DM 11
Optique, Mécanique

Exercice 1 : Caractérisation du spectre d'une diode laser

Un interféromètre de Michelson utilisé en configuration lame d'air permet de caractériser le spectre d'émission d'une diode laser. Le dispositif interférentiel est éclairé avec la diode laser S. On considère le point M_0 au centre de la figure d'interférence et on note δ la différence de marche des deux rayons lumineux issus de S qui viennent se superposer en M_0. La lumière émise par la diode possède une densité spectrale en pulsation ayant la forme d'une lorentzienne :

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\omega} = J(\omega) = \frac{J_m}{1 + \left(\dfrac{\omega - \omega_0}{\omega_1}\right)^2}$$

Q.1 Que signifient les lettres de l'acronyme LASER ?

Q.2 Tracer l'allure de la courbe $J(\omega)$ et déterminer sa largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ en fonction de ω_1.

Q.3 On considère qu'une tranche infinitésimale du spectre, centrée sur une pulsation ω et de largeur $\mathrm{d}\omega$ se comporte comme une raie monochromatique de pulsation ω. Déterminer l'intensité résultante $\mathrm{d}I(M_0)$ au point M_0 en sortie de l'interféromètre en fonction de δ, ω, $\mathrm{d}\omega$ et des constantes du problème.

Afin de déterminer $\Delta\omega$, la vis de chariotage est reliée à un moteur qui permet de faire varier δ linéairement avec le temps. La différence de marche entre les deux rayons s'écrit alors : $\delta(t) = v \cdot (t - t_0)$. On enregistre l'intensité $I(M_0, t)$ au point M_0 en fonction du temps t.

Q.4 Deux ondes émises par la diode à deux longueurs d'ondes différentes donnent-elles lieu à des interférences ? Montrer alors que l'intensité $I(M_0, t)$ s'écrit sous la forme :

$$I(M_0, t) = \int_0^{+\infty} f(\omega, t)\mathrm{d}\omega$$

et donner l'expression de la fonction $f(\omega, t)$.

Q.5 En déduire l'expression de l'intensité $I(M_0, t)$ en fonction du temps.

On obtient les enregistrements représentés sur les deux figures ci-dessous pour lesquelles $v_0 = 50\,\mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{min}^{-1}$. La seconde figure est un "zoom" de la première réalisé sur la zone rectangulaire indiquée.

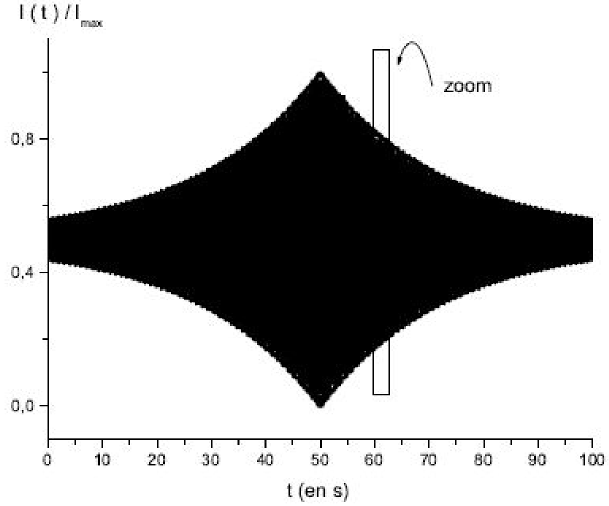
Q.6 Déduire d'une de ces figures la valeur numérique de la pulsation centrale ω_0 de la diode laser. Quelle est la longueur d'onde centrale λ_0 associée ? Indiquer la couleur de la lumière émise.

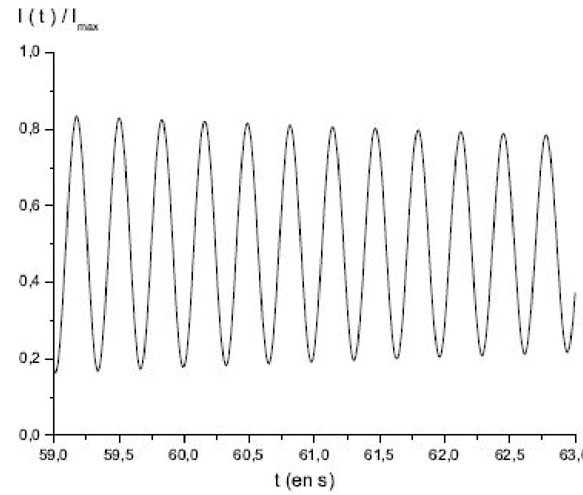
Q.7 En analysant les figures, déterminer également la valeur numérique de la largeur $\Delta\omega$ de la raie lorentzienne. On expliquera soigneusement la méthode utilisée. En déduire la longeur decohérence ℓ_c de la lumière émise par cette diode.

Q.8 Déterminer la largeur spectrale de la diode laser en longueur d'onde $\Delta\lambda$ et faire l'application numérique.

Données :

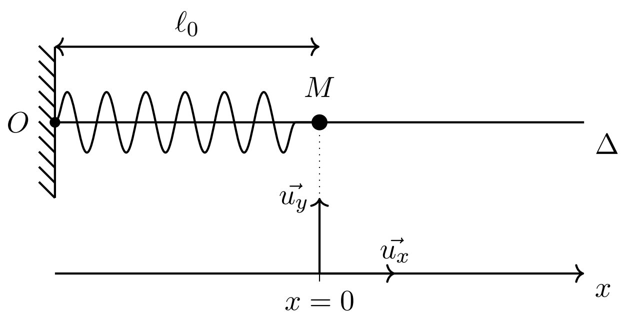
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{1 + \left(\dfrac{\omega - \omega_0}{\omega_1}\right)^2} = \pi\omega_1 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right)}{1 + \left(\dfrac{\omega - \omega_0}{\omega_1}\right)^2}\mathrm{d}\omega = \pi\omega_1 \exp\left(-\frac{\omega_1 |x|}{c}\right) \cos\left(\frac{\omega_0 x}{c}\right)$$

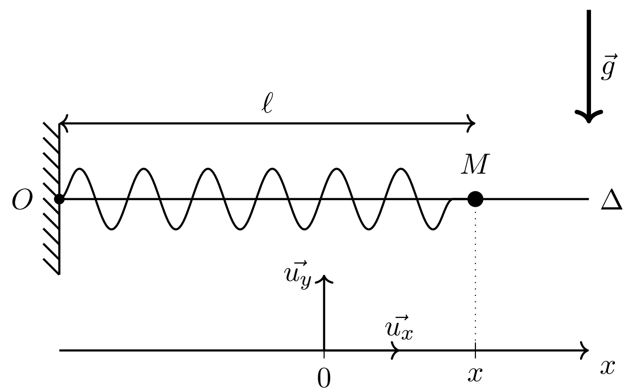




Exercice 2 : Ressort avec ou sans frottements

Une particule ponctuelle M de masse m peut glisser sur un rail horizontal Δ fixe dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$. Le point M est fixé à l'extrémité d'un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est attachée en O, fixe dans $\mathcal{R}$. On repère le point M par son abscisse x et on suppose que la position $x = 0$ correspond à l'allongement au repos ℓ_0 du ressort.





I Sans frottements

Le glissement s'effectue dans un premier temps sans frottements.

Q.1 Faire un bilan des forces qui s'appliquent sur le point M et les représenter sur un schéma pour $x > 0$.

Q.2 Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de x, $\dot{x}$ et des constantes du problème. Que peut-on dire de cette énergie mécanique ? En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement du point M.

Q.3 Déterminer alors l'expression de x en fonction du temps et des constantes du problème en notant x_0 et $\vec{v_0} = \dot{x}_0\vec{u_x}$ respectivement les position et vitesse initiales.

II Avec frottements

Le point M est maintenant soumis à une force de frottement $\vec{f}$ de la part du rail. Cette force de frottement est de norme constante f quand le point M est en mouvement et comprise entre 0 et f lorsque le point M est immobile.

Q.4 Représenter les forces qui s'appliquent sur le point M lorsqu'il est en mouvement, en précisant le sens du mouvement choisi. On fera figurer l'angle φ entre la réaction du rail sur le point M et la verticale. Donner l'expression de φ en fonction des constantes du problème.

Q.5 On place le point M à la position x_0 (de signe quelconque) sans vitesse initiale. À quelle(s) condition(s) sur x_0 le point M se déplace-t-il ?

Q.6 On suppose la condition de la question précédente vérifiée : le point M se déplace alors jusqu'à une position d'équilibre x_1. Donner, en fonction de f et k, un encadrement de la valeur x_1.

Q.7 Montrer que la force de frottement peut s'écrire : $\vec{f} = -\varepsilon f \vec{u_x}$ avec ε un coefficient tel que :

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad \dot{x} > 0 \\ -1 & \text{si} \quad \dot{x} < 0 \end{cases}$$

Q.8 Écrire alors l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ sans chercher à la résoudre.

Dans toute la suite du problème, on choisi x_0 positif et très supérieur à la limite de démarrage du point M trouvée à la **Q.5** afin de supposer qu'il effectue plusieurs oscillations. On note x_1 la position du point M lorsqu'il s'arrête pour la première fois, x_2 sa position lorsqu'il s'arrête pour la deuxième fois, etc. Le point M est laché sans vitesse initiale ($\dot{x}_0 = 0$).

Q.9 Écrire et résoudre l'équation différentielle du mouvement avec frottement sur l'intervalle $\{x_0, x_1\}$.

Q.10 Déterminer le temps t_1 que dure le trajet entre x_0 et x_1. Exprimer alors x_1 en fonction de x_0, f et k.

Q.11 Exprimer le travail de la force de frottement sur le trajet entre x_1 et x_2 et en déduire la position x_2 lorsque le point M s'arrête pour la deuxième fois, à exprimer en fonction de x_0, f et k.

Q.12 De l'étude qui précède, déduire la nature de la décroissance de l'amplitude du mouvement au cours du temps. Déterminer alors l'équation $x_{max}(t)$ de la courbe reliant les maxima de $x(t)$.