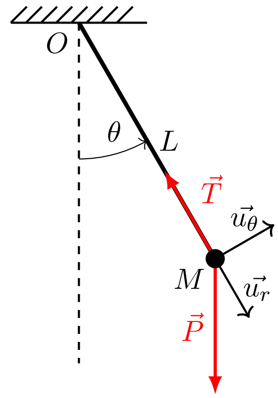
DM 10
Mécanique, optique ondulatoire

Exercice 1 : Pendule simple modifié

Q.1 Le système étudié se compose de la masse de masse M dans le référentiel terrestre considéré galiléen. Les forces qui s'appliquent sur le système sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{u_r}$.



Q.2 On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$ avec :

$$\vec{a} = -L\dot{\theta}^2\vec{u_r} + L\ddot{\theta}\vec{u_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{P} = mg\cos\theta\vec{u_r} - mg\sin\theta\vec{u_\theta}$$

On projette le PFD suivant $\vec{u_\theta}$ pour obtenir : $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0$.

Q.3 L'hypothèse des petits angles consiste à dire que l'angle θ reste très faible tout le temps de l'expérience. On a ainsi $\sin\theta \approx \theta$. L'équation différentielle précédente devient : $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\theta = 0$. Il s'agit maintenant d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux sans second membre. Ses solutions sont de la forme :

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

avec A et B deux constantes données par les conditions initiales. L'énoncé indique que $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. On en déduit $A = \theta_0$ et $B = 0$. Finalement :

$$\theta(t) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

Q.4 Dans l'hypothèse des petits angles, $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$ puis $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$. Les applications numériques donnent : $\omega \simeq 4{,}4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ et $T \simeq 1{,}4\,\mathrm{s}$.

Q.5 D'après les données de l'énoncé, l'instant t_1 correspond à un quart de période, soit $t_1 = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{L}{g}}$. L'application numérique donne $t_1 \simeq 0{,}4\,\mathrm{s}$.

Q.6 L'énergie mécanique du point M s'écrit comme la somme des énergies cinétique et potentielle, soit :

$$E_m = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos\theta$$

(l'origine des énergies potentielles est prise en O). Cette énergie mécanique se conserve car la seule force non-conservative (la tension du fil) est toujours orthogonale à la vitesse donc ne travaille pas.

Q.7 Comme l'énergie mécanique est constante, on peut écrire l'égalité entre les énergies mécaniques des instants t_0 et t_1^- :

$$0 - mgL\cos\theta_0 = \frac{1}{2}mv_1^{-2} - mgL$$

Soit $v_1^- = -\sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$ (négative car suivant $-\vec{u_\theta}$). On en déduit que $\dot{\theta}_1^- = \frac{v_1^-}{L} = -\sqrt{2\frac{g}{L}(1-\cos\theta_0)}$.

Q.8 Si le clou ne modifie pas l'énergie mécanique, l'énergie cinétique à l'instant t_1^+ est la même que celle en t_1^- car les énergies potentielles sont les même. On a alors :

$$\dot{\theta}_1^+ = \frac{3}{2L}v_1^+ = \frac{3}{2L}v_1^- = -\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{g}{L}(1-\cos\theta_0)}$$

Q.9 Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit maitnenant en prenant en compte l'altidude maximale atteinte qui vaut $-\frac{L}{3} - \frac{2L}{3}\cos\theta_2$. On a alors :

$$0 - mg\frac{L}{3}\left(1 + 2\cos\theta_2\right) = \frac{1}{2}mv_1^{+2} - mgL$$

d'où : $\cos\theta_2 = \dfrac{3\cos\theta_0 - 1}{2}$.

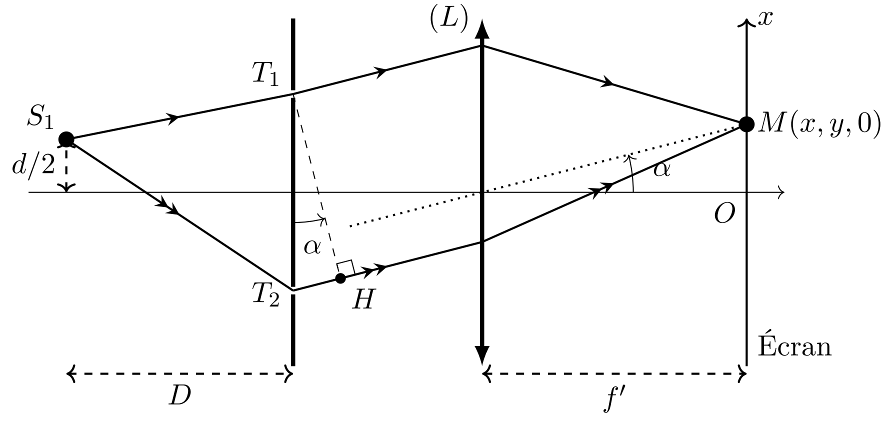
Q.10 La période du mouvement dans la phase $\theta < 0$ est la période d'un pendule de longueur $\frac{2L}{3}$, soit $T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$. La deuxième phase dure un quart de cette période : $t_2 - t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2L}{3g}}$.

Q.11 La période du pendule modifié est la somme d'une demi-période du pendule de longueur L et d'une demi-période du pendule de longueur $\frac{2L}{3}$:

$$T' = \pi\sqrt{\frac{L}{g}} + \pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) < T$$

Exercice 2 : Trous d'Young avec sources en mouvement

Q.1 a) Le schéma est tracé ci-dessous :



b) La différence de marche entre ces deux rayons est donnée par :

$$\delta(M) = (S_1T_2M) - (S_1T_1M) = (S_1T_2) - (S_1T_1) + (T_2H)$$

Comme $f' \gg |x|$, l'angle α est faible donc on peut écrire $(T_2H) = a\sin\alpha \simeq \dfrac{ax}{f'}$. De plus, on voit sur le schéma que :

$$(S_1T_2) - (S_1T_1) = \sqrt{D^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{D^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{d}{2}\right)^2}$$

c) En considérant en plus que $D \gg a$ et $D \gg d$, il vient par un développement limité au second ordre en $\dfrac{a}{D}$ et $\dfrac{d}{D}$: $(S_1T_2) \simeq D\left(1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2D} + \dfrac{d}{2D}\right)^2\right)$. Un raisonnement similaire conduit à l'expression de (S_1T_1) et on trouve donc finalement :

$$\delta(M) \simeq \frac{ad}{2D} + \frac{ax}{f'}$$

Q.2 a) Les deux sources sont incohérentes donc on somme les intensités associées qui s'écrivent d'après la formule de Fresnel :

$$I_1(M) = 2I_0\left[1 + \cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{f'} + \frac{ad(t)}{2D}\right)\right\}\right] \quad \text{et} \quad I_2(M) = 2I_0\left[1 + \cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{f'} - \frac{ad(t)}{2D}\right)\right\}\right]$$

On en déduit donc que $I(M) = I_1(M) + I_2(M) = 4I_0\left[1 + \cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{ad(t)}{D}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{ax}{f'}\right)\right]$ qui est bien la relation demandée en reconnaissant que $d(t) = 2vt$ et en posant donc $V(t) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{\lambda}\dfrac{avt}{D}\right)$.

b) Les franges se brouillent (l'intensité devient uniforme sur l'écran) lorsque $V(t) = 0$, soit :

$$\frac{4\pi}{\lambda}\frac{avt}{D} = k\pi + \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{N}) \implies t = \frac{\lambda D}{4av}\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

On observe ainsi un brouillage périodique des franges avec une période temporelle de $T = \dfrac{\lambda D}{4av}$.

c) Pour pouvoir observer le phénomène, il faut que $T > 0{,}1\,\mathrm{s}$, d'où $v < \dfrac{10\lambda D}{4a} \simeq 3\,\mathrm{mm \cdot s^{-1}}$.