boxed{(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ base de } \mathbb{R}[X].}$

4. Si $n = 0$, $\Delta(P_0) = 0$

Si $n \geq 1$, $\Delta(P_n) = \dfrac{(X+1)(X)\cdots(X+1-n+1) - X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$

$= \dfrac{X(X-1)\cdots(X+1-n+1) \times (X+1 - X+n-1)}{n!}$

d°: $\boxed{\Delta(P_0)=0 \text{ et } \forall n\geq 1 : \Delta(P_n)=P_{n-1}}$

On en déduit que $\forall n\geq 1$,

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbb{R}_n[X]) &= \Delta(\text{vect}(P_0,\dots,P_n)) \\ &= \text{vect}(\Delta(P_0),\dots,\Delta(P_n)) \\ &= \text{vect}(0,P_0,\dots,P_{n-1}) \\ &= \mathbb{R}_{n-1}[X]\end{aligned}$$

cqs: $\forall Q\in\mathbb{R}[X]$, $\exists n=\max(0,d^\circ Q)\in\mathbb{N} \mid Q\in\mathbb{R}_n[X]$

Comme $\mathbb{R}_n[X]=\Delta(\mathbb{R}_{n+1}[X])$, $\exists P\in\mathbb{R}_{n+1}[X]\subset\mathbb{R}[X]$ |

$Q=\Delta(P)$ d°: $\boxed{\Delta \text{ surjective}}$

5. $\Delta(P_n(X-1)) = P_n(X-1+1)-P_n(X-1)$

$= P_{n-1}(X-1)$ d'où $\boxed{P_{n-1}(X-1)+P_n(X-1)=P_n(X)}$

6. * $P=0\in E$, et si $P,Q\in E$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $(\lambda P+Q)(0)=0$

donc $\lambda P+Q\in E$ d'où: E $\mathbb{R}$-ev

* $P\in E \Rightarrow \exists Q=a+bX+cX^2 \mid P=XQ=aX+bX^2+cX^3$

donc (X,X^2,X^3) générateur de E, comme elle est libre, d°: $\boxed{(X,X^2,X^3) \text{ base de } E}$

7. $A = \begin{pmatrix} \Delta(X) & \Delta(X^2) & \Delta(X^3) \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$

Resolvem $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x + y + z = X \\ 2y + 3z = Y \\ 3z = Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{3}Z \\ y = \frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}Z \\ x = X - \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}Z - \frac{1}{3}Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = X - \frac{1}{2}Y + \frac{1}{6}Z \\ y = \frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}Z \\ z = \frac{1}{3}Z \end{cases} \quad \text{d'où: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$A = \Pi_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\varphi)$ inversible, φ est bijective et

$$\Pi_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(\varphi^{-1}) = A^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi^{-1}(1) & \varphi^{-1}(X) & \varphi^{-1}(X^2) \\ 1 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{matrix} X \\ X^2 \\ X^3 \end{matrix}$$

donc $\varphi^{-1}(a + bX + cX^2) = a \cdot X + b\left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2\right) + c\left(\frac{1}{6}X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3\right)$

d'où: $\boxed{\varphi^{-1}(a + bX + cX^2) = \left(a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{6}c\right)X + \left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c\right)X^2 + \frac{1}{3}cX^3}$

8. $Q = \varphi^{-1}(X^2)$ convient car $\Delta(Q) = X^2$

On a donc $Q = \frac{1}{6}X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3$

On a donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} Q(k+1) - Q(k)$

$= Q(n+1) - Q(0)$ (télescopage)

$= Q(n+1)$ ($Q \in E$)

$= \frac{n+1}{6} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)^3}{3}$

$= \frac{n+1}{6}\left[1 - 3(n+1) + 2(n+1)^2\right]$

$= \frac{n+1}{6}\left[2n^2 + n\right]$

d $\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Exercice 2 (DS 5*)

1. a) $|\mathbb{P}(X\in\bar{A}) - \mathbb{P}(Y\in\bar{A})|$

$= |1 - \mathbb{P}(X\in A) - (1 - \mathbb{P}(Y\in A))|$

d'où $\boxed{\forall A\subset\mathbb{N} : |\mathbb{P}(X\in\bar{A}) - \mathbb{P}(Y\in\bar{A})| = |\mathbb{P}(X\in A) - \mathbb{P}(Y\in A)|}$

b) $|\mathbb{P}(X\in A) - \mathbb{P}(Y\in A)|$

$= \left|\sum_{k\in A} p_k - \sum_{k\in A} q_k\right| \leq \sum_{k\in A} |p_k - q_k|$ (tout cvg : $\sum_{k\in A} p_k \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k \leq 1$)

d'où $|\mathbb{P}(X\in\bar{A}) - \mathbb{P}(Y\in\bar{A})| \leq \sum_{k\in\bar{A}} |p_k - q_k|$

d'où $2|\mathbb{P}(X\in A) - \mathbb{P}(Y\in A)| \leq \sum_{k\in A\cup\bar{A}=\mathbb{N}} |p_k - q_k| = 2d(X,Y)$
avec a)

d'où $\boxed{|\mathbb{P}(X\in A) - \mathbb{P}(Y\in A)| \leq d(X,Y)}$

c) On a $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 ; \min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$

d'où $\forall k\in\mathbb{N} ; \min(p_k, q_k) = \dfrac{p_k + q_k - |p_k - q_k|}{2}$

en somme de 0 à l'infini car le 2nd membre cvg par linéarité :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \min(p_k, q_k) = \frac{1}{2}\left(1 + 1 - 2\,d(X,Y)\right)$$

d'où : $\boxed{d(X,Y) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \min(p_k, q_k)}$

d) $d(X,Y) - P(X \neq Y) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \min(p_k, q_k) - 1 + P(X=Y)$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \min(p_k, q_k) + \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k \cap Y=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k \cap Y=k) - \min(p_k, q_k)$$

Or $\forall k \in \mathbb{N}$ $P(X=k \cap Y=k) \leq P(X=k) = p_k$,

et aussi $P(X=k \cap Y=k) \leq q_k$, donc $P(X=k \cap Y=k) \leq \min(p_k, q_k)$

Ainsi : $d(X,Y) - P(X \neq Y) \leq 0$ d'où $\boxed{d(X,Y) \leq P(X \neq Y)}$

2 a) En a $\forall n \in [0,1)$, $f'(n) = ne^n \geq 0$ d'où

n	0		1
f'		+	
f	0	↗	1

b) $P(X_i = 0) = P(U_i = 0 \cap Y_i = 0) = P(U_i = 0) \times P(Y_i = 0)$ (ind. p.)

$$= \left(1 - f\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right) e^{-\frac{\lambda}{n}} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) e^{+\frac{\lambda}{n}} e^{-\lambda}$$

d'où $\boxed{X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{n}\right)}$.

Ensuite les X_i sont ind. par le lemme des coalitions généralisé ($X_i = f_i(U_i, Y_i)$)

d' $\boxed{X \sim \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})}$

Par récurrence, montrons que $Y_1 + \cdots + Y_i \sim \mathcal{P}(i\frac{\lambda}{n})$

vrai pour $i=1$, si $Y_1 + \cdots + Y_{i-1} \sim \mathcal{P}\left((i-1)\frac{\lambda}{n}\right)$, par la

somme des conditions, $Y_1 + \cdots + Y_{i-1}$ et Y_i sont indép.

cqfd $Y_1 + \cdots + Y_i \sim \mathcal{P}\left((i-1)\frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}\right) \sim \mathcal{P}\left(i\frac{\lambda}{n}\right)$

d' pour $i=n$: $\boxed{Y \sim \mathcal{P}(\lambda)}$

c) $(X_i = Y_i) = (X_i = 0, Y_i = 0) \amalg (X_i = 1, Y_i = 1)$

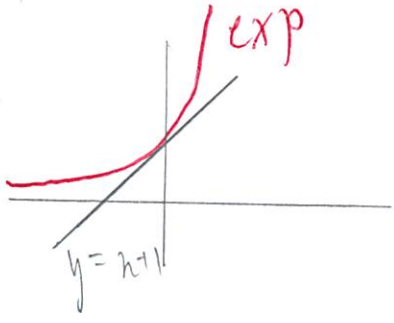
si $X_i = 0$ alors $Y_i = 0$

si $Y_i = 1$ alors $X_i = 1$

donc $(X_i = Y_i) = (X_i = 0) \amalg (Y_i = 1)$

$$P(X_i = Y_i) = 1 - \frac{\lambda}{n} + e^{-\lambda/n}\frac{\lambda^1}{1!} = 1 - \frac{\lambda}{n}\left(1 - e^{-\lambda/n}\right)$$

or par convexité $\forall x \in \mathbb{R}$ $1 + x \leq e^x$



donc $P(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda}{n}\left(1 - e^{-\lambda/n}\right)$

$$\leq \frac{\lambda}{n}\left(\frac{\lambda}{n}\right) = \frac{\lambda^2}{n^2}$$

d $\boxed{P(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda^2}{n^2}}$

d) $(X \neq Y) = \bigcup_{i=1}^{n} (X_i \neq Y_i)$

donc $P(X \neq Y) \leq \sum_{i=1}^{n} P(X_i \neq Y_i)$ inégalité de Boole

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^2}{n^2}$$

(4) $P(X \neq Y) \leq \frac{\lambda^2}{n}$

Avec 4 i) d), on conclut :

d'où : $\boxed{d(X,Y) \leq \frac{\lambda}{n}}$

Mines MP 2007 (début) (pb 055*)

1. $\forall \Pi \in \mathcal{V}, \exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Pi X = \alpha X$. Comme $X \neq 0$ car propre si $\alpha X = \alpha' X$ alors $\alpha = \alpha'$ donc le α est unique, pour Π fixé. Posons donc ce $\alpha : \lambda(\Pi)$. Cela définit une application

$$\lambda : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\Pi \longmapsto \alpha = \lambda(\Pi)$$

Soit $(\Pi, \Pi') \in \mathcal{V}^2$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Comme $\mathcal{V}$ est une algèbre de Lie, c'est un SEV donc $\alpha\Pi + \Pi' \in \mathcal{V}$ et

$$(\alpha\Pi + \Pi')X = \alpha\lambda(\Pi)X + \lambda(\Pi')X = [\alpha\lambda(\Pi) + \lambda(\Pi')]X$$
$$= \lambda(\alpha\Pi + \Pi')X \text{. Comme } X \neq 0, \lambda(\alpha\Pi + \Pi') = \alpha\lambda(\Pi) + \lambda(\Pi')$$

d. $\boxed{\lambda \text{ est une forme linéaire}}$

2. On a $\Pi \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ et $A \in \mathcal{U}$ donc $[\Pi, A] \in [\mathcal{U}] \subset \mathcal{V}$

d $\boxed{[\Pi, A] \subset \mathcal{V}}$

3) Montrons H_i : "(1) et (2)" par récurrence :

$i=0$ $* M X_0 = MX = \lambda(\Pi)X = \lambda_0(\Pi)X_0 = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(\Pi) X_j$

* $[M,A]X_0 = [\Pi,A]X = \lambda([\Pi,A])X$ d'après [2]

$= \lambda_1(\Pi)X_0 = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(\Pi) X_j$

csq : (1) et (2) sont vraies au rang $i=0$

Supposons H_i vraie

* $\Pi X_{i+1} = MAX_i = (MA - A\Pi)X_i + A\Pi X_i$

$= [\Pi, A]X_i + A\Pi X_i$

$= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(\Pi) X_j + A \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(\Pi) X_j$ $\quad AX_j = X_{j+1}$

$= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(\Pi) X_j + \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(\Pi) X_{j+1}$

$= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(\Pi) X_j + \sum_{j=1}^{i+1} \binom{i}{j-1} \lambda_{i-j+1}(\Pi) X_j$ $\quad \left(\text{cdv } j = j+1\right)$

$= \underbrace{\binom{i}{0}}_{\binom{i+1}{0}} \lambda_{i+1}(\Pi) X_0 + \sum_{j=1}^{i} \underbrace{\left[\binom{i}{j} + \binom{i}{j-1}\right]}_{= \binom{i+1}{j} \text{ (Pascal)}} \lambda_{i-j+1}(\Pi) X_j + \underbrace{\binom{i}{i}}_{\binom{i+1}{i+1}} \lambda_0(\Pi) X_{i+1}$

$= \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \lambda_{i+1-j}(M) X_j$ d'où (1) est vraie

$$[M,A]X_{i+1} = \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \lambda_{i+1-j}([\Pi,A])X_j$$

↑ on applique le (1) que l'on vient de prouver avec la matrice $[M,A] \in \mathcal{V}$

d'où $[\Pi,A]X_{i+1} = \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \lambda_{i+1-j+1}(\Pi)X_j$ d'où (2) vraie

cl. $\boxed{\forall i \in \mathbb{N} \quad (1) \text{ et } (2) \text{ sont vraies}}$

[4] Evident avec $q = \max\{i \in \mathbb{N}, (X_0,\dots,X_q) \text{ libre}\}$ qui existe car $i \leq n$, (X_0) libre.

[5] * $\forall k \in \mathbb{N}$ $\bar{A}(X_k) = AX_k = X_{k+1}$. Donc $\forall k \leq q-1 : \bar{A}(X_k) \in G$

et comme $(X_0,\dots,X_{q+1})$ liée et $(X_0,\dots,X_q)$ libre, on a X_{q+1} C.L. de $X_0,\dots,X_q$ donc $X_{q+1} \in G$ et G stable par A

* Pour Π et $[\Pi,A]$, c'est évident vu le [3]

cl. $\boxed{\left(\bar{\Pi}_G, \bar{A}_G, \overline{[\Pi,A]}_G\right) \in \mathcal{L}(G)^3}$

6 On a $\overline{[M,A]}_G = \left(\overline{\Pi A - A\Pi}\right)_G = \left(\bar{M}\circ\bar{A} - \bar{A}\circ\bar{\Pi}\right)_G$

(car $\Pi_{\mathcal{B}_0}(\lambda f+g) = \lambda\Pi_{\mathcal{B}_0}(f) + \Pi_{\mathcal{B}_0}(g)$, idem pour fg)

donc $[\Pi,A]_G = \bar{\Pi}_G\circ\bar{A}_G - \bar{A}_G\circ\bar{M}_G$ et $\boxed{Tr\left(\overline{[M,A]}_G\right) = 0}$

7 On utilise le **3** : si $\mathcal{B}' = (x_0,\dots,x_q)$

$$\boxed{\Pi_{\mathcal{B}'}\left(\overline{[\Pi,A]}_G\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\Pi) & \lambda_2(\Pi) & & \binom{i}{j}\lambda_{i-j+1} \\ & \lambda_1(\Pi) & \ddots & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_1(\Pi) \end{pmatrix}}$$

8 $Tr\left(\overline{[\Pi,A]}_G\right) = 0 = (q+1)\lambda_1(\Pi)$ or $\lambda_1(\Pi) = \lambda([\Pi,A])$

donc $\boxed{\lambda([\Pi,A]) = 0}$

9 On en déduit que $\left|\begin{array}{l}[\Pi,A]X = 0 \\ \forall \Pi\in\mathcal{V}\end{array}\right.$ donc $MAX = AMX = A\lambda(\Pi)X$

d'où $M(AX) = \lambda(\Pi)AX$ d'où $\underline{AX=0}$ ou $\underline{\text{propre pour } M}$

et on a le "de plus".