Correction du DS 4

Exercice 1 : Orage et foudre (d'après CCP PSI 2015)

Q.1 Tout plan contenant le point O est un plan de symétrie de la distribution de charge. Pour un point M donné, tous les plans passants par O et M sont donc plans de symétrie et contiennent le champ électrique. L'intersection de ces plans contenant O et M définit le vecteur radial $\vec{u}_r$, donc le champ s'écrit : $\vec{E} = E(r,\theta,\varphi)\vec{u}_r$.
Par ailleurs, il y a invariance du problème par rapport aux coordonnées θ et φ, donc le champ ne dépend pas de ces coordonnées et on a finalement un champ de la forme : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.

Q.2 On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon r compris entre R_1 et R_2 passant par M où on calcule le champ. La charge intérieure est donc celle de l'armature intérieure, soit Q. Le flux du champ électrique à travers cette sphère vaut $\Phi_E = E(r)\cdot 4\pi r^2$. Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{soit} \quad \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Q.3 Il faut calculer la circulation du champ sur un chemin entre les armatures intérieure et extérieure de deux manières. Par définition du potentiel, on a :

$$\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_{R_1}^{R_2} \overrightarrow{\mathrm{grad}}V\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 - V_2$$

et d'après la question précédente, on a aussi :

$$\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r\cdot \mathrm{d}r\vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

L'égalité donne : $V_1 - V_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$.

Q.4 Par définition, on a $Q = C(V_1 - V_2)$, soit $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)}$.

Q.5 Si $Q > 0$, le champ électrique est radial vers l'extérieur et crée un vecteur densité de courant dans le même sens.

Q.6 On reprend la formule donnant la capacité du condensateur trouvée précédemment avec $R_1 = 6370\,\mathrm{km}$, $R_2 = 6370 + 80\,\mathrm{km}$, ce qui donne : $C = 57{,}1\,\mathrm{mF}$.

Q.7 En prenant $E = 110\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ (valeur moyenne par beau temps, sensiblement constante dans l'électrosphère) on obtient : $U = V_1 - V_2 = eE \simeq 8{,}8\,\mathrm{MV}$. L'énergie stockée est alors : $W = \dfrac{1}{2}CU^2 \simeq 220\,\mathrm{GJ}$.

Q.8 Par temps orageux, le champ électrique s'inverse : par beau temps, il est radial vers l'intérieur, et par temps d'orage, il est radial de la terre vers le nuage.

Q.9 L'éclair correspond à un claquage diélectrique interne au nuage. Un coup de foudre concerne sans doute plutôt la Terre (même si le vocabulaire n'est pas toujours clair).

Q.10 La foudre peut descendre ou monter, suivant le signe des charges mises en jeu entre la terre et le nuage lors de la décharge.

Q.11 Le champ vaut $20\,\mathrm{kV\cdot m^{-1}}$ sur une épaisseur de $2000\,\mathrm{m}$ entre terre et nuage, soit une différence de potentiel $U = 40\,\mathrm{MV}$.

Q.12 L'énergie véhiculée pendant une durée Δt vaut (en supposant le courant et la tension constants) : $W = I\cdot U\,\Delta t = 20\,\mathrm{GJ}$. Cette énergie ne mérite pas d'être récupérée. En effet, ce serait extrêmement compliqué (phénomène frappant aléatoirement) pour une énergie relativement modeste ($20\,\mathrm{GJ}$ est l'énergie délivrée par une éolienne de $5\,\mathrm{MW}$ pendant une heure environ).

Q.13 Le vecteur densité de courant $j(r)$ s'exprime en $\mathrm{A\cdot m^{-2}}$. Le courant I correspond au flux de $\vec{j}$ à travers une demi sphère de rayon r sur laquelle le module j est uniforme : $j(r) = \dfrac{I}{2\pi r^2}$.

Q.14 La loi d'Ohm locale dans le sol $\vec{j} = \gamma_s \vec{E}$ donne le champ électrique dans le sol : $\vec{E} = \dfrac{I}{2\pi r^2 \gamma_s}$.

Q.15 La définition $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$ projetée sur $\vec{u}_r$ donne $E = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ qui s'intègre en tenant compte de la condition limite :

$$V(r) = \frac{I}{2\pi r \gamma_s}$$

Q.16 On se place à la limite de l'électrocution. Entre les deux pieds, on trouve la différence de potentiel maximale supportable grâce à la loi d'Ohm : $U_{max} = \Theta_h I_{max}$. Par la question précédente, cette différence de potentiel s'écrit :

$$U_{max} = \frac{I}{2\pi\gamma_s}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D+a}\right) = \frac{I}{2\pi\gamma_s}\,\frac{a}{D(D+a)} = \Theta_h I_{max}$$

Q.17 Pour $D \gg a$, la relation précédente devient : $\Theta_h I_{max} \simeq \dfrac{I}{2\pi\gamma_s}\,\dfrac{a}{D^2}$, soit : $D \simeq \sqrt{\dfrac{Ia}{2\pi\gamma_s\Theta_h I_{max}}}$.

Q.18 L'application numérique donne : $D \simeq 110\,\mathrm{m}$. Les grands animaux sont plus touchés par ce phénomène puisque leurs pattes sont plus éspacées. Ils sont donc soumis à des différences de potentiel plus grandes, pour des résistances équivalentes.

Q.19 D'après ce qui précède, on a $V(r) = \dfrac{I}{2\pi r\gamma}$, soit $\mathrm{d}U = V(r) - V(r+\mathrm{d}r) = \dfrac{I}{2\pi\gamma}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r+\mathrm{d}r}\right) \simeq \dfrac{I}{2\pi\gamma}\,\dfrac{\mathrm{d}r}{r^2} = \mathrm{d}\Theta_C I$. On en déduit que

$$\mathrm{d}\Theta_C = \frac{\mathrm{d}r}{2\pi\gamma r^2}$$

Q.20 La résistance totale Θ_C de la coque correspond à l'association en série de toutes les résistances infinitésimales calculée à la question précédente, soit en sommant :

$$\Theta_C = \int_{R_i}^{R_e} \mathrm{d}\Theta_C = \int_{R_i}^{R_e} \frac{\mathrm{d}r}{2\pi\gamma r^2} = \frac{1}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}\right)$$

Q.21 La prise de terre est l'association en série de la résistance métallique puis du sol (coque hémisphérique de rayon extérieur infini), soit une résistance globale :

$$\Theta_g = \frac{1}{2\pi\gamma_m}\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b}\right) + \frac{1}{2\pi\gamma_s R_b}$$

Q.22 L'application numérique donne $\Theta_g = 47\,\Omega$. La législation n'est donc pas respectée dans le cas de cette prise. Pour diminuer la résistance globale, il faudrait diminuer la résistance du sol qui est le terme prédominant. Cela peut se faire en augmentant R_b, c'est-à-dire en augmentant la surface de contact métal-sol.

Exercice 2 : Création de champs magnétiques (d'après CCP MP 2017)

Q.1 Les équations de Maxwell sont dans le cas général :

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{(M-G)} \qquad\qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad \text{(M-flux)}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(M-F)} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{(M-A)}$$

Q.2 Dans le cadre de cette approximation, l'équation de Maxwell-Ampère devient : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$. Le théorème d'Ampère, qui est la formulation intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit dans ce cas :

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{enlace}$$

Q.3 Le solénoïde étant infini :

- le plan contenant le point M étudié et orthogonal à l'axe (Ox) est un plan de symétrie des courants, $\vec{B}$ est donc orthogonal à ce plan, donc est selon $\vec{u}_x$.
- le système est invariant par translation le long de (Ox) et par rotation autour de (Ox). Le champ $\vec{B}$ ne dépend donc que de la distance r du point M à l'axe (Ox).

Le champ se met donc sous la forme : $\vec{B} = B(r)\vec{u}_x$. En appliquant le théorème d'ampère à n'importe quel contour à l'extérieur du solénoïde, le courant enlacé étant nul, on en déduit que la circulation de $\vec{B}$ également. Par conséquent, le champ magnétique est constant à l'extérieur du solénoïde. Le même raisonnement conduit à un champ magnétique constant à l'intérieur du solénoïde. Le solénoïde sépare donc bien l'éspace en deux zones de champ uniforme.

Q.4 On applique à nouveau le théorème d'Ampère, cette fois à un contour fermé rectangulaire, à cheval entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde, dont 2 côtés de longueur h sont parallèles à l'axe (Ox) : $hB_{int} - hB_{ext} = \mu_0 nhI$. Comme $B_{ext} = 0$, on obtient à l'intérieur du solénoïde : $\vec{B} = \mu_0 nI\vec{u}_x$.

Q.5 D'après le théorème de supersposition, le champ créé dans la zone commune aux deux solénoïdes s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 = \vec{B}_x + \vec{B}_y &= \mu_0 nI_0\left(\cos(\omega t)\vec{u}_x + \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})\vec{u}_y\right)\\ &= \mu_0 nI_0\left(\cos(\omega t)\vec{u}_x - \sin(\omega t)\vec{u}_y\right)\\ &= B_1\vec{u}\end{aligned}$$

Il s'agit d'un champ de norme $B_1 = \mu_0 nI_0$, tournant à la vitesse $\Omega = -\omega$ (rotation dans le sens horaire) dans le plan (xOy).

Q.6 Chaque fil de section a^2 est parcouru par un courant I, soit un vecteur densité de courant $\vec{j} = \dfrac{I}{a^2}\vec{u}_\theta$.

Q.7 L'analyse des invariances et symétries indique que le champ est de la forme : $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$. De plus, le champ est constant à l'intérieur du solénoïde et on suppose toujours que le champ à l'extérieur est nul. En appliquant le théorème d'Ampère à un contour rectangulaire de longueur h à cheval sur le solénoïde (un des côtés parallèle à (Oz) se trouve à l'intérieur du solénoïde, l'autre se trouve à l'extérieur), on obtient :

$$hB_0 = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \mu_0 \int_{R_1}^{R_2} \int_0^h \vec{j} \cdot \vec{u}_\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \mu_0 \frac{I}{a^2}(R_2 - R_1)h$$

On trouve donc bien : $B_0 = \mu_0 \dfrac{I}{a^2}(R_2 - R_1)$.

Q.8 L'application numérique donne : $I = 16\,\mathrm{A}$. C'est un courant très grand, donc l'utilisation d'un matériau supraconducteur est indispensable.

Q.9 On prend le rotationel de l'équation de Maxwell-Ampère, pour obtenir :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}) = -\Delta\vec{B} = \mu_0 \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{j} = -\mu_0 \Lambda \vec{B}$$

Soit : $\Delta\vec{B} - \mu_0 \Lambda \vec{B} = \vec{0}$.

Q.10 Cette équation peur se mettre sous la forme : $\Delta\vec{B} - \dfrac{1}{\delta^2}\vec{B} = \vec{0}$, avec $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \Lambda}}$ une longueur caractéristique.

Q.11 Le champ magnétique extérieur étant uniforme, les sources du champ sont invariantes par translation selon (Oy) et (Oz). Le supraconducteur possède les mêmes invariances (demi-espace infini) le champ qui y règne ne dépend donc que de x.

Q.12 L'équation différentielle vérifiée par le champ magnétique se met alors sous la forme : $\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{B}}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{1}{\delta^2}\vec{B} = \vec{0}$. Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$\vec{B} = \vec{A}_1 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) + \vec{A}_2 \exp\left(+\frac{x}{\delta}\right)$$

avec $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$ des vecteurs constants. Comme le champ ne peut pas diverger pour $x \to -\infty$, $\vec{A}_1 = \vec{0}$. Par continuité du champ en $x = 0$, on a de plus $\vec{A}_2 = B_0 \vec{u}_z$. Finalement, on a dans le supraconducteur $(x < 0)$: $\vec{B} = B_0 \exp\left(+\dfrac{x}{\delta}\right)\vec{u}_z$.

Q.13 D'après l'équation de Maxwell-Ampère, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = -\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\vec{u}_y = \mu_0 \vec{j}$, donc :

$$\vec{j} = -\frac{B_0}{\mu_0 \delta} \exp\left(+\frac{x}{\delta}\right)\vec{u}_y$$

Q.14 La longueur caractéristique δ d'atténuation du champ et de la densité volumique de courant est très faible devant l'épaisseur du supraconducteur, donc le champ magnétique et les courants sont localisés uniquement au niveau de la surface. C'est l'effet Meisner.

Q.15 Le champ est constant de norme B_0 à l'intérieur du solénoïde et décroît exponentiellement sur une echelle de quelques δ dans le supraconducteur.