Correction du DS7

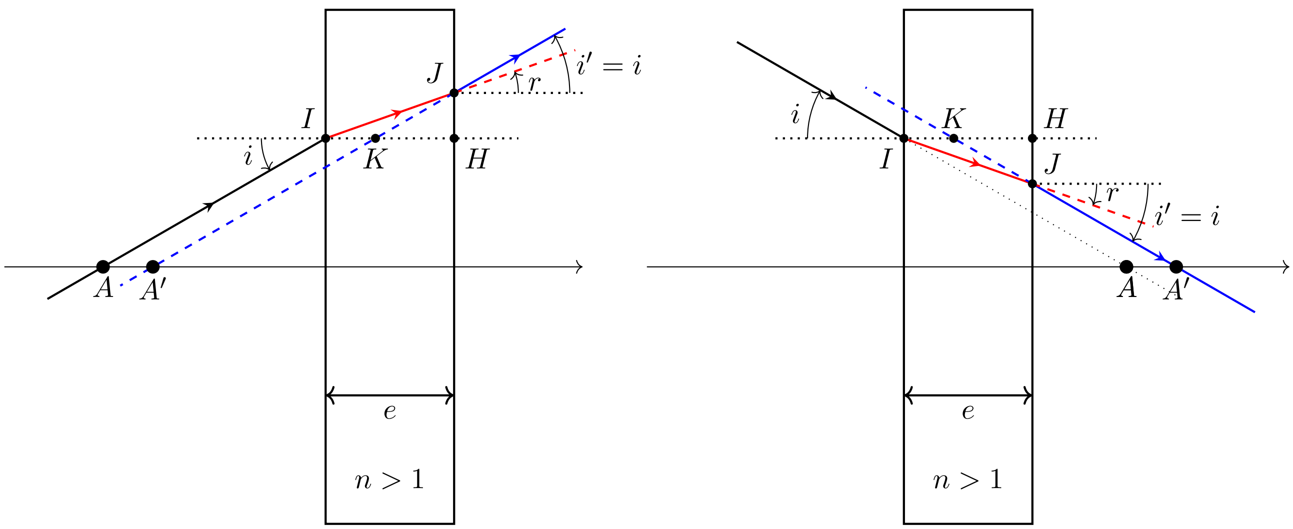
Exercice 1 : Caractéristiques d'une lame de verre (CCP MP 2015)

Q.1 Le verre présente un indice d'environ $1,5$.

Q.2 Les lois de Snell-Descartes pour la réfraction indiquent que : le rayon réfracté est dans le plan d'incidence et $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

Q.3

Q.4 Les schémas sont tracés ci-dessous :



Q.5 Le raisonnement qui suit est valable sur les deux figures. Les lois de Snell-Descartes et le principe du retour inverse de la lumière indiquent que $i = i'$ et donc que $\overline{AA'} = \overline{IK}$. Dans les triangles IJH et KJH rectangles en H, on a $\overline{HJ} = e \tan r = \overline{KH} \tan i$, soit :

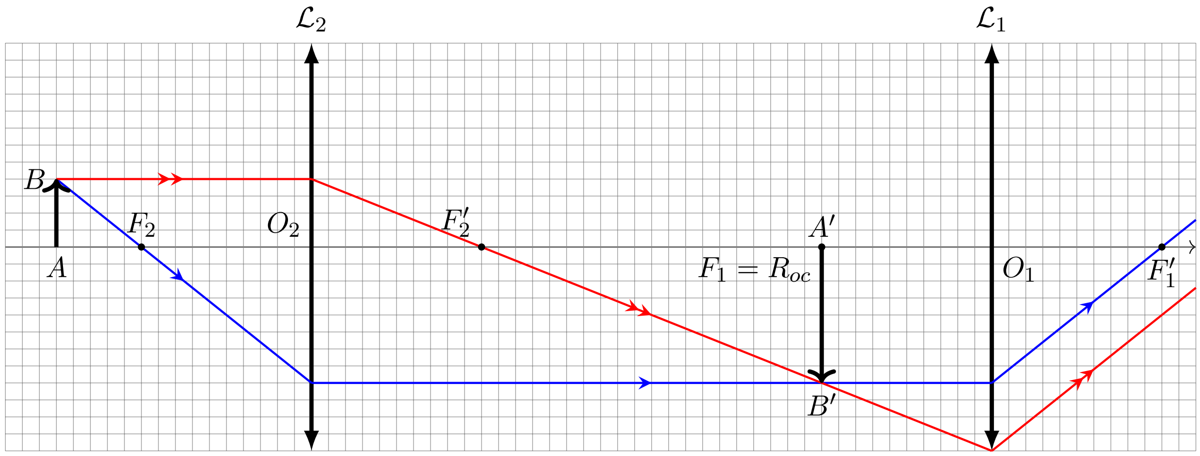
$$\overline{IK} = e - \overline{KH} = e\left(1 - \frac{\tan r}{\tan i}\right) \simeq e\left(1 - \frac{r}{i}\right) \simeq e\left(1 - \frac{1}{n}\right) \simeq \overline{AA'}$$

Q.6 L'image intermédiaire $A'B'$ sur le réticule est vue nette sans accomoder à traver l'oculaire si les rayons emergents sont à l'infini, c'est-à-dire que le réticule est placé dans le plan focal objet de l'oculaire : $\overline{R_{oc}O_1} = f_1'$.

Q.7 Il faut avoir d'après la relation du grandissement : $\overline{F_2A} = \dfrac{f_2'}{\gamma_{ob}} = -25\,\mathrm{mm}$.

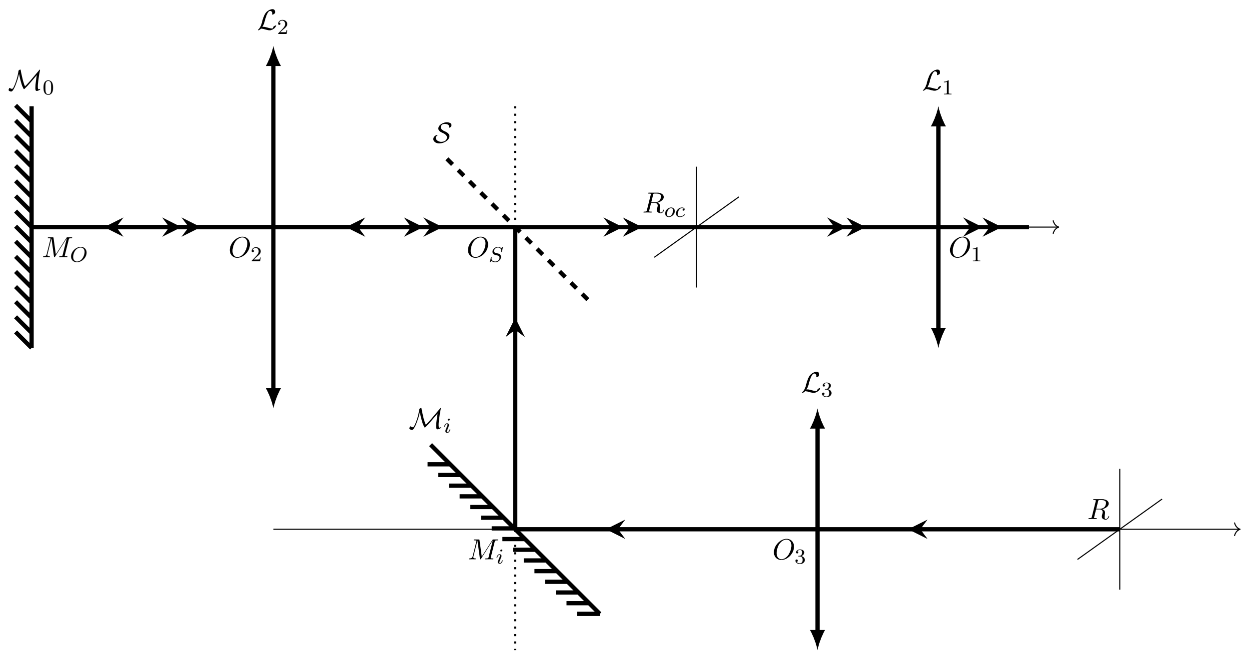
Q.8 La relation de conjugaison assure dans ce cas que $\dfrac{1}{\overline{O_2A'}} = \dfrac{1}{f_2'} + \dfrac{1}{\overline{O_2A}}$ donc $\overline{O_2A'} = \overline{O_2R_{oc}} = \dfrac{f_2'\overline{O_2A}}{f_2' + \overline{O_2A}} = f_2'(1 - \gamma_{ob})$ puis $\overline{O_2O_1} = \overline{O_2R_{oc}} + \overline{R_{oc}O_1} = f_2'(1 - \gamma_{ob}) + f_1' = 200\,\mathrm{mm}$.

Q.9 Le schéma est le suivant. On vérifie bien que le grandissement est de -2.



Q.10 Pointé d'image optique avec précision (faible profondeur de champ) et détermination de la focale d'une lentille sont des exemples d'application.

Q.11 Voir figure ci-dessous :



Q.12 Un système afocal conjugue un objet réel à l'infini avec une image réelle à l'infini (des rayons incidents parallèles ressortent parallèles). Pour que le système soit afocal, il faut que la distance entre les lentilles soit égale à la somme des distances focales images : $\overline{O_2O_S} + \overline{O_SM_i} + \overline{M_iO_3} = f_2' + f_3'$, d'où $\overline{M_iO_3} = f_2' + f_3' - \overline{O_2O_S} - \overline{O_SM_i} = 50\,\text{mm}$.

Q.13 Il faut imaginer tout le système sur un même axe, c'est-à-dire sans les miroirs. Dans ce cas, on étudie une lunette afocale. On note R_i l'image intermédiaire. Ce système se résume donc à $R \xrightarrow{(\mathcal{L}_3)} R_i \xrightarrow{(\mathcal{L}_2)} R'$ en prenant garde au fait que la lumière se propage en sens opposé à l'axe optique. En utilisant les relations de Newton, on obtient : $\overline{F_3'R} \cdot \overline{F_3R_i} = -f_3'^2$ et $\overline{F_2'R_i} \cdot \overline{F_2R'} = -f_2'^2$, avec $F_2' = F_3$. En divisant ces deux relations, il vient donc : $\dfrac{\overline{F_3'R}}{\overline{F_2R'}} = \dfrac{f_3'^2}{f_2'^2}$, soit encore $\overline{F_3'R} = \overline{F_2R'}\dfrac{f_3'^2}{f_2'^2}$.

Q.14 On sait que $\overline{O_2R'} = \overline{O_2F_2} + \overline{F_2R'}$ soit, d'après la question précédente :

$$\overline{O_2R'} = -f'_2 + \overline{F'_3R}\frac{f'^2_2}{f'^2_3} = -f'_2 + (-f'_3 + \overline{O_3R})\frac{f'^2_2}{f'^2_3} = -f'_2 = -50\,\mathrm{mm}$$

Cela signifie que si R se trouve au foyer image de $\mathcal{L}_3$ alors R' se trouve au foyer objet de $\mathcal{L}_2$.

Q.15 Le grandissement transversal est alors donné par $\gamma = \dfrac{\overline{O_2R'}}{\overline{O_3R}} = -\dfrac{f'_2}{f'_3} = -\dfrac{1}{3}$.

Q.16 Pour que les réticules R_{oc} et R'' se superposent, il faut que l'objet R_0 de la lunette soit tel que $\overline{F_2R_0} = \overline{M_0R_0} = \dfrac{f'_2}{\gamma_{ob}}$ (voir **Q.7**). De plus, on sait que R_0 est l'image de R' par le miroir $\mathcal{M}_O$ donc $\overline{M_0R_0} = -\overline{M_0R'} = -\overline{F_2R'}$. La **Q.13** assure alors que $d_0 = \overline{F'_3R} = \overline{F_2R'}\dfrac{f'^2_3}{f'^2_2} = -\dfrac{f'^2_3}{\gamma_{ob}f'_2}$.

Q.17 En déplacant le miroir $\mathcal{M}_0$ d'une distance e, on déplace le point R_0 d'une distance $2e$. Ainsi, $\overline{F_2R_{01}} = -\overline{F_2R'} - 2e$. Dans cette configuration, les deux réticules ne se superposent plus et il faut donc déplacer le réticule R de sorte à ce que sa nouvelle image R'_1 vérifie $\overline{F_2R'_1} = \overline{F_2R'} - 2e$. De cette manière, $\overline{F_2R_{01}} = -\overline{F_2R'_1} - 2e = -\overline{F_2R'}$ et vérifie les conditions de la **Q.7**. Il faut donc que $d_1 = \overline{F'_3R_1} = \overline{F_2R'_1}\dfrac{f'^2_3}{f'^2_2} = (\overline{F_2R'} - 2e)\dfrac{f'^2_3}{f'^2_2} = d_0 + \varepsilon_1$ avec $\varepsilon_1 = -2e\dfrac{f'^2_3}{f'^2_2}$.

Q.18 Avec les valeurs données, pour un déplacement de 1 mm du miroir, il faut déplacer le réticule R de 18 mm. Cette méthode permet donc d'augmenter la sensibililté et la précision sur la mesure de différence de marche introduite entre le miroir $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{L}_2$.

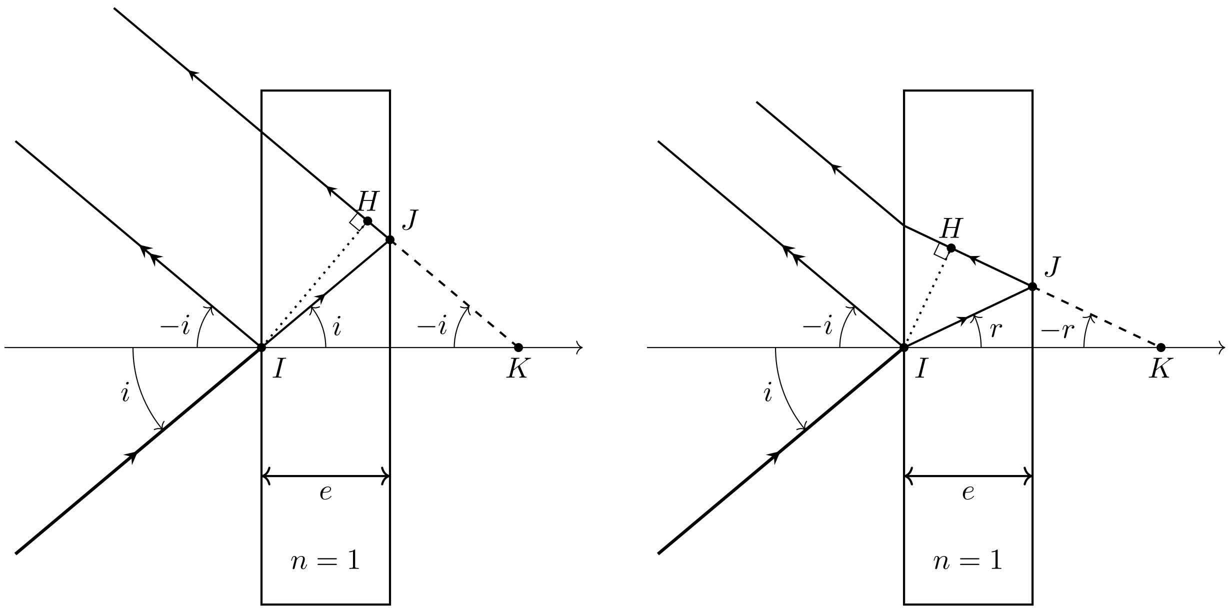
Q.19 D'après ce qui précède, le système additionnel introduit un grandissement de $-\dfrac{1}{3}$ et la lunette introduit un grandissmeent de -2. Finalement, l'image R'' du réticule R est $\dfrac{2}{3}$ fois celle du réticule R_{oc} (en supposant que R et R_{oc} ont la même taille).

Q.20 La position de la lame n'a pas d'influence car la lame est un dispositif afocal. De plus, le déplacement se fait dans le même sens que l'objet soit réel ou virtuel.

Q.21 L'introduction de la lame revient à déplacer le miroir d'une distance $e\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ (voir **Q.5**). De ce qui précède, on déduit $\varepsilon_2 = -2e\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{f'^2_3}{f'^2_2}$.

Q.22 L'application numérique conduit à $n = 1,5$.

Q.23 Les figures représentant les différences de marche sont :



Q.24 Dans tous les cas, on a $\delta = (IJ) + (JH) = (KH)$. Cette différence de marche vaut $\delta_{geo} = 2ne\cos i$ dans le cas de la lame d'air.

Q.25 Si $n = 1$, on retrouve bien l'expression précédente. Le facteur $\dfrac{\lambda}{2}$ corrrespond à un déphasage supplémentaire de π dû aux réflexions considérées.

Q.26 La formule de Fresnel s'applique pour deux onde cohérentes, c'est-à-dire de même pulsation et donc les phases à l'origine varient lentement. L'intensité lumineuse s'écrit alors : $I(M) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\delta(M)\right)\right]$. Les interférences sont constuctives si la différence de marche est un multiple entier de la longueur d'onde (équivalent à un déphasage multiple de 2π, équivalent à un ordre d'interférence entier).

Q.27 L'intensité lumineuse ne dépend que de l'angle d'incidence (pas de la position à l'écran) donc le système est à symétrie de révolution : on observe des franges circulaires (des anneaux). Le montage est équivalent au Michelson réglé en lame d'air et les interférences sont localisées à l'infini.

Q.28 On pose $i = \dfrac{\pi}{4} + \alpha$ soit $\sin i = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) \approx \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + \alpha)$. On en déduit que $\delta \approx \dfrac{\lambda}{2} + 2e\sqrt{n^2 - \dfrac{(1+\alpha)^2}{2}}$. En différenciant cette expression, on trouve $\dfrac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\alpha} = -\dfrac{2e(1+\alpha)}{\sqrt{n^2 - \dfrac{(1+\alpha)^2}{2}}}$, soit :

$$\mathrm{d}\delta \approx -\frac{2e\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{n^2 - \dfrac{1}{2}}}$$

Q.29 L'interfrange est la période spatiale d'oscillation de l'intensité lumineuse sur l'écran. C'est donc également la distance entre deux maxima d'intensité lumineuse.

Q.30 Les interférences constructives sont obtenues pour $\delta = p \cdot \lambda$ avec p un entier. Ainsi, entre deux maxima lumineux, on a $\Delta\delta = \lambda = -\dfrac{2e\Delta\alpha}{\sqrt{n^2 - \dfrac{1}{2}}}$. Or la position sur l'écran est donnée par $x \approx f'\alpha$ soit entre deux franges $\Delta x = f'\Delta\alpha$. On en déduit :

$$-\frac{2e}{f'}\frac{\Delta x}{\sqrt{n^2-\dfrac{1}{2}}} = \lambda$$

(remarque : le signe est superflu ici, on peut très bien travailler en valeur absolue).

Q.31 On lit sur la figure que 13 interfranges correspondent à 4,5 cm d'où $\Delta x = 0{,}35\,\mathrm{cm}$. Il suffit de remplacer dans la relation précédente pour trouver une première relation entre e et n.

Q.32 Comme la différence de marche doit être un multiple de la longueur d'onde, on a en notant p_0 l'ordre initial, pour la première cannelure :

$$\frac{\delta}{\lambda_1} = \frac{1}{2} + \frac{2e}{\lambda_1}\sqrt{n^2-0,5} = p_0 + 1$$

De la même nanière, pour la p-ième cannelure : $\dfrac{\delta}{\lambda_p} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2e}{\lambda_p}\sqrt{n^2-0,5} = p_0 + p$. En faisant la différence des ces deux relations, on trouve bien la relation demandée.

Q.33 On mesure l'écart de longueur d'onde entre la première et la 15ème annulation d'intensité : $\lambda_1 = 629{,}5\,\mathrm{nm}$ et $\lambda_{15} = 633{,}3\,\mathrm{nm}$. En réinjectant ces valeurs dans la relation précédente, on trouve une deuxième relation liant e et n.

Q.34 On en déduit finalement e et n en résolvant le système de deux équations à deux inconnues fourni par les questions **Q.31** et **Q.33**.

Exercice 2 : Métallurgie au lithium

Q.1 Les règles de remplissages sont les suivantes :

- Règle de stabilité : les orbitales atomiques sont occupées dans l'ordre d'énergie croissante. Cet ordre est donné (sauf à quelques exceptions près) par la règle de Klechkowski : l'énergie augmente dans l'ordre de $n + \ell$ croissant, ou dans l'ordre de n croissant en cas d'égalité.
- Règle d'exclusion de Pauli : deux électrons d'un même atome ne peuvent pas avoirs leurs 4 nombres quantiques identiques. En conséquence, une case quantique ne peut contenir, au maximum, que deux électrons avec des spins anti parallèles.
- Règle de Hund : sur des orbitales atomique dégénérées, les électrons se répartissent sur le maximum d'orbitales, avec des spins parallèles, avant de s'apparier.

La configuration électronique du Lithium est donc $[\,_3\mathrm{Li}] = (1s)^2(2s)^1$. Cet élement appartient à la famille des alcalins.

Q.2 lorsqu'on descend une colonne, le nombre de couches augmente : l'électron périphérique est de moins en moins retenu par le noyau. Donc, dans une colonne, l'énergie d'ionisation augmente lorsque Z diminue.

Q.3 Il est possible de réaliser des piles électrochimiques au lithium.

Q.4 La masse molaire totale d'un élément est donnée par la moyenne pondérée des masses molaires de chacun de ces isotopes par leurs abondances relatives. Comme les masses molaires de chacun des isotopes sont données par le nombre de masse (nucléons), on obtient : $M_{Li} = 7 \cdot a_7 + 6 \cdot a_6$ et on sait également (pas d'autres isotopes) que $a_7 + a_6 = 1$. La résolution de ce système donne $a_7 \simeq 95,1\%$ et $a_6 \simeq 4,9\%$.

Q.5 Dans ce type de structure, les atomes occupent les sommets et le centre de la maille cubique. La structure cristalline du lithium renferme $N = 2$ atomes par maille (8 atomes aux coins partagés par 7 autres mailles et un atome au centre en propre à la maille). La coordinence C est le nombre de plus proches voisins entourant un atome dans la structure. Dans une structure cubique centrée, $C = 8$.

Q.6 La masse volumique est donnée par $\rho = \dfrac{NM_{Li}}{\mathcal{N}_A a^3}$, d'où $a = \sqrt[3]{\dfrac{NM_{Li}}{\mathcal{N}_A \rho}} \simeq 75{,}8\,\mathrm{nm}$.

Q.7 Les deux demi-équations associées à ces couples sont : $\mathrm{Li_{(s)}} = \mathrm{Li^+_{(aq)}} + \mathrm{e^-}$ (notée (a)) et $2\,\mathrm{H^+} + 2\,\mathrm{e^-} = \mathrm{H_{2(g)}}$ (notée (b)), soit la réaction totale en milieu acide avec le coefficient demandé :

$$\mathrm{Li_{(s)}} + \mathrm{H_3O^+_{(aq)}} = \mathrm{Li^+_{(aq)}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{H_{2(g)}} + \mathrm{H_2O_{(\ell)}} \quad (1)$$

Q.8 La réaction globale (1) s'obtient par combinaison linéaire des équations (a) et (b) suivant $(1) = (a) + \dfrac{1}{2}(b)$ donc la loi de Hess assure que : $\Delta_r G_1 = -RT \ln K_1^0 = \Delta_r \tilde{G}_a + \dfrac{1}{2}\Delta_r \tilde{G}_b = \mathcal{F}E^0(\mathrm{Li^+_{(aq)}}/\mathrm{Li_{(s)}})$. On obtient ainsi :

$$K_1^0 = e^{-\dfrac{\mathcal{F}E^0(\mathrm{Li^+_{(aq)}}/\mathrm{Li_{(s)}})}{RT}} = 10^{-\dfrac{E^0(\mathrm{Li^+_{(aq)}}/\mathrm{Li_{(s)}})}{0,06}} \simeq 10^{50} \gg 1$$

La réaction est très favorisée thermodynamiquement, donc attendue totale.

Q.9 En réalité cette réaction se fait très peu car sa cinétique est très lente.

Q.10 Le dégagement gazeux du dihydrogène sur le lithium doit présenter une forte surtension cathodique, ce qui explique les observations expérimentales.

Q.11 Lors d'une électrolyse, l'anode est l'électrode positive et il s'y déroule une oxydation. La cathode est négative et il s'y déroule une réduction. Le but de cet électrolyse est de former du lithium liquide, c'est à dire de réduire les ions lithium présents en solution : cette réaction se déroule à la cathode. C'est par conséquent l'oxydation des ions chlore que l'on observe à l'anode. Ces deux demies-équation s'écrivent $\mathrm{Li}^+_{(\mathrm{aq})} + \mathrm{e}^- = \mathrm{Li}_{(\ell)}$ et $2\,\mathrm{Cl}^-_{(\mathrm{aq})} = \mathrm{Cl}_{2(\mathrm{g})} + 2\,\mathrm{e}^-$, soit la réaction globale : $\mathrm{Li}^+_{(\mathrm{aq})} + \mathrm{Cl}^-_{(\mathrm{aq})} = \mathrm{Li}_{(\ell)} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Cl}_{2(\mathrm{g})}$ (on remarque que maintenant le lithium est à l'état liquide).

Q.12 L'électrode a est la cathode, l'électrode b est l'anode. Ainsi, l'espèce 1 correspond aux ions lithium, l'epsèce 2 au lithium liquide, l'escèce 3 aux ions chlorures et l'espèce 4 au dichlore.

Q.13 La tension minimale d'électrolyse est donnée par la différence de potentiel entre les deux couples : $U_{min} = E^0(\mathrm{Cl}_{2(\mathrm{g})}/\mathrm{Cl}^-_{(\mathrm{aq})}) - E^0(\mathrm{Li}^+_{(\mathrm{aq})}/\mathrm{Li}_{(\mathrm{s})}) = 3{,}4\,\mathrm{V}$. La différence peut s'expliquer par des surtensions anodiques et cathodiques d'une part puis par la résistance interne de l'électrolyseur d'autre part.

Q.14 Pour une intensité d'électrolyse donnée, les quantités de matière produites sont telles que $I = \mathcal{F}\dfrac{\mathrm{d}n_{Li}}{\mathrm{d}t} = 2\mathcal{F}\dfrac{\mathrm{d}n_{Cl_2}}{\mathrm{d}t}$. Avec $m = n \cdot M$, le rapport des masses produites s'écrit : $\dfrac{m_{Cl_2}}{m_{Li}} = \dfrac{M_{Cl_2}}{2M_{Li}} = \dfrac{M_{Cl}}{M_{Li}} \simeq 5$. Ce résultat est tout à fait en accord avec le rapport des masses expérimentalement observé.

Q.15 L'énergie consommée s'écrit $W_e = U \cdot I\Delta t = U\Delta q = U\mathcal{F}\xi = U\mathcal{F}\dfrac{m_{Li}}{M_{Li}}$, soit une énergie consommée par unité de masse de lithium produite : $\dfrac{W_e}{m_{Li}} = \dfrac{U\mathcal{F}}{M_{Li}} \leq 105\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{g}^{-1} \simeq 30\,\mathrm{kW}\cdot\mathrm{h}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$ pour la tension maximale de 7,5 V, ce qui est légèrement sous estimé par rapport aux données du document. Cette différence n'est pas étonnante puisque la modélisation ne tient pas compte des pertes.

• • • FIN • • •