

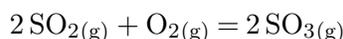
DS 3 (4 heures)

Thermochimie, Électrostatique

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Les résultats doivent être **encadrés**. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 : Oxydation du dioxyde de soufre (d'après CCP MP 2008)

En phase gazeuse, l'oxydation du dioxyde de soufre conduit à la formation de trioxyde de soufre, selon la réaction équilibrée suivante :



Données : On prendra la constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ puis à 25°C :

	$\text{SO}_{2(g)}$	$\text{O}_{2(g)}$	$\text{SO}_{3(g)}$	$\text{N}_{2(g)}$
$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$)	-296,8	0	-395,7	0
S_m^0 (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$)	248	205	256,4	191,5
$C_{p,m}^0$ (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$)	47,8	31,6	65,3	29,8

Q.1 Calculer, à $T_0 = 298 \text{ K}$:

- a) L'enthalpie standard de réaction. Interpréter son signe.
- b) L'entropie standard de réaction. Interpréter son signe.
- c) L'enthalpie libre standard de réaction.
- d) La constante d'équilibre K^0 .

Q.2 Dans quel sens la réaction évolue-t-elle quand on élève la température, à pression constante ? Justifier la réponse.

Q.3 Indiquer l'influence, à température constante, de la pression totale sur le taux de conversion à l'équilibre du dioxyde de soufre en trioxyde de soufre.

On se place à $T_1 = 750 \text{ K}$. Le mélange initial est constitué par $n_1 = 100 \text{ mol}$ de dioxyde de soufre et par $n_0 = 50 \text{ mol}$ de dioxygène. La réaction conduit, sous une pression P_1 et à la température T_1 à un état d'équilibre caractérisé par un avancement $\xi_1 = 48 \text{ mol}$.

Q.4 En justifiant votre réponse et en explicitant vos hypothèses, déterminer la constante d'équilibre de cette réaction à la température T_1 .

Q.5 Déterminer la quantité de matière de chaque composé à l'équilibre. Exprimer la valeur des pressions partielles des différents composés en fonction de la pression totale P_1 .

Q.6 En déduire la valeur de P_1 .

Un mélange gazeux sortant d'un four présente la composition molaire suivante : 8% de dioxyde de soufre, 12% de dioxygène et 80% de diazote. Ce mélange gazeux est introduit en continu dans un réacteur fonctionnant en régime stationnaire et à pression constante au sein duquel l'oxydation du dioxyde de soufre en trioxyde de soufre est réalisée selon la réaction étudiée. Le diazote se comporte comme un gaz inerte. On considérera 100 mol de mélange gazeux à l'entrée du réacteur à la température T_1 .

On suppose que le réacteur fonctionne de manière isotherme à la température T_1 dans un premier temps. On observe que 98% du SO_2 est oxydé en SO_3 .

Q.7 Quelle est la valeur de l'avancement ξ_2 de la réaction dans ce cas ?

Q.8 En considérant que l'état d'équilibre est établi à la sortie du réacteur, déterminer P_2 .

Q.9 Calculer la quantité de chaleur Q_p échangée entre le système et l'extérieur.

Le réacteur fonctionne maintenant de façon adiabatique et sous une pression constante $P_3 = 1$ bar. Le mélange gazeux précédent est toujours introduit à T_1 . Dans ce cas, on constate que 60% du SO_2 est oxydé en SO_3 .

Q.10 Dédurre de la valeur de l'avancement ξ_3 et du bilan énergétique, la valeur de la température T_3 des gaz à leur sortie du réacteur.

Q.11 Calculer le quotient réactionnel Q_r de la réaction à la sortie du réacteur ainsi que la constante d'équilibre $K^0(T_3)$. Quelle remarque peut-on faire ?

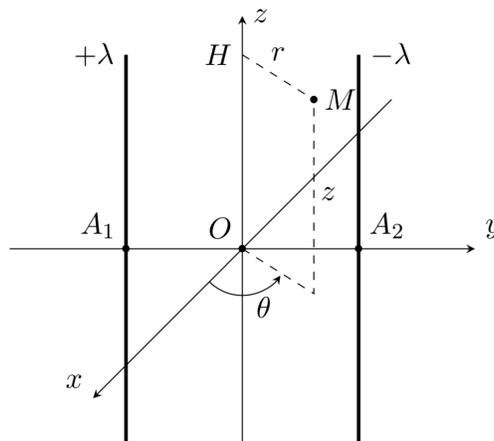
Exercice 2 : Champ créé par deux fils parallèles de charges opposées

On cherche à modéliser le profil du potentiel électrique créé par un fil électrique d'une ligne à haute tension, portant une densité linéique de charge $\lambda > 0$, supposé parallèle au sol à une hauteur h de celui-ci et de longueur infinie. Du fait des orages, la Terre est légèrement chargée négativement donc on modélise le sol par une surface horizontale portant une densité surfacique de charge σ négative et dont nous prendrons le potentiel égal à zéro.

Q.1 Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par un unique fil infini chargé avec une densité linéique λ uniforme, en tout point M . On notera r la distance entre le point M et le fil.

Q.2 En déduire le potentiel électrique associé $V(M)$ à une constante C près.

On considère maintenant deux fils rectilignes, infinis, parallèles à l'axe (Oz) , et d'équations $y = -a$ et $y = +a$, de charges linéiques uniformes $\lambda_1 = +\lambda$ et $\lambda_2 = -\lambda$, avec $\lambda > 0$. On note A_1 et A_2 leur intersection respective avec le plan (xOy) .



Un point M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On note $r_1 = H_1M$ et $r_2 = H_2M$ les distances entre M et chacun des fils, H_1 et H_2 désignant respectivement les projetés de M sur les fils 1 et 2. On choisit l'origine des potentiels au point O , origine du repère d'espace.

- Q.3** Calculer l'expression du potentiel électrostatique $V(M)$ créé en M par l'ensemble des deux fils en fonction de λ , r_1 et r_2 .
- Q.4** Établir la relation liant r_1 et r_2 en un point M d'une surface équipotentielle telle que $V(M) = V_0$.
- Q.5** Montrer que la surface équipotentielle $V_0 = 0$ est un plan dont on donnera l'équation.

Dans toute la suite, on note par soucis de simplification : $k = \exp\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda}\right)$.

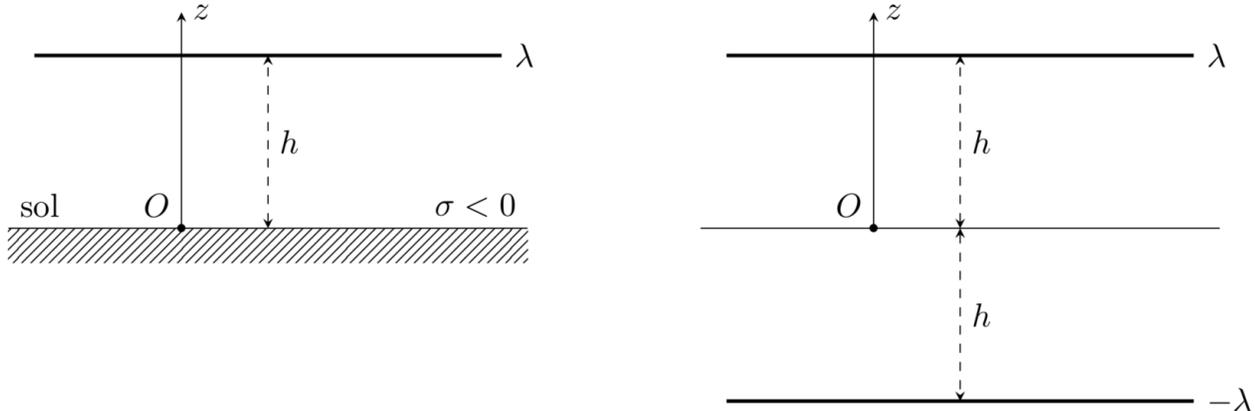
- Q.6** Montrer que si $V_0 \neq 0$, les surfaces équipotentielles sont des cylindres dont l'intersection avec le plan (xOy) sont des cercles de rayon R_k et de centre C_k tels que :

$$R_k = \frac{2ka}{|1 - k^2|} \quad \text{et} \quad C_k = \left(0, a \frac{1 + k^2}{1 - k^2}\right)$$

On rappelle que l'équation d'un cercle de centre $C = (\alpha, \beta)$ et de rayon γ s'écrit en coordonnées cartésiennes $(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \gamma^2$.

- Q.7** En indiquant les propriétés utilisées, dessiner l'allure des équipotentielles et des lignes de champ électrostatique dans le plan $z = 0$, pour $V_0 > 0$ ou $V_0 < 0$.

On admettra que le potentiel électrique créé dans l'espace $z > 0$ par la ligne à haute tension chargée avec une densité linéique $\lambda > 0$ et par le sol chargé avec une densité surfacique $\sigma < 0$ est le même que celui qui est créé par deux fils infinis parallèles, symétriques par rapport au plan $z = 0$ et portant des charges linéiques opposées λ et $-\lambda$. Dans cette modélisation, le plan $z = 0$ n'est plus chargé (voir figure ci-dessous).



- Q.8** Montrer que le potentiel à une hauteur $0 \leq z < h$ du sol, dans un plan vertical contenant la ligne à haute tension est donné par :

$$V(z) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{h+z}{h-z}\right)$$

- Q.9** Le cylindre dont l'axe est quasiment confondu avec la ligne HT et dont le rayon est $r_1 = 1,5$ cm est une équipotentielle de valeur $V_1 = 400$ kV. Exprimer $V(z)$ en fonction de V_1 , h , r_1 et z , pour $0 \leq z < h$.
- Q.10** Les lignes HT étant situées à une hauteur $h = 50$ m, déterminer la valeur de la différence de potentiel entre le sol et une hauteur L d'environ 2 m. Quel commentaire peut-on faire ?

Exercice 3 : Moteurs électrostatiques (d'après CCP MP 2010)

Il est possible de créer des actionneurs électromécaniques (qui convertissent l'énergie électrique en énergie mécanique) à l'aide des champs électriques. Toutefois, vu les niveaux d'énergies mis en jeu dans les phénomènes électrostatiques, seuls des micro-moteurs sont développés industriellement.

Pour les applications numériques, on prendra comme valeur de la permittivité du vide $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$. Dans tout le problème, l'action de la pesanteur et les frottements sont négligés.

1) Principe d'un moteur électrostatique

On considère un condensateur plan constitué de deux armatures métalliques très fines, de surfaces intérieures S séparées par du vide (permittivité ε_0). Les armatures sont dans des plans parallèles au plan xOz . La distance entre les deux armatures est notée e et elle est supposée petite par rapport aux dimensions transversales des armatures. On peut donc négliger les effets de bord et considérer que le champ créé par les armatures dans la région considérée est le même que si les armatures étaient des plans illimités.

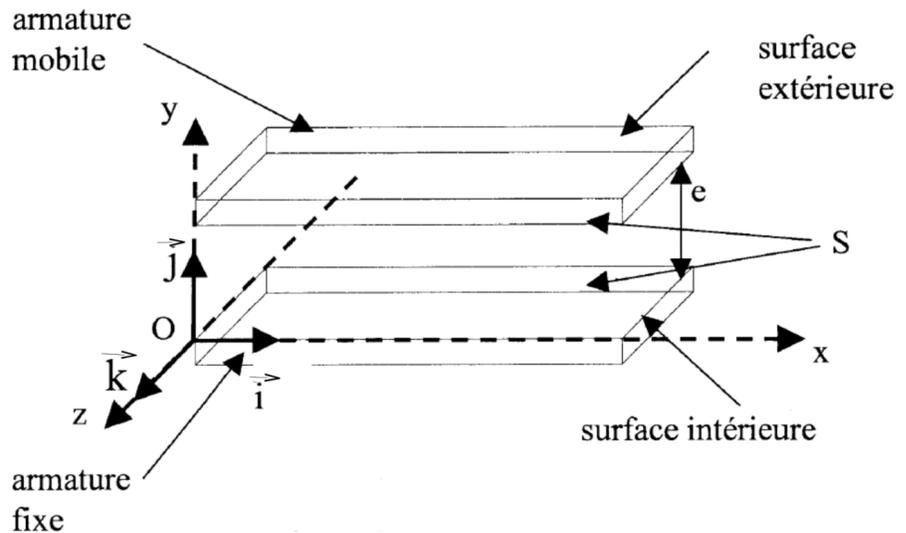


FIGURE 1

L'armature située dans le plan xOz est fixe, l'autre est mobile en translation dans la direction de l'axe Oy . Les armatures portent des charges opposées : les deux surfaces intérieures sont chargées uniformément avec une densité surfacique de charge $-\sigma$ pour l'armature mobile et $+\sigma$ pour l'armature fixe. Les deux surfaces extérieures sont supposées non chargées. Dans la région située entre les deux armatures, le vecteur champ électrique est noté \vec{E} . Au-dessus et en-dessous du condensateur, il est noté \vec{E}_{ext} .

- Q.1** Rappeler l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface.
- Q.2** En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer l'expression de \vec{E} en fonction de σ et ε_0 (préciser le vecteur unitaire choisi). Démontrer de même l'expression de \vec{E}_{ext} .
- Q.3** En déduire l'expression de la capacité C du condensateur plan en fonction de ε_0 , S et e .

Soit un élément de surface dS de la surface interne de l'armature fixe.

- Q.4** Quelle est la charge dq de cet élément de surface ? Quel est le champ auquel est soumis cet élément de surface de la part de l'autre armature ?
- Q.5** En déduire, en fonction des données, l'expression vectorielle de la force \vec{F}' à laquelle est soumise l'armature fixe de la part de l'armature mobile. La force est-elle attractive ou répulsive ?

On désigne par \vec{F} la force à laquelle est soumise l'armature mobile de la part de l'armature fixe.

Q.6 Exprimer \vec{F} et effectuer l'application numérique avec $\|\vec{E}\| = 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ et $S = 1 \text{ cm}^2$.

On définit la densité volumique d'énergie électrostatique u_E en un point situé entre les plaques par :

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \|\vec{E}\|^2$$

Q.7 Déterminer l'expression de l'énergie électrostatique totale U_E emmagasinée entre les armatures en fonction de ε_0 , S , e et de la tension U entre les plaques (U est défini comme la différence de potentiel entre l'armature fixe et l'armature mobile) puis en fonction de C et U .

2) Actionneur électrostatique

À partir du condensateur plan de la FIGURE 1, on peut réaliser des actionneurs électrostatiques utilisés couramment dans les systèmes mettant en œuvre des micro-pompes, des membranes déformables ou des micro-interrupteurs.

L'armature fixe est reliée au bâti et l'armature mobile est reliée à un ressort de raideur constante k' . Ce ressort est lui-même relié au bâti fixe à son autre extrémité. Les deux armatures sont reliées à une source de tension réglable U . La permittivité du milieu inter-armature est celle du vide. Il est rappelé que l'action de la pesanteur est négligée.

L'armature mobile ne peut que se translater dans la direction de l'axe Oy et des butées lui interdisent d'entrer en contact avec l'armature fixe. La position qui correspondrait au contact entre les deux armatures est choisie comme origine de l'axe Oy . En l'absence de tension d'alimentation ($U = 0$) et à l'équilibre (repos du ressort), la distance inter-armatures est y_0 .

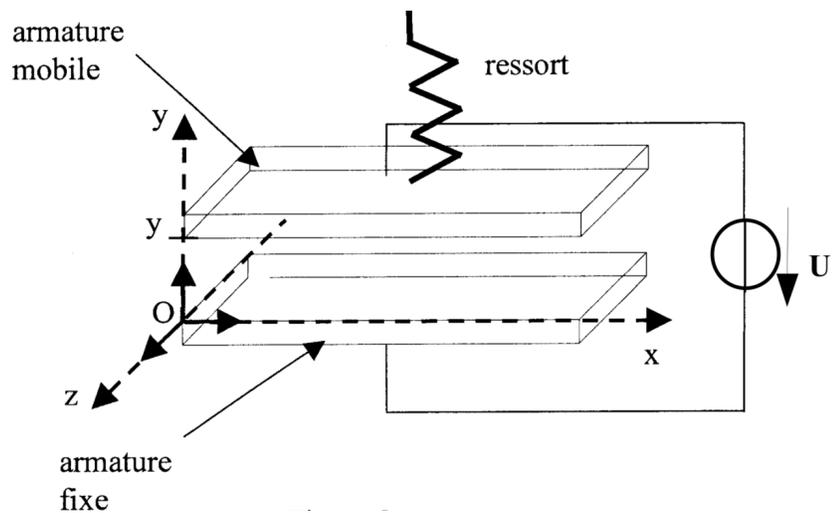


FIGURE 2

On admet que, en présence d'une tension U , l'armature mobile subit une force électrostatique :

$$\vec{F} = F \vec{u}_y = -\frac{1}{2} K \frac{U^2}{y^2} \vec{u}_y$$

Q.8 Donner l'expression de la force de rappel mécanique $\vec{F}_r = F_r \vec{u}_y$ qu'exerce le ressort sur l'armature mobile en fonction de k' , y_0 et y .

Q.9 On applique une tension U constante. Quelle est la relation à l'équilibre (pour $y = y_{eq}$) entre F_r et F ?

Q.10 Pour y variant de 0^+ à y_0 , tracer sur un même graphique l'allure de F_r et l'allure de $(-F)$ dans trois cas de fonctionnements différents obtenus pour trois valeurs différentes de U^2 non nulles. Le premier graphique correspondra au cas où aucun point d'équilibre ne peut être obtenu, le deuxième au cas où un seul point d'équilibre peut être obtenu, enfin le troisième au cas où deux points d'équilibre peuvent être obtenus.

- Q.11** On suppose désormais que la tension d'alimentation U ne peut être que positive ou nulle. Montrer que dans le cas où il existe une unique position d'équilibre, $y_{eq} = \frac{2}{3}y_0$. En déduire la valeur maximale de la tension U , notée U_{max} , pour laquelle cette position d'équilibre existe.
- Q.12** Quelle est la stabilité de cette position d'équilibre correspondant à $U = U_{max}$?
- Q.13** On suppose $0 < U < U_{max}$. Quel est le nombre de positions d'équilibre dans ce cas ? Étudier leur stabilité. Même question pour $U > U_{max}$.
- Q.14** On donne $K = 9 \times 10^{-16} \text{ F} \cdot \text{m}$. On souhaite réaliser un actionneur dont l'épaisseur au repos y_0 vaut 3 mm. Comment doit-on choisir le ressort de manière à obtenir un point d'équilibre stable pour toute valeur de la tension U entre 0 et 100 V ?
- Q.15** Le diélectrique situé entre les deux armatures de l'actionneur a toujours une permittivité égale à celle du vide. Quelle est la surface interne de chacune des deux armatures ? On exprimera le résultat en mm^2 .

••• FIN •••