Correction du DM 8

Exercice 1 : Cinétique de décomposition du monoxyde d'azote

Q.1 D'après la loi des GP, la pression partielle en monoxyde d'azote vérifie : $P_{NO} = [\mathrm{NO}]RT$, soit à $t = 0$: $[\mathrm{NO}]_0 = \dfrac{p_0}{RT}$.

⚠ Unités ! La concentrartion s'exprime ici en $\mathrm{mol \cdot m^{-3}}$, la pression en Pa et la température en K. Il est possible de conserver les données du tableau pour les analyser, mais le mieux est de les convertir en concentration en $\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.

La loi de vitesse s'écrit : $v_0 = k[\mathrm{NO}]_0^\alpha$ avec α l'ordre initial de la réaction, soit encore : $\ln(v_0) = \ln(k) + \alpha \ln([\mathrm{NO}]_0)$. On trace ainsi $\ln(v_0)$ en fonction de $\ln([\mathrm{NO}]_0)$. Le coefficient de corrélation est de $0,9996$ avec $\alpha = 2$.

Q.2 L'ordonnée à l'origine de la droite donnée par la régression linéaire permet d'obtenir $\ln(k) = 4,78$, soit $k \simeq 1{,}2 \times 10^2\,\mathrm{L \cdot mol^{-1} \cdot min^{-1}}$. La valeur est cohérente avec les données du second tableau.

Q.3 En supposant que l'ordre global soit identique à l'ordre initial, on vient de voir que $v = k[\mathrm{NO}]^2$. Par définition, cette vitesse est aussi $v = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}[\mathrm{NO}]}{\mathrm{d}t}$, d'où :

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{NO}]}{\mathrm{d}t} = -2k[\mathrm{NO}]^2$$

L'intégration de cette équation différentielle donne : $[\mathrm{NO}](t) = \dfrac{[\mathrm{NO}]_0}{1 + 2k[\mathrm{NO}]_0 t}$.

Q.4 Par définition du temps de demi-réaction, $[\mathrm{NO}](\tau_{1/2}) = \dfrac{[\mathrm{NO}]_0}{2}$. On trouve alors : $\tau_{1/2} = \dfrac{1}{2k[\mathrm{NO}]_0} \simeq 8\,\mathrm{min}$.

Q.5 La loi d'Arrhénius stipule que $k = A\exp\left(-\dfrac{E_A}{RT}\right)$ avec A le facteur pré-exponentiel et E_A l'énergie d'activation. Cela se réécrit : $\ln(k) = \ln(A) - \dfrac{E_A}{RT}$. En tracant $\ln(k)$ en fonction de $\dfrac{1}{T}$, le coefficient directeur est donc $-\dfrac{E_A}{R}$. Ici, on trouve (coefficient de régression de $0,9999$) une énergie d'activation $E_A = 245\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$.

Exercice 2 : Effet de peau dans un fil de cuivre

Q.1 On sait d'après la loi d'Ohm locale que $J = \sigma_0 E$. On a également par définition du potentiel : $E = \dfrac{U}{L}$. Ces deux relations conduisent à $J = \dfrac{\sigma_0}{L}U$.

Q.2 Par définition : $I = \iint \vec{j} \cdot \vec{S} = \dfrac{\sigma_0}{L} U \pi R^2 = \dfrac{U}{R_{elec}}$, soit $R_{elec} = \dfrac{L}{\sigma_0 \pi R^2}$. La résistance linéique s'écrit donc : $R_{lin} = \dfrac{1}{\sigma_0 \pi R^2} \simeq 6{,}5\,\mathrm{m\Omega \cdot m^{-1}}$.

Q.3 On compare le courant de déplacement $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ à $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$: $\dfrac{\|\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\sigma_0 \vec{E}\|} \simeq \dfrac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma_0} < 10^{-6} \ll 1$. Le courant de déplacement est donc effectivement négligeable devant la densité volumique de courant électrique.

Q.4 On prend le rotationel de l'équation de Maxwell-Faraday, ce qui nous donne :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B})$$

Dans le métal, la densité volumique de charge est approximativement nulle (voir le cours), donc $\mathrm{div}\vec{E} = 0$. La question précédente assure que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$, donc il vient : $\Delta\vec{j} = \mu_0\sigma_0\dfrac{\partial\vec{j}}{\partial t}$. Il s'agit bien de la forme demandée avec $\xi = \mu_0\sigma_0$.

Q.5 Le vecteur densité de courant électrique ne possède qu'une seule composante suivant (Oz) et ne dépend que de r et de t. En projection sur cet axe et en utilisant l'expression du laplacien scalaire fournie :

$$\frac{\mathrm{d}^2J_0}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}J_0}{\mathrm{d}r} = i\omega\mu_0\sigma_0 J_0 = \frac{2i}{\delta^2}J_0$$

Q.6 L'application numérique donne $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\sigma_0\omega}} \simeq 2\,\mu\mathrm{m}$, ce qui est très faible devant le rayon du fil.

Q.7 Cette tangente coupe l'axe des abscisses en $R - \delta$.

Q.8 Le courant est conduit en surface (dans la couche correspondant à l'epaisseur de peau, d'autant plus fine que la fréquence est grande). Si on multiplie le nombre de petits fils, on augmente la surface sur laquelle est conduit le courant, donc la résistance diminue (et donc l'effet Joule). Le fait de déposer une mince pellicule d'argent (très bon conducteur) limite aussi l'effet Joule.

Q.9 On a $\mathrm{d}G = \dfrac{1}{\mathrm{d}R_{elec}} = \dfrac{2\pi r\mathrm{d}r}{L}\sigma(r)$.

Q.10 Ces éléments sont associés en parallèle, donc il convient de sommer les conductances :

$$G = \int \mathrm{d}G = \int_0^R \frac{2\pi r\mathrm{d}r}{L}\sigma_0 \exp\left(\frac{r-R}{\delta}\right) = \frac{2\pi\sigma_0}{L}\left(\delta R - \delta^2 + \delta^2 e^{-R/\delta}\right)$$