

Correction du DS5

Exercice 1 : Téléphonie mobile de 4^e génération (d'après CCP MP 2014)

Q.1 Les équations de Maxwell s'écrivent dans l'air et en l'absence de sources :

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \text{ (M.G)} & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ (M.}\varphi\text{)} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ (M.F)} & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ (M.A)} \end{array}$$

Q.2 On applique le rotationnel à l'équation de Maxwell-Faraday, ce qui donne :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

L'équation de propagation s'écrit finalement : $\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ qui est l'équation de d'Alembert, on a donc par identification la vitesse de propagation qui vaut $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$.

Q.3 L'onde se propageant dans l'air dans la direction $\vec{e}_z$, le vecteur d'onde s'écrit : $\vec{k} = k\vec{e}_z$ avec $k = \frac{\omega}{c}$ le module d'onde. L'amplitude complexe du champ est suivant la direction de polarisation, c'est-à-dire $\vec{e}_x$.

Q.4 Le champ est donc de la forme : $\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{E}_m \exp[j(\omega t - kz)]\vec{e}_x$.

Q.5 D'après la convention choisie pour la notation complexe, l'équation de propagation s'écrit : $-k^2 \underline{\vec{E}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \underline{\vec{E}}$. La relation de dispersion s'écrit alors : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, compatible avec l'expression du module d'onde écrite précédemment.

Q.6 Le champ magnétique est donné par la relation de structure du champ (équivalente à l'équation de Maxwell-Ampère en notation complexe) :

$$\underline{\vec{B}}(M, t) = \frac{1}{c} \vec{e}_z \wedge \underline{\vec{E}} = \frac{1}{c} \underline{E}_m \exp[j(\omega t - kz)]\vec{e}_y$$

Q.7 On obtient les champs réels en prenant la partie réelle des champs complexes calculés, ce qui permet d'obtenir :

$$\vec{E}(M, t) = E_m \cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \frac{E_m}{c} \cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e}_y$$

Q.8 Le vecteur de Poynting est défini par : $\vec{R}(M, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_m^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz + \varphi)\vec{e}_z$. Il s'exprime en Watt par mètre carré : son flux à travers une surface représente la puissance qui traverse cette surface.

Q.9 D'après l'expression du vecteur de Poynting donné à la question précédente, on a :

$$\|\langle \vec{R}(M) \rangle\| = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_m^2$$

On obtient la forme attendue, avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

Q.10 En utilisant la formule donnée et l'expression obtenue de la norme de la valeur moyenne du vecteur de Poynting, on trouve : $E_m = \sqrt{\frac{P_a G}{2\pi\epsilon_0 c d^2}}$.

Q.11 L'application numérique donne $E_{m1} = 4,2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, ce qui satisfait les deux normes.

Q.12 On trouve cette fois $E_{m1} = 7,7 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Ce champ est compatible avec la norme en France mais pas dans les autres pays cités.

Q.13 Les champs sont de la forme : $\vec{E}_i(M, t) = \underline{E}_{mi} \exp[j(\omega t - kz)]\vec{e}_x$ et $\vec{B}_i(M, t) = \frac{1}{c} \underline{E}_{mi} \exp[j(\omega t - kz)]\vec{e}_y$.

Q.14 De même, la direction de propagation devient $-\vec{u}_z$, et on obtient la champ magnétique avec la relation de structure :

$$\vec{E}_r(M, t) = \underline{E}_{mr} \exp[j(\omega t + kz)]\vec{e}_x \text{ et } \vec{B}_r(M, t) = \frac{1}{c}(-\vec{e}_z) \wedge \vec{E}_r = -\frac{1}{c} \underline{E}_{mr} \exp[j(\omega t + kz)]\vec{e}_y.$$

Q.15 Les champs étant nuls dans le métal, la continuité à l'interface s'écrit : $\vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t) = 0$. Ainsi, $\underline{E}_{mr} = -\underline{E}_{mi}$, soit un coefficient de réflexion $\underline{r} = -1$.

Q.16 Le champ électrique complexe total s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{total}(M, t) &= \vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t) \\ &= \underline{E}_{mi} (\exp[j(\omega t - kz)] - \exp[j(\omega t + kz)]) \vec{e}_x \\ &= \underline{E}_{mi} (\exp[j(\omega t - kz + \varphi)] - \exp[j(\omega t + kz + \varphi)]) \vec{e}_x \\ &= \underline{E}_{mi} \exp[j(\omega t + \varphi)] (e^{-jkz} - e^{jkz}) \vec{e}_x \\ &= \underline{E}_{mi} \exp[j(\omega t + \varphi)] (-2j \sin(kz)) \vec{e}_x \end{aligned}$$

Par conséquent, le champ réel total est : $\vec{E}_{total}(M, t) = 2E_{mi} \sin(\omega t + \varphi) \sin(kz) \vec{e}_x$. Il s'agit d'une onde stationnaire.

Q.17 cf cours.

Q.18 Les maxima d'amplitude sont appelés ventres et les points d'amplitude nulle sont les nœuds.

Q.19 Deux ventres (ou deux nœuds) sont séparés d'une distance $\frac{\lambda}{2}$, un ventre et un nœud adjacents sont séparés de $\frac{\lambda}{4}$.

Q.20 Le champ électrique complexe total s'écrit maintenant :

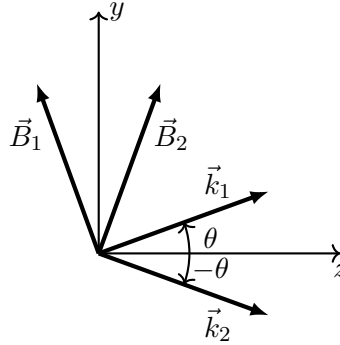
$$\begin{aligned} \vec{E}_{total}(M, t) &= \vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t) \\ &= \underline{E}_{mi} (\exp[j(\omega t - kz)] + r e^{j\alpha} \exp[j(\omega t + kz)]) \vec{e}_x \\ &= \underline{E}_{mi} \exp[j(\omega t - kz)] (1 + r \exp[j(\alpha + 2kz)]) \vec{e}_x \\ &= (1 + r \exp[j(\alpha + 2kz)]) \vec{E}_i(M, t) \end{aligned}$$

Ainsi, on pose $\underline{f}(z) = 1 + r \exp[j(\alpha + 2kz)]$.

Q.21 Le module du champ électrique incident complexe est $\|\vec{E}_i\| = E_m$. Celui de la fonction $\underline{f}$ vaut $|\underline{f}(z)| = \sqrt{1 + r^2 + 2r \cos(\alpha + 2kz)}$. Par conséquent, $\|\vec{E}_{total}\|_{min} = (1 - r)E_m$ et $\|\vec{E}_{total}\|_{max} = (1 + r)E_m$.

Q.22 On obtient donc : $\rho = \frac{1 + r}{1 - r} \simeq 2,25$.

- Q.23** La distance entre un maximum et un minimum est donnée par les oscillations du terme $\cos(\alpha + 2kz)$.
On trouve une distance $d_m = \frac{\lambda}{8}$.
- Q.24** On trouve : $\Delta t = \frac{d_m}{v} = \frac{c}{8vf} \simeq 0,86 \text{ ms}$. Il peut ainsi se produire plus de mille interruptions en une seconde, ce qui peut hacher une conversation téléphonique par exemple, ou réduire le débit de manière générale.
- Q.25** Les champs électriques sont polarisés suivant l'axe (Ox) donc perpendiculaires au plan de la figure et vers le fond. Les champs magnétiques et les vecteurs d'ondes sont représentés ci-dessous :



Ces vecteurs sont tels que les trièdres $(\vec{k}_1, \vec{E}_1, \vec{B}_1)$ et $(\vec{k}_2, \vec{E}_2, \vec{B}_2)$ soient directs.

- Q.26** Ces composantes s'écrivent : $\underline{E}_{1x}(M, t) = E_m \exp[j(\omega t - ky \sin \theta - kz \cos \theta)]$ et $\underline{E}_{2x}(M, t) = E_m \exp[j(\omega t + ky \sin \theta - kz \cos \theta + \varphi)]$.
- Q.27** On se place tout d'abord au point P . D'après la question précédente :
 $\underline{E}_{1x}(P, t) = E_m \exp\left[j\left(\omega t + \frac{\pi}{2} \sin \theta\right)\right]$ et $\underline{E}_{2x}(P, t) = E_m \exp\left[j\left(\omega t - \frac{\pi}{2} \sin \theta + \varphi\right)\right]$. De la même manière, en se plaçant au point Q :
 $\underline{E}_{1x}(Q, t) = E_m \exp\left[j\left(\omega t - \frac{\pi}{2} \sin \theta\right)\right]$ et $\underline{E}_{2x}(Q, t) = E_m \exp\left[j\left(\omega t + \frac{\pi}{2} \sin \theta + \varphi\right)\right]$. On en déduit que les champs totaux s'écrivent en ces deux points :

$$\vec{E}_{total}(P, t) = E_m e^{j\omega t} \left(\exp\left[j\frac{\pi}{2} \sin \theta\right] + e^{j\varphi} \exp\left[-j\frac{\pi}{2} \sin \theta\right] \right)$$

et

$$\vec{E}_{total}(Q, t) = E_m e^{j\omega t} \left(\exp\left[-j\frac{\pi}{2} \sin \theta\right] + e^{j\varphi} \exp\left[j\frac{\pi}{2} \sin \theta\right] \right)$$

- Q.28** Avec les notations de l'énoncé :

$$\vec{E}(t, \phi) = E_m e^{j\omega t} \left(\exp\left[j\frac{\pi}{2} \sin \theta\right] + e^{j\varphi} \exp\left[-j\frac{\pi}{2} \sin \theta\right] + e^{j\phi} \exp\left[-j\frac{\pi}{2} \sin \theta\right] + e^{j\phi} e^{j\varphi} \exp\left[j\frac{\pi}{2} \sin \theta\right] \right)$$

Où l'on peut regrouper les termes venant du champ $\underline{E}_1$ et ceux venant du champ $\underline{E}_2$ pour obtenir :

$$\vec{E}(t, \phi) = E_m e^{j\omega t} \left(\exp\left[j\frac{\pi}{2} \sin \theta\right] + e^{j\phi} \exp\left[-j\frac{\pi}{2} \sin \theta\right] \right) + E_m e^{j(\omega t + \varphi)} \left(\exp\left[-j\frac{\pi}{2} \sin \theta\right] + e^{j\phi} \exp\left[j\frac{\pi}{2} \sin \theta\right] \right)$$

Soit en faisant apparaître les facteurs indiqués dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}\vec{E}(t, \phi) = & E_m e^{j\omega t} \exp \left[j \frac{\pi}{2} \sin \theta \right] \left(1 + \exp [j(\phi - \pi \sin \theta)] \right) \\ & + E_m e^{j(\omega t + \varphi)} \exp \left[-j \frac{\pi}{2} \sin \theta \right] \left(1 + e^{j\phi} \exp [j(\phi + \pi \sin \theta)] \right)\end{aligned}$$

- Q.29** On annule la contribution de $\underline{E}_2$ si $\underline{f}_2(\phi_1) = 0$, soit $\phi_1 = \pi(1 - \sin \theta)$. De même, on annule la contribution de $\underline{E}_1$ si $\underline{f}_2(\phi_2) = 0$, soit $\phi_2 = \pi(1 + \sin \theta)$.
- Q.30** L'intérêt de pouvoir séparer les signaux et qu'il est possible de superposer lors de l'envoi deux signaux identiques avec un déphasage, sans induire de brouillage (il suffit de les séparer). De cette manière, les nœuds et les ventres formés par les ondes stationnaires associées ne sont pas superposés et il n'y a plus de coupures lors de la communication (avec une puissance de calcul suffisante, il est possible d'ajuster ϕ en temps réel pour avoir une amplitude de signal maximale à la réception. Il est ainsi possible d'augmenter le débit de la transmission.