# Correction du DS5*

## Exercice 1 : Étude de la couronne solaire (d'après Centrale MP 2018)

**Q.1** Le champ électromagnétique est celui d'une onde transverse : $\vec{E}$ est perpendiculaire à $\vec{k} = k\vec{u}_z$. Il vérifie aussi la relation de structure des OPPH dans le vide, $\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{u}_z \wedge \vec{E}}$ avec donc $\boxed{\vec{E}_0 \cdot \vec{u}_z = 0}$. On peut écrire en notations complexes : $\vec{\underline{E}} = \vec{\underline{E}}_0 \exp\left[\mathrm{i}\left(\omega t - kz\right)\right]$ avec pour relation de dispersion $\boxed{\omega = ck}$.

**Q.2** Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ doit être calculé à partir du champ électrique réel $\vec{E}$ par la relation $\vec{R} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. La relation de structure reste vraie pour les champs réels donc $\vec{\Pi} = \dfrac{1}{\mu_0 c}\vec{E} \wedge \left(\vec{u}_z \wedge \vec{E}\right)$. Il vient en développant le double produit vectoriel et compte tenu de $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ : $\boxed{\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c \vec{E}^2 \vec{u}_z}$.

**Q.3** La puissance transportée par l'onde est le flux du vecteur de Poynting ; ici, $P = \vec{\Pi} \cdot S\vec{u}_z$ donc en valeur moyenne $\boxed{I = \varepsilon_0 c \left\langle \vec{E}^2 \right\rangle}$.

**Q.4** Il faut que $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll \|\vec{E}\|$ avec, compte tenu de la relation de structure, $\|\vec{B}\| = \dfrac{1}{c}\|\vec{E}\|$. La vitesse $\vec{v}$ des particules chargées doit donc vérifier $\boxed{\|\vec{v}\| \ll c}$ : les particules doivent rester non relativistes.

**Q.5** Il faut maintenant négliger les variations spatiales du champ électrique, donc considérer que les variations du terme $\vec{k} \cdot \vec{r}$ dans le champ électrique restent négligeables. Il faut donc que $\dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta z \ll 2\pi$ ou $\boxed{\Delta z \ll \lambda}$. On remarque que, dans le cas d'un mouvement harmonique de pulsation $\omega$, cette condition impose aussi $\dfrac{v_z}{\omega} \ll \dfrac{2\pi}{k}$ ou, compte tenu du fait que $k = \omega/c$, $\boxed{|v_z| \ll c}$. L'approximation non relativiste déjà citée justifie donc l'approximation proposée.

**Q.6** Puisque une intensité est une puissance surfacique, $\sigma = \dfrac{\langle P \rangle}{I}$ est bien une surface. Le mouvement des électrons se fait sous l'action du seul champ électrique donc $\vec{a} = -\dfrac{e}{m}\vec{E}$ d'où la valeur moyenne :

$$\langle P \rangle = \frac{e^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2}\left\langle \vec{E}^2 \right\rangle = \frac{e^4}{6\pi\varepsilon_0^2 c^4 m^2} I$$

Finalement : $\boxed{\sigma = \dfrac{e^4}{6\pi\varepsilon_0^2 c^4 m^2} \simeq 6{,}62 \times 10^{-29}\ \mathrm{m}^2}$.

**Q.7** Pendant la traversée de la couche $dz$, chacun des $n_e S\, dz$ électrons rayonne la puissance moyenne $\langle P \rangle = \sigma I(z)$ donc la puissance perdue par l'onde pendant cette traversée est $-S\, dI = n_e S\, dz\, \sigma I(z)$. Cela s'écrit aussi $\dfrac{dI}{I} = -\sigma n_e(z) dz$ d'où par intégration :

$$\ln\left(\frac{I(h)}{I(0)}\right) = -\sigma \int_0^h n_e(z) dz \Longrightarrow I(h) = I(0)\exp\left(-\sigma N\right)$$

avec $N$ le contenu électronique (en particules par mètre carré de section) tel que $\boxed{N = \int_0^h n_e(z) dz}$.

**Q.8** Si $N\sigma \ll 1$, $I(h) \approx I(0)(1 - N\sigma)$ donc la puissance incidente diffusée est $I(0)N\sigma$ et la fraction demandée est $\boxed{f = \dfrac{I_{\text{diff}}}{I_{\text{inc}}} = N\sigma}$.

**Q.9** La densité moyenne est définie par : $\bar{n}_e = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h n_e(z)dz = \dfrac{N}{h}$.

Ici $h = 0,6R_e$ donc $\boxed{\bar{n}_e = \dfrac{f}{\sigma h} = 3{,}6 \times 10^{13}\,\text{m}^{-3}}$.

**Q.10** L'approximation $\boxed{\text{non relativiste}}$ (voir la **Q.4**) permet de négliger l'action du champ magnétique devant la force électrique.

Cette même approximation permet aussi (voir la **Q.5**) de négliger les variations de ce champ à l'échelle du noyau.

Enfin, on néglige tout effet collisionnel dans le plasma du fait d'une approximation de $\boxed{\text{plasma dilué}}$ pour écrire l'équation du mouvement d'un électron sous la forme $m_e i\omega\vec{v} = -e\vec{E}$.

Il ne reste plus qu'à décrire le courant électrique $\vec{j} = -n_e e\vec{v}$ en $\boxed{\text{négligeant le mouvement des ions}}$ (justifié par leur masse bien plus élevée que celle des électrons) pour établir que $\vec{j} = \underline{\sigma}(\omega)\vec{E}$ avec $\boxed{\underline{\sigma} = \dfrac{n_e e^2}{\mathrm{i} m_e \omega}}$.

**Q.11** Il suffit d'utiliser la relation de Maxwell-Faraday sous forme de relation de structure généralisée $\vec{B} = \dfrac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$ et la relation de Maxwell-Ampère $-i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \underline{\sigma}\vec{E} + \dfrac{1}{c^2} i\omega\vec{E}$. Le développement du double produit vectoriel fait apparaître $\vec{k}\cdot\vec{E}$ qui est nul puisque le plasma est partout localement neutre (c'est l'équation de Maxwell-Gauss). Il reste $\boxed{k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ si on pose $\boxed{\omega_p = \sqrt{\dfrac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}}$.

**Q.12** Une onde ne peut se propager que si $k^2 > 0$ donc si $\boxed{\omega > \omega_p}$. Dans le cas contraire, $k^2 < 0$ donc $k$ est imaginaire pur et l'onde est $\boxed{\text{évanescente}}$, atténuée sur une distance de l'ordre de $\delta = \dfrac{1}{|\text{Im}(k)|}$. Toute la puissance incidente est réfléchie par le plasma.

**Q.13** La densité de charge ionique est $\rho_+ = n_0 e$. Celle des électrons est $\rho_- = -n_e e$ donc $\boxed{\rho(x,t) = (n_0 - n_e(x,t))e}$.

**Q.14** L'équation locale de conservation $\text{div}\vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ avec $\vec{j} = -n_e(x,t)e\vec{v}_e(x,t)$ impose

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(n_e(x,t)v_e(x,t)\right) + \frac{\partial n_e}{\partial t} = 0}$$

**Q.15** La relation demandée est simplement l'équation de Maxwell-Gauss puisque $\boxed{\text{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E}{\partial x}}$.

**Q.16** Le principe fondamental de la dynamique s'écrit $m_e \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_e}{\mathrm{dt}} = -e\vec{E}$ en négligeant, comme on l'a fait précédemment, l'effet du champ magnétique. L'approximation proposée par l'énoncé permet d'écrire :

$$\boxed{m_e \frac{\partial v_e}{\partial t} = -eE(x,t)}$$

**Q.17** Dans le cas où la solution est une OPPH donnée par les notations de l'énoncé, les trois équations ci-dessus prennent la forme complexe $\boxed{\omega N = k n_0 V}$, $\boxed{ikE_0 = \frac{e}{\varepsilon_0} N}$ et $\boxed{m_e i\omega V = -eE_0}$. Ces relations ne sont compatibles (si $E_0 \neq 0$), que si $\frac{kn_0 e}{\omega^2 m_e} = \frac{k\varepsilon_0}{e}$ donc aussi $\boxed{\omega^2 = \omega_p^2}$ où $\omega_p$ est la pulsation de plasma déjà définie.

**Q.18** $\boxed{f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 89{,}7\,\mathrm{MHz}}$.

**Q.19** Ce rayonnement va atteindre l'atmosphère terrestre puisque le parcours entre le Soleil et la Terre se fait $\boxed{\text{dans le vide}}$. La haute atmosphère terrestre est elle-même un plasma (ionosphère) avec une fréquence de coupure de l'ordre d'une dizaine de MHz ; ce rayonnement peut donc aussi traverser l'atmosphère et parvenir jusqu'au sol.

**Q.20** Une fréquence $f_1 = 120\,\mathrm{MHz}$ correspond à une émission par un plasma de densité :

$$n_1 = \frac{4\pi^2 \epsilon_0 m_e f_1^2}{e^2} = 1{,}8 \times 10^{14}\,\mathrm{m}^{-3}$$

donc d'après l'expression proposée, une distance $r_1 = 8{,}3 \times 10^8$ m.

De même la fréquence $f_2 = 75\,\mathrm{MHz}$ correspond à $n_2 = 7{,}0 \times 10^{13}\,\mathrm{m}^{-3}$ donc $r_2 = 9{,}3 \times 10^8$ m. La distance $r_2 - r_1$ étant parcourue en une seconde, on peut estimer la vitesse de ces particules à $\boxed{v \simeq 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$ : ce sont des particules très fortement $\boxed{\text{relativistes}}$.

**• • • FIN • • •**