Correction du DS 4*

Exercice 1 : Orage et foudre (d'après CCP PSI 2015)

Q.1 Tout plan contenant le point O est un plan de symétrie de la distribution de charge. Pour un point M donné, tous les plans passants par O et M sont donc plans de symétrie et contiennent le champ électrique. L'intersection de ces plans contenant O et M définit le vecteur radial $\vec{u}_r$, donc le champ s'écrit : $\vec{E} = E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_r$.
Par ailleurs, il y a invariance du problème par rapport aux coordonnées θ et φ, donc le champ ne dépend pas de ces coordonnées et on a finalement un champ de la forme : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.

Q.2 On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon r compris entre R_1 et R_2 passant par M où on calcule le champ. La charge intérieure est donc celle de l'armature intérieure, soit Q. Le flux du champ électrique à travers cette sphère vaut $\Phi_E = E(r) \cdot 4\pi r^2$. Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{soit} \quad \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Q.3 Il faut calculer la circulation du champ sur un chemin entre les armatures intérieure et extérieure de deux manières. Par définition du potentiel, on a :

$$\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_{R_1}^{R_2} \overrightarrow{\mathrm{grad}} V \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 - V_2$$

et d'après la question précédente, on a aussi :

$$\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r \cdot \mathrm{d}r\vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

L'égalité donne : $V_1 - V_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$.

Q.4 Par définition, on a $Q = C(V_1 - V_2)$, soit $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)}$.

Q.5 Si $Q > 0$, le champ électrique est radial vers l'extérieur et crée un vecteur densité de courant dans le même sens.

Q.6 On reprend la formule donnant la capacité du condensateur trouvée précédemment avec $R_1 = 6370\,\mathrm{km}$, $R_2 = 6370 + 80\,\mathrm{km}$, ce qui donne : $C = 57{,}1\,\mathrm{mF}$.

Q.7 En prenant $E = 110\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$ (valeur moyenne par beau temps, sensiblement constante dans l'électrosphère) on obtient : $U = V_1 - V_2 = eE \simeq 8{,}8\,\mathrm{MV}$. L'énergie stockée est alors : $W = \dfrac{1}{2}CU^2 \simeq 220\,\mathrm{GJ}$.

Q.8 Par temps orageux, le champ électrique s'inverse : par beau temps, il est radial vers l'intérieur, et par temps d'orage, il est radial de la terre vers le nuage.

Q.9 L'éclair correspond à un claquage diélectrique interne au nuage. Un coup de foudre concerne sans doute plutôt la Terre (même si le vocabulaire n'est pas toujours clair).

Q.10 La foudre peut descendre ou monter, suivant le signe des charges mises en jeu entre la terre et le nuage lors de la décharge.

Q.11 Le champ vaut $20\,\mathrm{kV\cdot m^{-1}}$ sur une épaisseur de $2000\,\mathrm{m}$ entre terre et nuage, soit une différence de potentiel $U = 40\,\mathrm{MV}$.

Q.12 L'énergie véhiculée pendant une durée Δt vaut (en supposant le courant et la tension constants) : $W = I\cdot U\,\Delta t = 20\,\mathrm{GJ}$. Cette énergie ne mérite pas d'être récupérée. En effet, ce serait extrêmement compliqué (phénomène frappant aléatoirement) pour une énergie relativement modeste ($20\,\mathrm{GJ}$ est l'énergie délivrée par une éolienne de $5\,\mathrm{MW}$ pendant une heure environ).

Q.13 Le vecteur densité de courant $j(r)$ s'exprime en $\mathrm{A\cdot m^{-2}}$. Le courant I correspond au flux de $\vec{j}$ à travers une demi sphère de rayon r sur laquelle le module j est uniforme : $j(r) = \dfrac{I}{2\pi r^2}$.

Q.14 La loi d'Ohm locale dans le sol $\vec{j} = \gamma_s \vec{E}$ donne le champ électrique dans le sol : $\vec{E} = \dfrac{I}{2\pi r^2 \gamma_s}$.

Q.15 La définition $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} V$ projetée sur $\vec{u}_r$ donne $E = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ qui s'intègre en tenant compte de la condition limite :

$$V(r) = \frac{I}{2\pi r \gamma_s}$$

Q.16 On se place à la limite de l'électrocution. Entre les deux pieds, on trouve la différence de potentiel maximale supportable grâce à la loi d'Ohm : $U_{max} = \Theta_h I_{max}$. Par la question précédente, cette différence de potentiel s'écrit :

$$U_{max} = \frac{I}{2\pi\gamma_s}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D+a}\right) = \frac{I}{2\pi\gamma_s}\,\frac{a}{D(D+a)} = \Theta_h I_{max}$$

Q.17 Pour $D \gg a$, la relation précédente devient : $\Theta_h I_{max} \simeq \dfrac{I}{2\pi\gamma_s}\,\dfrac{a}{D^2}$, soit : $D \simeq \sqrt{\dfrac{Ia}{2\pi\gamma_s\Theta_h I_{max}}}$.

Q.18 L'application numérique donne : $D \simeq 110\,\mathrm{m}$. Les grands animaux sont plus touchés par ce phénomène puisque leurs pattes sont plus éspacées. Ils sont donc soumis à des différences de potentiel plus grandes, pour des résistances équivalentes.

Q.19 D'après ce qui précède, on a $V(r) = \dfrac{I}{2\pi r\gamma}$, soit $\mathrm{d}U = V(r) - V(r+\mathrm{d}r) = \dfrac{I}{2\pi\gamma}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r+\mathrm{d}r}\right) \simeq \dfrac{I}{2\pi\gamma}\,\dfrac{\mathrm{d}r}{r^2} = \mathrm{d}\Theta_C I$. On en déduit que

$$\mathrm{d}\Theta_C = \frac{\mathrm{d}r}{2\pi\gamma r^2}$$

Q.20 La résistance totale Θ_C de la coque correspond à l'association en série de toutes les résistances infinitésimales calculée à la question précédente, soit en sommant :

$$\Theta_C = \int_{R_i}^{R_e} \mathrm{d}\Theta_C = \int_{R_i}^{R_e} \frac{\mathrm{d}r}{2\pi\gamma r^2} = \frac{1}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}\right)$$

Q.21 La prise de terre est l'association en série de la résistance métallique puis du sol (coque hémisphérique de rayon extérieur infini), soit une résistance globale :

$$\Theta_g = \frac{1}{2\pi\gamma_m}\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b}\right) + \frac{1}{2\pi\gamma_s R_b}$$

Q.22 L'application numérique donne $\Theta_g = 47\,\Omega$. La législation n'est donc pas respectée dans le cas de cette prise. Pour diminuer la résistance globale, il faudrait diminuer la résistance du sol qui est le terme prédominant. Cela peut se faire en augmentant R_b, c'est-à-dire en augmentant la surface de contact métal-sol.

Exercice 2 : Approximation des régimes quasi-stationnaires

Q.1 Les équations de Maxwell s'écrivent dans le cas général :

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{(M-G)} \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad \text{(M-flux)}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(M-F)} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{(M-A)}$$

Les formulations intégrales correspondantes sont :

$$\oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{(théorème de Gauss)} \qquad \oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \quad \text{(flux conservatif de B)}$$

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\right) \quad \text{(loi de Faraday)}$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{enlace} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\right) \quad \text{(théorème d'Ampère généralisé)}$$

Q.2 Le système est invariant par rotation autour de l'axe (Oz). Les champ ne dépendent donc pas de la coordonnée θ. Pour tout point M, le plan contenant M et l'axe (Oz) est plan de symétrie du système, donc contient le champ électrique. Le champ magnétique lui est en revanche orthogonal. Ainsi, le champ électromagnétique est à priori de la forme :

$$\vec{E}(M,t) = E_r(r,z,t)\vec{u}_r + E_z(r,z,t)\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}(M,t) = E_\theta(r,z,t)\vec{u}_\theta$$

Q.3 Le milieu inter-armatures est le vide, donc l'application du rotationnel sur l'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

soit en projection sur $\vec{u}_z$ et d'après la formule du laplacien donnée : $\dfrac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E}{\partial r} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$.

Q.4 En injectant la forme de la solution recherchée dans l'équation précédente, on trouve :

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \frac{\omega^2}{c^2}f(r) = 0$$

Comme $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = \dfrac{\omega}{c}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}$, il vient : $f''(u) + \dfrac{1}{u}f'(u) + f(u) = 0$.

Q.5 L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit dans le condensateur : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$, soit avec le formulaire donné :

$$-\frac{\partial \underline{E}}{\partial r}\vec{u}_\theta = E_0 f'(r)e^{i\omega t}\vec{u}_\theta = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\vec{u}_\theta$$

On en déduit que $\underline{B}(r,t) = -i\dfrac{E_0}{\omega}f'(r)e^{i\omega t}$.

Q.6 L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit : $\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{B}}_1 = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \underline{\vec{E}}_0}{\partial t}$, soit comme $\underline{\vec{B}}_1$ est suivant $\vec{u}_\theta$ et qu'il ne dépend que de r et de t, on a en projection sur $\vec{u}_z$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\underline{B}_1)}{\partial r} = \frac{i\omega}{c^2}E_0 e^{i\omega t} \Longrightarrow \underline{B}_1(r,t) = \frac{i\omega r}{2c^2}E_0 e^{i\omega t}$$

Q.7 Il s'agit d'un phénomène d'induction (de Neumann). L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{E}}_2 = -\frac{\partial \underline{E}_2}{\partial r}\vec{u}_\theta = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}_1}{\partial t} \Longrightarrow \underline{E}_2(r,t) = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2}E_0 e^{i\omega t}$$

Q.8 Le même raisonnement conduit à : $\underline{B}_3(r,t) = -\dfrac{i\omega^3 r^3}{16c^4}E_0 e^{i\omega t}$ puis $\underline{E}_4(r,t) = \dfrac{\omega^4 r^4}{64c^4}E_0 e^{i\omega t}$.

Q.9 Le champ électrique dans le condensateur est la somme des différentes contributions, soit :

$$\underline{E}(r,t) = \underline{E}_0 + \underline{E}_2(r,t) + \underline{E}_4(r,t) + ... = E_0\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} + \frac{\omega^4 r^4}{64c^4} + ...\right)e^{i\omega t}$$

qui est bien le résultat attendu.

Q.10 Le champ magnétique dans le condensateur est la somme des différentes contributions, soit :

$$\underline{B}(r,t) = \underline{B}_1(r,t) + \underline{B}_3(r,t) + ... = iE_0\left(\frac{\omega r}{2c^2} - \frac{\omega^3 r^3}{16c^3} + ...\right)e^{i\omega t} = i\frac{E_0}{c}\left(\frac{\omega r}{2c} - \frac{\omega^3 r^3}{16c^2} + ...\right)e^{i\omega t}$$

qui est bien le résultat demandé avec $B_0 = \dfrac{E_0}{c}$.

Q.11 On applique le théorème de Gauss à une surface cylindrique fermée contenant l'armature du bas (de charge $-Q_0$) et on ne retient que le terme dominant dans l'expression du champ électrique (à très basse fréquence, le champ devient constant). On obtient : $E_0 = -\dfrac{Q_0}{\varepsilon_0 S}$ puis $B_0 = -\dfrac{Q_0}{\varepsilon_0 c S}$.

Q.12 Le modèle du solénoïde infini consiste à négliger les effets de bords. Il est valide tant que sa longueur est très grande devant son rayon. En négligeant les effets de bords, le système est invariant par symétrie le long de l'axe (Oz) et par rotation autour de cet axe. Le champ magnétique ne dépend donc a priori que de r et de t. De plus, pour tout point M, le plan passant par M et perpendiculaire à l'axe (Oz) est un plan de symétrie des courants donc le champ magnétique lui est perpendiculaire en M. Finalement, le champ magnétique est de la forme : $\vec{B}(M,t) = B_z(r,t)\vec{u}_z$.

Q.13 En appliquant le rotationel à l'équation de Maxwell-Ampère, on trouve : $\dfrac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B}{\partial r} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$. Il s'agit de l'équation que le champ électrique vérifiait dans le condensateur.

Q.14 Le rôle des champs électrique et magnétique est inversé par rapport à la partie précédente. On a donc :

$$\underline{B}(r,t) \approx B_0\left(1 - \frac{u^2}{4} + \frac{u^4}{64}\right)e^{i\omega t}$$

Q.15 L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{E}}_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\underline{E}_1)}{\partial r}\vec{u}_z = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}_0}{\partial t} \Longrightarrow \underline{E}_1(r,t) = -iB_0\frac{\omega r}{2}e^{i\omega t}$$

soit par analogie avec ce qui précède :

$$\underline{E}(r,t) \approx -i\,cB_0\left(\frac{u}{2} - \frac{u^3}{16}\right)e^{i\omega t}$$

Q.16 Le théorème d'Ampère (non généralisé) n'est valable qu'en statique, c'est-à-dire en très basse fréquence. L'application de ce théorème à un contour rectangulaire de longueur h quelconque, dont deux côtés sont parallèles à l'axe (Oz) (un à l'intérieur du solénoïde et l'autre à l'extérieur), donne : $B_0 = \mu_0 nI$.

Q.17 La taille d'un montage électronique usuel est au maximum de l'ordre du mètre. Pour que l'approximation proposée soit valide, il suffit que $f \ll \dfrac{c}{2\pi r} \simeq 10\,\text{MHz}$. C'est une approximation légitime : il est rare de travailler à de telles fréquences en électronique.

Q.18 On a pour le condensateur : $\left\{\begin{array}{lcl} \underline{\vec{E}} & \simeq & E_0 e^{i\omega t}\vec{u}_z \\ \underline{\vec{B}} & \simeq & \dfrac{iE_0}{2c}\dfrac{\omega r}{c}e^{i\omega t}\vec{u}_\theta \end{array}\right.$ et pour le solénoïde : $\left\{\begin{array}{lcl} \underline{\vec{E}} & \simeq & -\dfrac{icB_0}{2}\dfrac{\omega r}{c}e^{i\omega t}\vec{u}_\theta \\ \underline{\vec{B}} & \simeq & B_0 e^{i\omega t}\vec{u}_z \end{array}\right.$.

Q.19 Ainsi, pour $u \ll 1$, on a :

- pour le condensateur : $\left|\dfrac{E}{cB}\right| \simeq \dfrac{2c}{\omega r} \gg 1$
- pour le solénoïde : $\left|\dfrac{E}{cB}\right| \simeq \dfrac{\omega r}{2c} \ll 1$

Q.20 Pour le condensateur, on a : $u_{em}(r,t) = \dfrac{\varepsilon_0}{2}E_0^2\cos^2(\omega t) + \dfrac{1}{2\mu_0 c^2}\left(\dfrac{\omega r}{2c}\right)^2 E_0^2\sin^2(\omega t)$.

Pour le solénoïde : $u_{em}(r,t) = \dfrac{\varepsilon_0 c^2}{2}B_0^2\left(\dfrac{\omega r}{2c}\right)^2\sin^2(\omega t) + \dfrac{1}{2\mu_0}B_0^2\cos^2(\omega t)$.

Q.21 D'après l'approximation $u \ll 1$, il est possible de négliger la contribution magnétique à l'énergie dans le condensateur, et la contribution électrique à l'énergie dans le solénoïde. On peut donc dire que le condensateur est à dominante électrique et que le solénoïde est à dominante magnétique.

Q.22 Dans le cas du condensateur, on a : $\vec{\Pi}(r,t) = \dfrac{E_0^2}{4c\mu_0}\dfrac{\omega r}{c}\sin(2\omega t)\vec{u}_r$ et pour le solénoïde :
$\vec{\Pi}(r,t) = \dfrac{cB_0^2}{4\mu_0}\dfrac{\omega r}{c}\sin(2\omega t)\vec{u}_r$.

Q.23 On calcule dans un premier temps le flux du vecteur de Poynting à travers la surface portée par le système, qui représente la puissance perdue suite à la propagation de l'énergie électromagnétique. Dans le cas du condensateur, la seule contribution vient de la surface latérale, donc :

$$\mathcal{P}_{perdue} = \iint \vec{\Pi}(R,t)\cdot\vec{u}_r R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \frac{\pi e R E_0^2}{2c\mu_0}\frac{\omega R}{c}\sin(2\omega t)$$

Pour le solénoïde, on réalise ce bilan de puissance sur une portion h du système. La seule contribution vient également de la surface latérale, soit :

$$\mathcal{P}_{perdue} = \iint \vec{\Pi}(R,t)\cdot\vec{u}_r R\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \frac{\pi h R c B_0^2}{2\mu_0}\frac{\omega R}{c}\sin(2\omega t)$$

Dans un second temps, on détermine l'énergie électromagnétique totale contenue dans le système, pour le condensateur :

$$U_{em}(t) = \iint u_{em}(r,t) r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \simeq \pi e R^2\frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2\cos^2(\omega t)$$

et pour le solénoïde :

$$U_{em}(t) = \iint u_{em}(r,t) r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \simeq \pi h R^2\frac{1}{2\mu_0}B_0^2\cos^2(\omega t)$$

Dans les deux cas, on vérifie que $\dfrac{\mathrm{d}U_{em}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{perdue} = 0$, ce qui traduit la conservation de l'énergie.

Q.24 Dans un système à dominante électrique comme le condensateur, on vient de voir que le champ électrique a la même structure qu'en électrostatique en basse fréquence. Donc l'équation de Maxwell-Faraday se réduit à $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{0}$. En revanche, le champ magnétique étant dû aux variations du champ électrique, il n'est pas possible de simplifier l'équation de Maxwell-Ampère qui reste $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

Q.25 Dans un système à dominante magnétique comme le solénoïde, le champ magnétique a la même expression qu'en statique en basse fréquence. Donc l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit de manière approchée : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$. Par contre, le champ électrique est induit par les variations du champ magnétique, donc il faut conserver l'équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

Q.26 Non, on ne peut pas parler sans ambiguïté de l'ARQS, ni énoncer les équations de Maxwell dans cette approximation.