# DS 4* (4 heures)
## *Électromagnétisme*

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Les résultats doivent être **encadrés**. La calculatrice est autorisée.

---

## Exercice 1 : Orage et foudre (d'après CCP PSI 2015)

L'électrosphère est une couche atmosphérique ionisée. L'électrosphère et la Terre, forment un gigantesque condensateur terrestre (Figure 1), où le champ électrique par beau temps est dirigé de l'électrosphère vers la Terre et atteint environ 100 à 120 $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$. Les armatures de ce condensateur sont l'électrosphère d'une part et le globe terrestre d'autre part, entre lesquelles il y a la troposphère et la stratosphère qui constituent le diélectrique, dont l'épaisseur est d'environ 80 km.

L'air comprend en permanence des charges électriques, positives et négatives, créées par les rayonnements cosmiques ou la radioactivité de la Terre. Par beau temps, il en résulte un courant atmosphérique de densité volumique $\vec{j}$ tendant à décharger le condensateur.
Suite aux perturbations atmosphériques et sous certaines conditions, il se forme des nuages orageux en général du type cumulo-nimbus de couleur sombre (Figure 1). Ils constituent une gigantesque machine thermique d'environ 10 km de diamètre dont la base et le sommet sont respectivement à environ 2 km et 15 km d'altitude. Sa formation est rendue possible par l'élévation d'air chaud par des courants ascendants dont la vitesse est de quelques mètres par seconde. Lors de son ascension, cette masse d'air se charge en humidité jusqu'à devenir un nuage. La partie supérieure, où il fait froid, est occupée par les particules de glace, tandis que les gouttes d'eau s'établissent dans la partie inférieure.

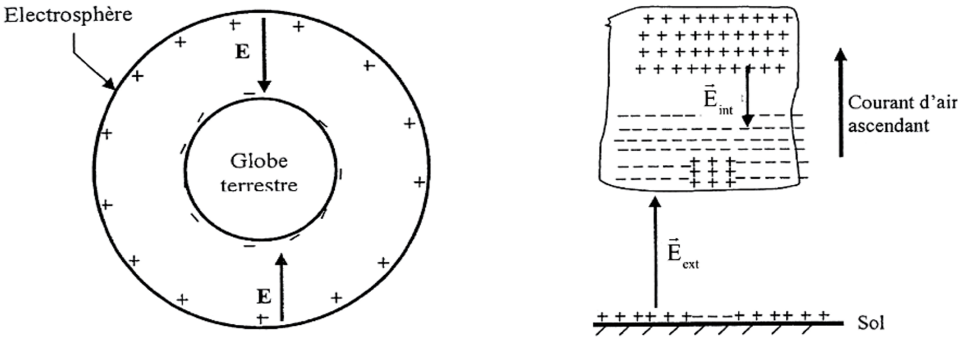


FIGURE 1 – Terre et électrosphère (gauche), cumulonimbus et dipôles électriques (droite)

Les violents courants ascendants provoquent des collisions entre les gouttes d'eau et les micro-particules de glace, ce qui crée des charges électriques par frottement. Ces micro-particules de glace, plus légères et chargées positivement, sont emportées vers le haut par le courant d'air ascendant et occupent ainsi la partie supérieure du nuage qui forme le pôle positif. Les gouttes d'eau chargées négativement s'étab1issent dans la partie inférieure et créent le pôle négatif. Cependant, une petite quantité de charges positives demeurent à la base du nuage. Le nuage fait apparaître sur la Terre, par influence électrique, une charge de signe opposé et crée ainsi deux véritables dipôles électriques (Figure 1) :

- un dipôle interne généré entre les pôles positif et négatif du nuage. Si le champ électrique interne devient suffisamment grand, il provoque un claquage interne dans le nuage ;
- un dipôle externe, généré entre la base du nuage et la surface de la Terre. Si le champ électrique externe atteint des conditions critiques de l'ordre de 20 $\mathrm{kV \cdot m^{-1}}$, il finit par provoquer une grande décharge entre le nuage et la Terre.

**Données générales :**

- Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi} 10^{-9}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$
- Rayon terrestre : $R_T = 6370\,\mathrm{km}$
- Conductivité électrique du sol : $\gamma_s = 1{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$
- Résistance électrique entre deux pieds d'un homme : $\Theta_h = 2{,}5\,\mathrm{k\Omega}$

**Rappels d'électrostatique :**

- Capacité d'un condensateur plan : $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$ ou $S$ est la surface des deux armatures en regard et $e$ la distance entre les armatures.
- Densité volumique d'énergie électrostatique : $w_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ ou E est le champ électrique.
- Énergie stockée dans un condensateur : $W = \dfrac{1}{2}CU^2 = \dfrac{Q^2}{2C}$ où $U$ est la différence de potentiel entre les deux armatures et $Q$ la charge du condensateur.

## 1) Étude d'un condensateur sphérique

Un condensateur sphérique à air (Figure 2), dont la permittivité diélectrique est assimilable à celle du vide $\varepsilon_0$, est formé de deux armatures concentriques, de rayon $R_1$ et $R_2$, avec $R_1 < R_2$. L'armature intérieure de rayon $R_1$ porte une charge totale $Q$ uniformément répartie. L'armature extérieure porte la charge totale $-Q$ uniformément répartie. On travaille ici dans la base classique des coordonnées sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ et en régime permanent.

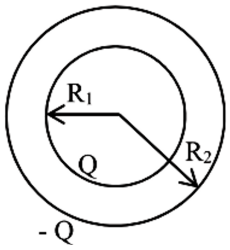


FIGURE 2 – Condensateur sphérique

**Q.1** Par des arguments clairs et précis d'invariance et de symétrie, justifier qu'entre les armatures, le champ électrique est de la forme : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$.

**Q.2** Déterminer l'expression du champ électrique $E_r(r)$ entre les armatures, en fonction de $r$, $Q$ et $\varepsilon_0$.

**Q.3** En déduire la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les deux armatures en fonction de $Q$, $R_1$, $R_2$ et $\varepsilon_0$.

**Q.4** Déterminer alors l'expression de la capacité de ce condensateur sphérique en fonction de $R_1$, $R_2$ et $\varepsilon_0$.

**Q.5** Le diélectrique n'est en réalité pas parfait. Il possède une résistivité électrique certes grande mais finie. Il circule alors un courant de densité volumique dans tout l'espace inter-conducteur. Faire un dessin montrant l'allure et le sens des lignes de courant dans le cas où $Q > 0$.

## 2) Analyse du préambule

En vous appuyant sur le texte fourni en préambule, répondre aux six questions suivantes.

**Q.6** Donner une valeur approchée de la capacité du condensateur délimité par l'électrosphère et le globe terrestre.

**Q.7** Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie électrique stockée en permanence et par beau temps dans L'électrosphère ?

**Q.8** Le champ électrique qui règne à la surface de la Terre est-il, en général, dans le même sens ou en sens opposé suivant que le temps est clément ou orageux ?

**Q.9** Lequel de l'éclair ou de la foudre correspond à un claquage diélectrique interne au nuage ?

**Q.10** La foudre est-elle toujours descendante ou non ?

**Q.11** Quel est l'ordre de grandeur de la différence de potentiel entre la Terre et le nuage juste avant 1'arrivée de la foudre ?

**Q.12** Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie véhiculée par un coup de foudre de courant $I = 50\,\text{kA}$ et d'une durée de 10 ms ? Dans le cadre des énergies renouvelables, vous parait-il judicieux de vouloir récupérer cette énergie ? Une argumentation de quelques mots est attendue.

## 3) Protection contre la foudre

Pour protéger les personnes et les installations électriques en cas de coup de foudre, il convient de dévier le courant de foudre vers la Terre. Une prise de terre (figure 3) est constituée d'une coque hémisphérique métallique de centre $O$, de rayon intérieur $R_a$, et de rayon extérieur $R_b$. On note $\gamma_m$ la conductivité électrique du métal qui constitue cette prise. Le sol, assimilé au demi espace $z < 0$ et de conductivité électrique $\gamma_s$.

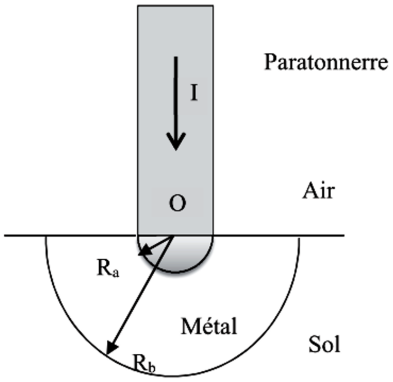


FIGURE 3 – Modèle simplifié d'une prise de terre

La prise de terre se décompose ainsi en deux résistances hémisphériques $\Theta_m$ et $\Theta_s$, l'une en métal de rayon intérieur $R_a$ et de rayon extérieur $R_b$, l'autre associée au sol de rayon intérieur $R_b$ et de rayon extérieur infini. Elle est destinée à recevoir un courant $I$ provenant d'un paratonnerre. Ce courant est supposé indépendant du temps et descendant. On suppose également que le courant qui traverse la prise de terre, est radial. Sa densité est de la forme $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques.

**Q.13** Rappeler l'unité de la grandeur $j(r)$ et donner son expression en fonction de $I$ et $r$.

**Q.14** Exprimer alors le champ électrique $E(r)$ régnant dans le sol.

**Q.15** En déduire l'expression du potentiel électrique $V(r)$ régnant dans le sol en fonction de $I$, $r$ et $\gamma_s$. On supposera que $V = 0$ loin du point $O$.

Cette répartition non uniforme du potentiel à la surface de la Terre explique le foudroiement indirect des hommes ou des animaux. On appelle $\Theta_h$, la résistance d'un corps humain mesurée entre ses deux pieds supposés distants de $a = 1{,}0\,\text{m}$. Pour ne pas être électrocuté (c'est-à-dire pour que son corps ne soit pas traversé par un courant supérieur à une valeur seuil notée $I_{max} = 25\,\text{mA}$), un homme doit rester éloigné d'une distance au moins égale à $D$ de la prise de terre.

**Q.16** Trouver une relation entre $D$, $a$, $\Theta_h$, $I$, $I_{max}$ et $\gamma_s$.

**Q.17** En supposant $D \gg a$, exprimer $D$ en fonction de $a$, $\Theta_h$, $I$, $I_{max}$ et $\gamma_s$.

**Q.18** Faire l'application numérique : évaluer $D$ pour $I = 50\,\text{kA}$. Ce phénomène d'électrocution à distance touche-t-il plutôt les grands animaux (vaches, chevaux) ou les petits animaux (lapins, renards) ?

On cherche maintenant à déterminer l'expression de la résistance d'une coque hémisphérique homogène, de conductivité électrique $\gamma$, comprise entre les rayons $R_i$ et $R_e$ et parcourue par un courant radial. On la décompose en une infinité de coques hémisphériques élémentaires comprises entre les rayons $r$ et $r + \mathrm{d}r$.

**Q.19** Exprimer en fonction de $\gamma$, $r$ et $\mathrm{d}r$, la résistance élémentaire $\mathrm{d}\Theta_C$ d'une coque hémisphérique élémentaire.

**Q.20** En déduire, en fonction de $\gamma$, $R_i$ et $R_e$, la résistance totale $\Theta_C$ de la coque hémisphérique.

**Q.21** Donner l'expression de la résistance globale, notée $\Theta_g$, de la prise de terre en fonction de $\gamma_s$, $\gamma_m$, $R_a$ et $R_b$.

**Q.22** Application numérique : évaluer $\Theta_g$ pour $R_a = 1{,}0\,\text{cm}$, $R_b = 35\,\text{cm}$ et $\gamma_m = 6{,}0\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$. La législation en terme de sécurité électrique impose que $\Theta_g < 25\,\Omega$, est-ce respecté dans le cas de cette prise ? Sinon, que préconisez-vous pour remédier à ce problème ?

## Exercice 2 : Approximation des régimes quasi-stationnaires

L'objet de cet exercice est de dégager ce que recouvre l'approximation des régimes quasi-stationnaires en électromagnétisme (notée dorénavant ARQS).

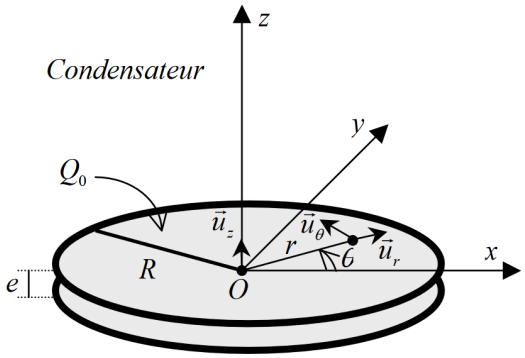


Figure 1. a

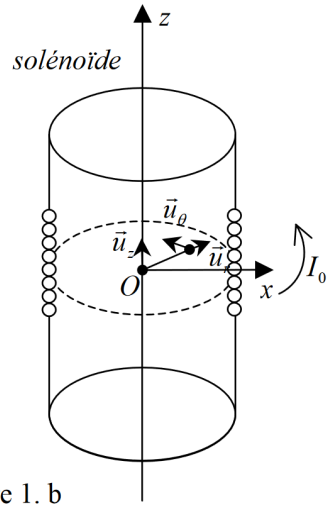


Figure 1. b

**Formulaire :**

- Formule sur les opérateurs vectoriels : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$
- Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques :

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Constantes : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$ ; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-2}\cdot\text{s}^{-2}$ ; $c = 3 \times 10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

**Q.1** Enoncer les équations de Maxwell en présence de charges et de courants. Pour chacune d'entre elles, en donner la forme intégrale.

### 1) Condensateur plan en régime sinusoïdal forcé

On considère un condensateur plan constitué de deux armatures planes de forme circulaire, d'axe $(Oz)$ et de rayon $R$, distantes de $e$ (Figure 1.a). L'espace interarmatures est vide et la charge totale stockée sur l'armature supérieure du condensateur est donnée en notation complexe par :

$$\underline{Q}(t) = Q_0 e^{i\omega t}$$

avec $Q_0$ réel positif). On suppose que $R \gg e$, de sorte à pouvoir négliger tout effet de bord. Vu la géométrie du problème, on travaille en coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ d'axe d'axe $(Oz)$. On s'intéresse ici à un régime non stationnaire de fonctionnement, en l'occurrence un régime sinusoïdal forcé de pulsation $\omega$.

**Q.2** Par une analyse des symétries et invariances du problème, déterminer la forme a priori du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ entre les armatures.

Un raisonnement en ordre de grandeur (non demandé) montre qu'il est légitime de négliger les effet de bords, donc de chercher le champ électromagnétique sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{E} & = & E(r,t)\,\vec{u}_z \\ \vec{B} & = & B(r,t)\,\vec{u}_\theta \end{array} \right.$$

**Q.3** Montrer à partir des équations de Maxwell que la fonction $E(r,t)$ vérifie entre les armatures l'équation :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

On cherche les solutions complexes de la forme : $\underline{E}(r,t) = E_0 f(r) e^{i\omega t}$ avec $\omega$ la pulsation des oscillations et $f(0) = 1$. On définit la variable réelle $u = \dfrac{\omega r}{c}$.

**Q.4** Établir l'équation différentielle à laquelle obéit $f(u)$, qu'on ne cherchera pas à résoudre. La solution de cette équation s'écrit :

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{u}{2}\right)^{2k}$$

**Q.5** Par application de l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer l'expression du champ magnétique complexe $\underline{B}(r,t)$ en fonction de $f(r)$ et des constantes du problème.

On désire maintenant trouver le développement perturbatif du champ électromagnétique à l'intérieur du condensateur. La forme du champ électromagnétique est la même que précédemment, puisque les hypothèses sont les mêmes. En particulier, les effets de bord sont négligés. Nous travaillons toujours en notation complexe.

L'idée fondamentale du traitement est la suivante : à l'ordre le plus bas, le champ électrique entre les armatures est approximativement uniforme (comme en électrostatique) soit en notation complexe : $\vec{\underline{E}}_0 = E_0 e^{i\omega t}\vec{u}_z$ avec $E_0$ réel. Comme ce champ varie au cours du temps, il crée un champ magnétique $\vec{\underline{B}}_1 = \underline{B}_1(r,t)\vec{u}_\theta$ variable et non uniforme a priori. Ce champ magnétique engendre à son tour un champ électrique $\vec{\underline{E}}_2 = \underline{E}_2(r,t)\vec{u}_z$, qui crée lui même un champ magnétique $\vec{\underline{B}}_3 = \underline{B}_3(r,t)\vec{u}_\theta$, qui engendre $\vec{\underline{E}}_4 = \underline{E}_4(r,t)\vec{u}_z$, etc.

**Q.6** Partant de la première expression approchée du champ électrique $\vec{\underline{E}}_0$, déterminer le champ magnétique $\vec{\underline{B}}_1$ par application de l'équation de Maxwell-Ampère.

**Q.7** La présence du champ magnétique modifie le champ électrique, en apportant le terme correctif $\vec{\underline{E}}_2$. De quel phénomène s'agit-il ? À l'aide de l'équation de Maxwell appropriée, déterminer ce terme correctif $\vec{\underline{E}}_2$. On ne retiendra que la solution nulle sur l'axe.

**Q.8** Réitérer ce raisonnement pour aboutir à $\vec{\underline{B}}_3$ et $\vec{\underline{E}}_4$.

**Q.9** Montrer alors que l'expression du champ électrique complexe $\underline{E}(r,t)$ à l'ordre 4 en $u = \dfrac{\omega r}{c}$ s'écrit :

$$\underline{E}(r,t) \approx E_0 \left(1 - \frac{u^2}{4} + \frac{u^4}{64}\right) e^{i\omega t}$$

et en déduire le développement limité de la fonction $f(u)$ à l'ordre 4.

**Q.10** Montrer que l'expression du champ magnétique complexe $\underline{B}(r,t)$ à l'ordre 3 en $u$ s'écrit :

$$\underline{B}(r,t) \approx i\,B_0 \left(\frac{u}{2} - \frac{u^3}{16}\right) e^{i\omega t}$$

on précisera l'expression de $B_0$ en fonction de $E_0$.

**Q.11** Par application du théorème de Gauss à une surface bien choisie, déterminer l'expression de l'amplitude réelle $E_0$ en fonction des paramètres du condensateur. Le théorème de Gauss étant valable à toute fréquence, on peut choisir de se placer à basse fréquence pour répondre à cette question. En déduire $B_0$.

### 2) Solénoïde infini en régime sinusoïdal forcé

On cherche à déterminer le champ électromagnétique créé par un solénoïde infini, parcouru par une intensité $\underline{I}(t) = I_0 e^{i\omega t}$ en notation complexe avec $I_0$ un réel positif. Ce solénoïde de section circulaire comporte $n$ spires jointives par unité de longueur.

**Q.12** Qu'entend-on par l'expression "solénoïde infini" ? Déterminer la forme a priori du champ magnétique.

D'après les hypothèses, on peut montrer qu'il est légitime de chercher le champ électromagnétique sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{E} &= E(r,t)\,\vec{u}_\theta \\ \vec{B} &= B(r,t)\,\vec{u}_z \end{cases}$$

**Q.13** Trouver l'équation à laquelle obéit $B(r,t)$.

**Q.14** Déduire de la partie précédente, l'expression approchée du champ magnétique à l'ordre 4 et du champ électrique à l'ordre 3 en $u$.

**Q.15** Quel est le domaine fréquentiel de validité du théorème d'Ampère ? Par application du théorème d'Ampère à un contour bien choisi, déterminer l'amplitude réelle $B_0$ en fonction des paramètres du solénoïde. En déduire $E_0$.

### 3) Approche énergétique

On fait maintenant l'hypothèse d'un régime lentement variable, c'est-à-dire que l'on suppose que $u = \dfrac{\omega r}{c} \ll 1$ dans toutes les expressions calculées ci-dessus. On suppose négligeables tous les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 dans les expressions des champs.

**Q.16** Evaluer en ordre de grandeur le domaine de fréquences correspondant à cette approximation pour les composants utilisés usuellement en montage d'électricité ou d'électronique. Cette approximation vous semble-t-elle raisonnable ?

**Q.17** D'après ce qui précède, donner l'expression du champ électromagnétique réel $(\vec{E}, \vec{B})$ à l'ordre 1 en $\dfrac{\omega r}{c}$ pour le condensateur d'une part et pour le solénoïde d'autre part.

**Q.18** Que peut-on dire, en ordre de grandeur, du rapport $\left|\dfrac{E}{cB}\right|$ pour $\dfrac{\omega r}{c} \ll 1$ dans le condensateur d'une part et dans le solénoïde d'autre part ? Quel est le sens physique de ce résultat ?

**Q.19** Dans les deux cas, donner l'expression de la densité volumique instantanée d'énergie électromagnétique $u_{em}(r,t)$ toujours dans le cadre de l'approximation $\dfrac{\omega r}{c} \ll 1$.

**Q.20** Quelle approximation est-il légitime de faire dans l'expression de $u_{em}(r,t)$ suivant que l'on soit dans le cas du condensateur ou du solénoïde ? Quel système peut-on qualifier de système à dominante électrique ? magnétique ?

**Q.21** Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(r,t)$ dans le condensateur d'une part et dans le solénoïde d'autre part, toujours pour $\dfrac{\omega r}{c} \ll 1$.

**Q.22** Effectuer un bilan énergétique global sur la zone d'espace correspondant à l'intérieur du condensateur d'une part, du solénoïde d'autre part. Commenter.

### 4) Premier contact avec l'ARQS

**Q.23** Dans l'hypothèse des régimes lentement variables énoncée et étudiée ci-dessus ($\dfrac{\omega r}{c} \ll 1$), déduire de ce qui précède que l'équation de Maxwell-Faraday pour un système « à dominante électrique » s'écrit de manière approchée sous la forme : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0}$. Que peut-on dire de l'équation de Maxwell-Ampère ?

**Q.24** De même, pour un système « à dominante magnétique », donner l'expression approchée des équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère en régime lentement variable.

**Q.25** Peut-on définir sans ambiguïté « l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires » et formuler les équations de Maxwell de manière unique dans le cadre de cette approximation ?

Dans l'ARQS magnétique, on peut montrer que l'équation locale de conservation de la charge est la même qu'en statique : $\text{div}\vec{j} \simeq 0$. Dans ces conditions, on retrouve notamment la loi des nœuds et les lois usuelles de l'électrocinétique, qui relèvent donc de le l'ARQS magnétique (la loi des nœuds n'existe pas dans l'ARQS électrique !). En pratique, sauf dans des systèmes « pathologiques » comme les condensateurs, l'ARQS se confond avec l'ARQS magnétique. La raison est simple : les conducteurs sont neutres, donc la densité volumique de charge est nulle en général, alors que des courants peuvent circuler. Par conséquent, c'est la limite magnétique de l'ARQS qui nous est familière et que l'on nomme souvent tout simplement ARQS.

**• • • FIN • • •**