Essentiels de MPSI
Mécanique classique

Pour toute étude de mécanique, il convient de définir un référentiel $\mathcal{R}$ d'étude. Un référentiel est défini par un repère d'espace auquel on ajoute un repère de temps (une horloge). En mécanique classique, le temps est absolu donc on se contente de définir un repère d'espace. Une fois le repère choisi, on définit un système de coordonnées permettant de décrire l'espace. Il en existe trois : système cartésien, cylindrique (polaire) et sphérique. Suivant la nature du problème à traiter, on choisi le système le plus adapté.

Dans tout ce document, on considère un point matériel M de masse m dans un référentiel $\mathcal{R}$ considéré galiléen dont l'origine du repère est notée O.

Remarque : Il est important de noter que le mouvement du point M dépend du référentiel choisi (caractère relatif du mouvement) et donc du repère mais qu'il ne dépend pas du système de coordonnées.

1 - Cinématique

On définit : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position du point M, $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ son vecteur vitesse et $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$ son vecteur accélération.

★ **Cartésien** : les coordonnées du point M sont (x, y, z), soit :

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

★ **Cylindrique** : les coordonnées du point M sont (r, θ, z), soit :

$$\vec{r} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

★ **Sphérique** : les coordonnées du point M sont (r, θ, φ) et $\vec{r} = r\vec{u}_r$ mais les expressions de la vitesse et de l'accélération sont hors programme.

Remarques :

① Ne pas confondre les coordonnées du point M et les composantes de son vecteur position !

② Un mouvement est rectiligne uniforme si $\vec{v} = \overrightarrow{cste}$. Si $\vec{a} = \overrightarrow{cste}$, on parle de mouvement uniformément varié (accéléré ou décéléré).

③ Dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon R, $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = v_\theta\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = -\dfrac{v_\theta^2}{R}\vec{u}_r + \dfrac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta$.

2 - Cinétique

★ **Pour un point matériel**, on définit : la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ et le moment cinétique par rapport au point O : $\vec{\mathcal{L}}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$.

Remarques :

① Le moment cinétique par rapport à un point est un vecteur, il dépend du référentiel et du point par rapport auquel il est calculé. Il est toujours orthogonal à la vitesse et au vecteur $\overrightarrow{OM}$.

② On définit aussi le moment cinétique $\mathcal{L}_\Delta(M) = \vec{\mathcal{L}}_O(M) \cdot \vec{u}_\Delta$ du point M par rapport à l'axe Δ passant par O (projection sur Δ) qui est un scalaire.

③ L'unité du moment cinétique est le Joule-seconde (J · s), de dimension $M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$.

★ **Pour un ensemble de points matériels** (M_i, m_i) avec $m = \sum_i m_i$, on note G le barycentre tel que : $m\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i\overrightarrow{OM_i}$. La résultante cinétique est alors $\vec{p} = \sum_i m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_G$. Le moment cinétique en un point O vaut $\vec{\mathcal{L}}_O = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{p}_i$.

★ **Pour un solide** de masse m et de centre de gravité G en translation ou en rotation autour de l'axe fixe Δ passant par O à la vitesse $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_\Delta$, on définit : la résultante cinétique $\vec{p} = m\vec{v}_G$ et le moment cinétique sur Δ : $\mathcal{L}_\Delta(M) = J_\Delta\Omega$.

Remarque : Si Δ est un axe principal d'inertie du solide, alors $\vec{\mathcal{L}}_O(M) = J_\Delta\vec{\Omega}$ est porté par $\vec{u}$ (faux dans le cas général).

3 - Dynamique

★ **Principe d'inertie** : Il existe une classe de référentiels, appelés référentiels galiléens, dans lesquels tout point matériel isolé est en mouvement rectiligne uniforme (ceci définit les référentiels galiléens et indique que tous les référentiels galiléens sont en mouvement rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres).

★ **Principe fondamental de la dynamique** : Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle du vecteur quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_{i,ext}$$

★ **Loi du moment cinétique** : Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle du vecteur moment cinétique en un point O fixe est égale à la somme des moments des forces extérieures calculés au point O :

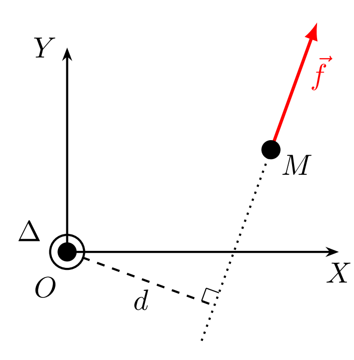
$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{i,ext}) = \sum_i \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{i,ext}$$

Remarques :

① Pour un système de points ou un solide, la loi du moment cinétique s'écrit aussi selon un axe Δ : $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_\Delta}{\mathrm{d}t} = J_\Delta\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{i,ext})$ avec $\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{u}_\Delta$.

② Pour calculer le moment d'une force qui s'exerce en un point M, on peut utiliser la notion de bras de levier. Le bras de levier est la distance d entre l'axe Δ et la droite d'action $(M, \vec{f})$ de la force :

$$\left|\mathcal{M}_\Delta(\vec{f})\right| = d\left|\vec{f}\right|$$



4 - Énergétique

On considère un point matériel M de masse m en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$. Ce point est soumis à un ensemble de forces $\vec{F}_{ext}$.

★ La puissance d'une force $\vec{f}$ qui s'applique sur le point M est définie par $\mathcal{P}_f = \vec{f} \cdot \vec{v}$.

★ Le travail élementaire d'une force $\vec{f}$ qui s'applique en M pendant un intervalle de temps dt est défini par $\delta W_f = \mathcal{P}_f \mathrm{d}t = \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$.

★ Le travail exercé par $\vec{f}$ entre les points A et B s'écrit alors : $W_{AB} = \displaystyle\int_{\mathcal{C}_{AB}} \delta W_f = \int_{\mathcal{C}_{AB}} \vec{f}\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}_f \mathrm{d}t$.

Remarques :

① Le travail et la puissance d'une force dépendent du référentiel.

② Si la puissance (ou le travail) est positive, alors la force est motrice et la vitesse augmente. À L'inverse, si la puissance (ou le travail) est négative, la force est résistive et la vitesse diminue.

③ Le travail d'une force le long d'un chemin représente la circulation de cette force sur ce chemin.

④ le travail d'une force dépend en général du chemin suivi, s'il n'en dépend pas, la force est dite conservative.

★ **L'énergie cinétique** du point matériel M est définie par $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$. Elle dépend du référentiel choisi.

★ **L'énergie potentielle** à laquelle est soumis le point matériel M de la part des forces conservatives est définie par $\delta W_f = \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\mathrm{d}E_p$. Cela s'écrit aussi $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_{AB}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\Delta E_p$: la circulation de la force est égale à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle associée.

★ **L'énergie mécanique** d'un point ou d'un solide est définie par $E_m = E_c + E_p$.

Remarques :

① L'énergie potentielle n'intervient que sous la forme d'une variation, c'est-à-dire qu'elle est définie à une constante près : on peut choisir *l'origine des potentiels.*

② Pour un système de points matériels, l'énergie cinétique est donnée par $E_c = \dfrac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$.

③ Pour un solide, l'énergie cinétique s'écrit dans le cas général $E_c = E_{c,t} + E_{c,r}$ avec $E_{c,t} = \dfrac{1}{2}mv_G^2$ l'énergie cinétique de translation et $E_{c,r} = \dfrac{1}{2}J_\Delta \Omega^2$ l'énergie cinétique de rotation.

④ On a donc $\vec{f} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_p)$ pour une force conservative (poids, ressort, force électrostatique, ...) et en particulier dans le cas d'un mouvement à un degré de liberté x : $\vec{f}(x) = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{u}_x$: on dit dans d'une force conservative qu'elle dérive d'un potentiel.

★ **Théorème de l'énergie cinétique** : La variation d'énergie cinétique d'un système entre deux points est égale au travail des forces (intérieures et extérieures) entre ces deux points : $\Delta E_c = W_{int} + W_{ext}$.

★ **Théorème de l'énergie mécanique** : La variation d'énergie mécanique d'un système entre deux points est égale au travail des forces (intérieures et extérieures) non conservatives entre ces deux points : $\Delta E_c = W_{int}^{nc} + W_{ext}^{nc}$.

Remarques :

① Le thérorème de l'énergie cinétique s'énonce aussi sous la forme infinitésimale $\mathrm{d}E_c = \delta W_{int} + \delta W_{ext}$ et sous la forme différentielle (théorème de la puissance cinétique) $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext}$.

② De la même manière, le thérorème de l'énergie mécanique est équivalent à $\mathrm{d}E_m = \delta W_{int}^{nc} + \delta W_{ext}^{nc}$ et à $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{int}^{nc} + \mathcal{P}_{ext}^{nc}$.

③ Dans le cas d'un système conservatif (si toutes les forces qui s'appliquent sont conservatives ou si les forces non conservatives ne travaillent pas) alors l'énergie mécanique est une constante.

★ Un système est à l'équilibre aux points où l'énergie potentielle est extrémale.

★ Une position d'équilibre est stable si l'énergie potentielle est minimale et instable si l'énergie potentielle est maximale.

5 - Forces centrales

On considère un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen et O un point fixe de $\mathcal{R}$. On suppose le point M soumis à une unique force $\vec{f}$ conservative et centrale de centre O.

Remarques :

① Une force centrale de centre O est une force dont la droite d'action passe par O en tout temps. Elle reste donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$ et on note $\vec{f} = f_r(r)\vec{u_r}$.

② L'énergie potentielle associée vérifie : $f_r(r) = -\dfrac{\mathrm{d}E_p(r)}{\mathrm{d}r}$ (le système n'a qu'un seul degré de liberté).

③ Le moment en O de la force centrale est nul, donc d'après le théorème du moment cinétique : $\vec{\mathcal{L}}_O(M) = \overrightarrow{cste}$

Propriétés d'un tel mouvement :

★ Le vecteur moment cinétique est constant et perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$ donc la trajectoire est plane.

★ En coordonnées polaires de centre O, la norme du moment cinétique de M vaut :

$$\left\|\vec{\mathcal{L}}_O(M)\right\| = m\left\|r\vec{u_r} \wedge (\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta})\right\| = mr^2\dot{\theta} = m\mathcal{C}$$

avec $\mathcal{C}$ la constante des aires. On montre que l'aire $\mathrm{d}\mathcal{A}$ balayée par la trajectoire pendant $\mathrm{d}t$ vaut $\mathrm{d}\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\mathcal{C}\mathrm{d}t$.

★ la vitesse aréolaire est une constante (loi des aires) : $\mathcal{V} = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathcal{C}}{2}$.

★ Comme la force $\vec{f}$ est conservative, l'énergie mécanique du point M est une constante.

★ Pour ramener le problème à une unique dimension, on utilise la constante des aires :

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{\mathcal{C}^2}{r^2}\right) + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$$

★ La trajectoire associée à ce type de mouvement dans le cas d'un champ Newtonien (force gravitationnelle ou électrostatique) est une conique, d'équation :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

avec $e \geq 0$ l'exentricité de la trajectoire et $p \geq 0$. Le mouvement est elliptique si $0 < e < 1$, parabolique si $e = 1$ et hyperbolique si $e > 1$.

Remarques :

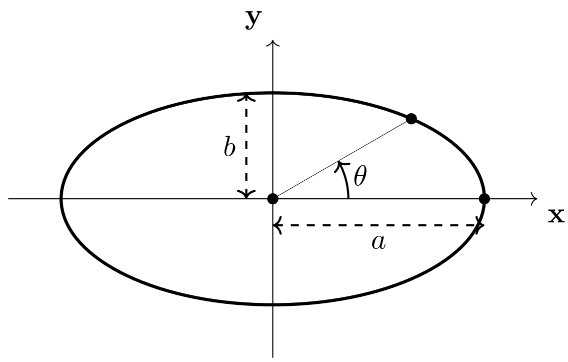
① Pour trouver l'équation de la trajectoire, commencer par déterminer l'équation différentielle vérifiée par r (conservation de l'énergie mécanique ou PDF) et utiliser les formules de Binet (poser $u = 1/r$).

② Propriétés des ellipses ($0 < e < 1$)

- Les demi-grand axe a et demi-petit axe b vérifient :

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

- L'aire de l'ellipse est donnée par $S = \pi ab$.



6 - Mécanique céleste

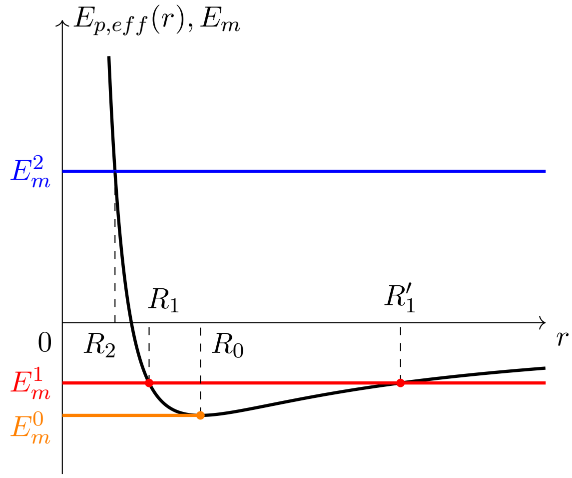
Si le point M est soumis à la force gravitationnelle d'un astre, notée $\vec{f} = -\frac{\mathcal{G}M_A m}{r^2}\vec{u_r}$ avec M_A la masse de l'astre, alors on se trouve dans le domaine de la mécanique céleste.

★ L'énergie mécanique s'écrit $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ avec :

$$E_{p,eff}(r) = \frac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}mM_A}{r} < E_m$$

Le type de mouvement dépend de la valeur de l'énergie mécanique (voir figure ci-contre) :

- Si $E_m < 0$ l'état est lié (trajectoire circulaire si $E_m = E_m^0$ ou elliptique pour E_m^1 par exemple)
- Si $E_m \geq 0$ l'état est libre (trajectoire parabolique si $E_m = 0$ ou hyperbolique pour E_m^2 par exemple)



★ Si $E_m = E_m^0$, on note R_0 le rayon de la trajectoire circulaire. On en déduit que $\dot{\theta} = cste$. Le mouvement est donc uniforme et la vitesse vaut : $v_\theta = R_0\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_A}{R_0}}$ soit $E_m = -\frac{\mathcal{G}M_A m}{2R_0}$.

★ Dans le cas d'une trajectoire elliptique, on généralise l'expression précédente de l'énergie mécanique : $E_m = -\frac{\mathcal{G}M_A m}{2a}$ avec a le demi-grand axe de l'ellipse.

★ Les mouvements des planètes obéissent aux lois de Kepler :

- Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques (planes), dont le Soleil occupe l'un des foyers.
- Des aires égales sont balayées dans des temps égaux (conséquence de la vitesse aréolaire constante).
- Le carré de la période T du mouvement d'une planète est directement proportionnel au cube du demi-grand axe a de la trajectoire elliptique de la planète : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_A}$, la constante de proportionnalité ne dépend que de l'astre attracteur (c'est la même pour toutes les planètes d'un même système solaire).

★ On définit les vitesses cosmiques (l'astre considéré est la Terre, $M_A = M_T$) :

- La première vitesse cosmique v_1 (vitesse minimale de mise en orbite) correspondant à une orbite circulaire de rayon R_T : $v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} \approx 8\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.
- La deuxième vitesse cosmique v_2 (vitesse de libération) est la vitesse minimale nécessaire pour quitter l'attraction gravitationnelle de la Terre à partir du sol : $v_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{2}v_1 \approx 11\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.