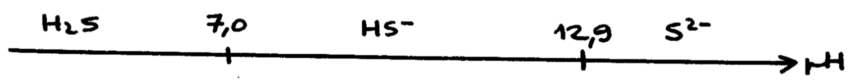
Correction du DM 5

Exercice 1 : Séparation de deux ions en solution

Q.1 Les deux réactions de précipitation s'écrivent :

$$Zn^{2+}_{(aq)} + S^{2-}_{(aq)} = ZnS_{(s)} \quad \text{et} \quad Cu^{2+}_{(aq)} + S^{2-}_{(aq)} = CuS_{(s)}$$

Q.2 Les espèces soufrées présentes en solution sont : $H_2S_{(aq)}$, $HS^-_{(aq)}$ et $S^{2-}_{(aq)}$. Le diagramme de prédominance de ces espèces et le suivant :



Q.3 Lorsque l'équilibre est tout juste atteint (premier grain de solide formé), on a

$$K_s(\mathrm{ZnS}) = [Zn^{2+}_{(aq)}]_{eq} \cdot [S^{2-}_{(aq)}]_{eq}$$

Pour qu'il n'y ai pas de précipitation, la concentration en ions sulfures doit donc vérifier :

$$[S^{2-}_{(aq)}] < [S^{2-}_{(aq)}]_{max} = \frac{K_s(\mathrm{ZnS})}{[Zn^{2+}_{(aq)}]} = 10^{-19,8}\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$$

Q.4 On cherche le pH correspondant à cette condition. On sait que la concentration en sulfure de dihydrogène est constante et que :

$$pH = pK_{a1} + \log\left(\frac{[HS^-]}{[H_2S]}\right) \quad \text{et que} \quad pH = pK_{a2} + \log\left(\frac{[S^{2-}]}{[HS^-]}\right)$$

Donc en sommant ces deux équations : $pH = \dfrac{pK_{a1} + pK_{a2}}{2} + \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{[S^{2-}]}{[H_2S]}\right) < 0,55$

Q.5 Le même raisonnement conduit pour le sulfure de cuivre à la condition $pH < -5,2$ pour ne pas observer la précipitation de ce solide. On en déduit que si le pH vaut $0,5$, le sulfure de cuivre précipite mais pas le sulfure de zinc : la séparation est possible.

Q.6 En milieu acide, l'espèce soufrée prédominante est le sulfure de dihydrogène H_2S. Avant de pouvoir former le précipité, il faut former les ions sulfures, avec les deux réactions acide-base suivantes :

$$H_2S_{(aq)} + H_2O_{(l)} = HS^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)} \quad (K_{a1})$$

puis

$$HS^-_{(aq)} + H_2O_{(l)} = S^{2-}_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)} \quad (K_{a2})$$

En sommant ces deux réactions et la réaction de précipitation, on obtient la réaction de formation du sulfure de zinc à partir du sulfure de dihydrogène :

$$H_2S_{(aq)} + 2\,H_2O_{(l)} + Zn^{2+}_{(aq)} = ZnS_{(s)} + 2\,H_3O^+_{(aq)} \quad (K)$$

de constante $K = \dfrac{K_{a1} \cdot K_{a2}}{K_s(\mathrm{ZnS})} = 10^{3,9}$.

Q.7 À l'équilibre, on a : $K = Q_r = \dfrac{[H3O^+_{(aq)}]^2}{[Zn^{2+}_{(aq)}] \cdot [H2S_{(aq)}]}$, soit :

$$pH = -\log[H3O^+_{(aq)}] = \frac{1}{2}\left(pK_{a1} + pK_{a2} - pK_s(\mathrm{ZnS}) - \log[Zn^{2+}_{(aq)}] - \log[H2S_{(aq)}]\right) = 0,55$$

On retrouve donc bien la même condition pour la précipitation de ce solide.

Exercice 2 : Potentiel de Yukawa

Q.1 q est une charge est s'exprime donc en Coulomb. a est en mètre pour l'homogénéité dans l'exponentielle.

Q.2 L'énoncé indique que le probème est à symétrie sphérique, donc le champ ne dépend pas des angles θ et φ. De plus, pour tout point M, tout plan contenant M et O est un plan de symétrie, donc contient le champ électrostatique. Ce champ est par conséquent radial et s'écrit ici : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$. Ce champ est alors donné par :

$$E_r(r)\vec{u}_r = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V(r) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1+\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\vec{u}_r$$

Q.3 Si $r \ll a$, on peut assimiler l'exponentielle à l'unité et alors $\vec{E}(r) \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$.

Si $r \gg a$, alors $\vec{E}(r) \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a r}\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)\vec{u}_r$.

Q.4 On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon r centrée en O :

$$\oiint \vec{E}(r)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$$

D'où on déduit : $Q(r) = q\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$.

Si $r \ll a$, on peut assimiler l'exponentielle à l'unité et alors $Q(r) \approx q$.

Si $r \gg a$, alors $Q(r) \approx q\dfrac{r}{a}\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right) \to 0$.
Ces résultats semblent indiquer qu'il existe une charge ponctuelle au centre de la distribution et que la charge totale (vue depuis l'infini) est nulle.

Q.5 Par définition de la charge volumique $\rho(r)$, la charge $\mathrm{d}q(r)$ de la coquille spérique vaut

$$\mathrm{d}q(r) = 4\pi\rho(r)r^2\mathrm{d}r = Q(r+\mathrm{d}r) - Q(r)$$

soit à la limite infinitésimale : $\rho(r) = \dfrac{1}{4\pi r^2}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{q}{4\pi a^2 r}\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$.

Q.6 Pour déterminer la charge totale diffuse, il est possible d'intégrer la charge volumique $\rho(r)$ dans tout l'espace :

$$Q_{diff} = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\rho(r)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

... où bien remarquer que la charge totale de la distribution est nulle, donc $Q_{diff} = -q$.

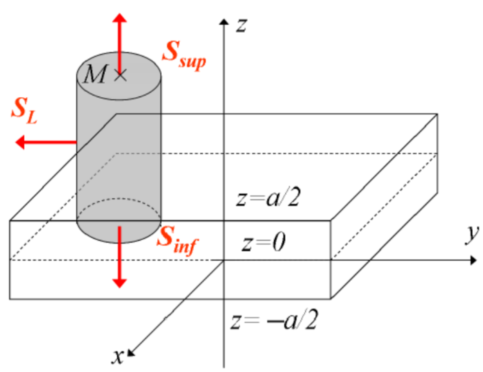
Exercice 3 : Espace entre deux plans

Q.1 Le problème est invariant par toute translation selon les axes (Ox) et (Oy), donc les champs ne dépendent pas des coordonnées x ni y.
Champ électrostatique : Pour tout point M, tout plan contenant M et le vecteur $\vec{u}_z$ est plan de symétrie de la distribution de charges, donc contient le champ électrostatique. On en déduit que ce champ n'a de composante non nulle que suivant (Oz) : $\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{u}_z$.
Champ magnétostatique : Pour tout point M, le plan contenant M ainsi que les vecteurs $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_x$ est plan de symétrie de la distribution de courants : le champ magnétostatique lui est orthogonal en M, donc suivant $\vec{u}_y$: $\vec{B}(M) = B_y(z)\vec{u}_y$.

Q.2 Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie de la distribution de charges et de courants. La champ électrostatique appartient donc à ce plan et le champ magnétostatique lui est orthogonal. D'après la question précédente, ces deux champs sont donc nuls en $z = 0$.

Q.3 On applique les théorèmes de Gauss et d'Ampère pour déterminer les champs électrostatique et magnétostatique.

Champ électrostatique : Le théorème de Gauss appliqué à un cylindre d'axe parallèle à (Oz), de rayon r et dont le plan inférieur se trouve en $z = 0$ et le plan supérieur passe par $M(z)$ donne :

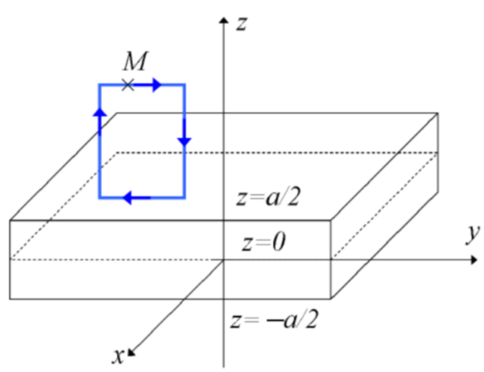


$$\begin{aligned}
\Phi_E &= \oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \iint_{S_L} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S_{inf}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S_{sup}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \iint_{S_{sup}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \pi r^2 E_z(z) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

Avec : $Q_{int} = \begin{cases} \pi r^2 \dfrac{a}{2}\rho & \text{si } z > a/2 \\ \pi r^2 z\rho & \text{si } z < a/2 \end{cases}$. On en déduit que pour $z > 0$:

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z & \text{si } z > \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{\rho z}{\varepsilon_0}\vec{u}_z & \text{si } z < \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

Champ magnétostatique : Le théorème d'Ampère appliqué à un contour carré d'axe porté par (Ox), de côté L et dont le bas se situe $z = 0$ et le haut passe par $M(z)$ donne :



$$\mathcal{C}_B = \oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = LB_y(z) = \mu_0 I_{enlace}$$

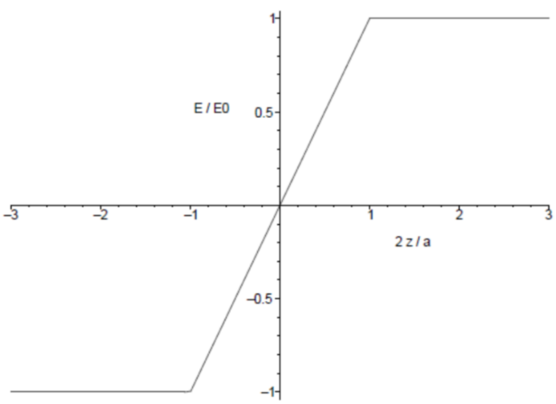
Avec : $I_{enlace} = \begin{cases} -jL\dfrac{a}{2} & \text{si } z > a/2 \\ -jLz & \text{si } z < a/2 \end{cases}$, soit pour $z > 0$:

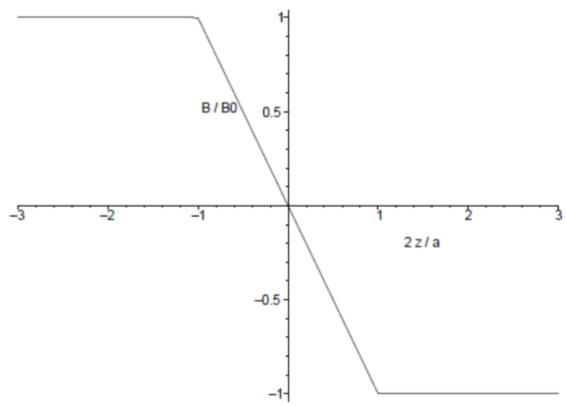
$$\vec{B}(M) = \begin{cases} -\mu_0 j\dfrac{a}{2}\vec{u}_y & \text{si } z > \dfrac{a}{2} \\ -\mu_0 j z\vec{u}_y & \text{si } z < \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

Q.4 Le principe est exactement le même pour la partie $z < 0$. Il est aussi possible d'utiliser les symétries : comme le plan $z = 0$ est un plan de symétrie des distributions de charges et de courants, les champs électrostatique et magnétostatique sont respectivement symétrique et antisymétrique par rapport à ce plan. On a donc pour $z < 0$:

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} -\dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z & \text{si } |z| > \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{\rho z}{\varepsilon_0}\vec{u}_z & \text{si } |z| < \dfrac{a}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \begin{cases} \mu_0 j \dfrac{a}{2}\vec{u}_y & \text{si } |z| > \dfrac{a}{2} \\ -\mu_0 j z \vec{u}_y & \text{si } |z| < \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

Q.5 Tracé des composantes E_z (gauche) et B_y (droite) :





Q.6 Dans ce modèle, on adopte une représentation surfacique des charges et des courants. La densité surfacique de charges s'écrit $\sigma = a\rho$ et la densité surfacique de courant s'écrit $j_s = aj$. Pour $z > 0$, les champs deviennent donc :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = -\mu_0 \frac{j_s}{2}\vec{u}_y$$

Q.7 Toujours par symétrie par rapport au plan $z = 0$, on obtient les expressions de ces champs dans la région $z < 0$:

$$\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \mu_0 \frac{j_s}{2}\vec{u}_y$$

Par conséquent, la discontinuité (différence entre le champ juste au dessus du plan et celui juste en dessous) vaut :

$$\vec{E}(0^+) - \vec{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}(0^+) - \vec{B}(0^-) = -\mu_0 j_s \vec{u}_y$$

Remarque : Cette conclusion se généralise et devient une propriété importante concernant les champs électrique et magnétique (pas uniquement en statique). Dans un cadre général, on considère une surface séparant deux milieux 1 et 2. En notant $\vec{n}_{12}$ le vecteur normal à la surface et orienté du milieu 1 vers le milieu 2, la discontinuité des champs au passage de cette surface s'écrit :

$$\vec{E_2}(0^+) - \vec{E_1}(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{B_2}(0^+) - \vec{B_1}(0^-) = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{n}_{12}$$

Ces deux relations sont appelées relations de passage du champ électromagnétique. Il fut un temps (que les moins de 25 ans ne peuvent pas connaître) où elles étaient à apprendre !