

Problème I : Physique des ondes et particules associées

Dans ce problème, nous étudierons quelques propriétés d'ondes en utilisant des fonctions d'ondes mais aussi quelques propriétés des corpuscules associés comme les photons, les phonons et les électrons. Nous étudierons en particulier deux types de cavité : un interféromètre et un puits quantique.

Données ou formules nécessaires :

- constante de Planck $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J.s (on note \hbar la quantité $h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34}$ J.s)
- constante de Boltzmann $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23}$ J.K⁻¹
- nombre d'Avogadro $N_A = 6,0 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹
- vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,0 \cdot 10^8$ m.s⁻¹
- charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C
- masse de l'électron $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg
- gammes de longueurs d'onde λ du spectre électromagnétique des différents rayonnements :

γ	X	UV	visible	IR	radio
$\lambda < 10$ pm	10 pm $< \lambda < 100$ nm	100 nm $< \lambda < 380$ nm		780 nm $< \lambda < 1$ mm	1 mm $< \lambda$

- intégration par parties $\int_a^b v \cdot du = [v \cdot u]_a^b - \int_a^b u \cdot dv$
- formules trigonométriques $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
 $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ et $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

I. Dualité onde-corpuscule

Ondes électromagnétiques

I.1. Rappeler quels sont les liens entre la pulsation ω et le vecteur d'onde \vec{k} d'une onde électromagnétique et les caractéristiques de la particule associée, le photon.

I.2. Quels sont les ordres de grandeur de l'énergie, exprimée en eV, d'un photon visible et d'un photon X qui est diffracté par les réseaux cristallins ?

I.3. Pour un photon qui se propage dans un milieu d'indice n , justifier pourquoi sa quantité de mouvement (impulsion) vaut en norme $p = \frac{nh}{\lambda_0}$.

Ondes de matière

I.4. Donner le vecteur d'onde et la pulsation de l'onde associée à une particule non relativiste d'énergie E et de quantité de mouvement $\vec{p} = m \frac{dx}{dt} \vec{e}_x$.

I.5.

I.5.a. Etablir la longueur d'onde associée à un électron, initialement immobile, non relativiste, accéléré avec une différence de potentiel U .

I.5.b. Déterminer la valeur de U , pour laquelle on obtiendrait la même longueur d'onde que celle d'un photon X de $\lambda = 0,1$ nm.

I.6. Un électron, qui assure la conduction métallique, doit-il être considéré comme quantique ? On considère que le réseau cristallin est caractérisé par un paramètre de maille a de l'ordre de 10^{-10} m et que les électrons libres ont une vitesse due à l'agitation thermique. On se placera à 300 K.

I.7. Pouvez-vous citer les noms de 3 physiciens qui se sont illustrés par leur contribution en physique quantique ? Placer leurs travaux par ordre chronologique.

Diffusion Brillouin

I.8. Une onde sonore monochromatique se décrit, comme toute onde, au moyen d'une pulsation ω et d'un vecteur d'onde \vec{k} . On lui associe une particule appelée phonon.

I.8.a. Donner la quantité de mouvement \vec{q} du phonon associé à une onde acoustique de fréquence ν , qui se propage dans l'eau avec une célérité $\vec{V} = V\vec{u} = \frac{\omega}{k}\vec{u}$, \vec{u} étant le vecteur unitaire de la direction de propagation orienté dans le sens de la propagation.

I.8.b. Donner l'énergie e_p de ce phonon.

I.8.c. Evaluer numériquement $q = \|\vec{q}\|$ et e_p (en eV), pour une fréquence sonore de 1,0 kHz et une vitesse de propagation $V = 1,5 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

I.8.d. Comparer les caractéristiques de ce phonon avec celles d'un photon du domaine visible.

I.9. La diffusion Brillouin correspond à un choc entre une particule photon incident et une particule phonon avec annihilation du phonon et diffusion d'un photon émergent. On suppose que le système est un système isolé. La situation des vecteurs quantités de mouvement avant et après le choc est représentée par les vecteurs de la **figure 1 (a)**.

Justifier pourquoi la quantité de mouvement se conserve dans un système isolé. Quelle autre grandeur est conservative ?

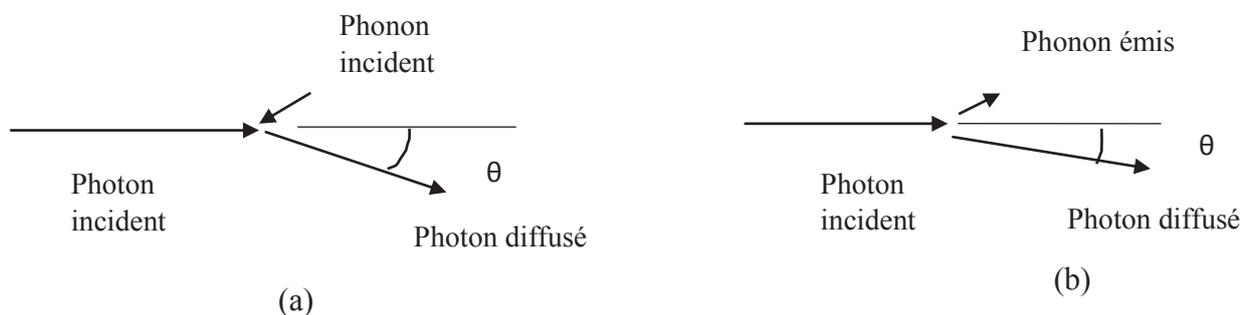


Figure 1 - Vecteurs quantités de mouvement annihilation (a) ou création (b) d'un phonon à partir d'un photon incident

I.10. On considère un phonon associé à l'onde sonore, engendrée dans l'eau liquide, qui se propage avec une célérité $V = 1\,525 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, à $50 \text{ }^\circ\text{C}$. L'indice optique de l'eau vaut 1,33. Une source de lumière laser, de longueur d'onde $\lambda_{inc} = 0,53 \text{ }\mu\text{m}$ et de fréquence ν_{inc} , arrive sur une cuve remplie d'eau liquide juste saturante. La collision photon-phonon engendre un photon de longueur d'onde $\lambda_{ém}$ (fréquence $\nu_{ém}$).

On observe le faisceau lumineux transmis dans la direction qui fait un angle θ avec la direction du faisceau incident. Dans ce choc, le phonon de quantité de mouvement initiale \vec{q} disparaît. On peut établir, à partir des lois de conservation précédemment citées et en tenant compte des ordres de grandeur, que la quantité de mouvement du phonon vaut :

$$q \cong 2 \frac{nh}{\lambda_{inc}} \sin \frac{\theta}{2} .$$

I.10.a. En déduire le décalage en fréquence du photon $\Delta\nu^+ = \nu^+_{ém} - \nu_{inc}$ en fonction de λ_{inc} , n , V et θ .

I.10.b. Evaluer numériquement le décalage Brillouin dans la direction $\theta = 90^\circ$, pour l'eau saturante à 50°C , sous les deux formes suivantes :

- i) absolu en fréquence $\Delta\nu^+$;
- ii) relatif en longueur d'onde $\Delta\lambda^+/\lambda_{inc}$.

I.10.c. La résolution d'un spectromètre à réseau vous semble-t-elle suffisante pour déceler ce décalage ?

II. Interférométrie à fort pouvoir de résolution

On utilise un système optique constitué de deux miroirs plans parallèles, semi-réfléchissants de pouvoir de réflexion très élevé, distants de d , séparés par de l'air d'indice égal à 1. On éclaire ce système par un faisceau de lumière parallèle comportant éventuellement plusieurs raies monochromatiques.

Etude en incidence normale

La situation est représentée sur la **figure 2**. Les rayons réfléchis et réfractés ont été décalés par souci de lisibilité.

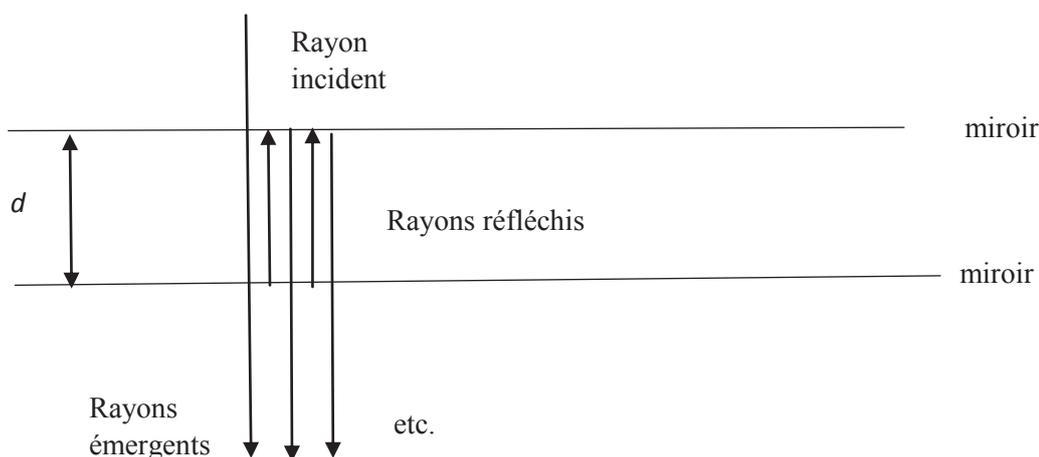


Figure 2 - Interféromètre en incidence normale

II.1. Etablir la différence de marche ΔL , en incidence normale, entre deux rayons émergents successifs.

II.2. Dans les interférences à N ondes (comme dans un réseau par exemple), quelle est la condition à respecter pour obtenir des interférences constructives ?

II.3. Que vaut l'ordre d'interférence pour une composante de longueur d'onde λ du faisceau incident ?

II.4. On fait varier la distance d (sur des distances de l'ordre du μm , alors que d est de l'ordre du cm).

II.4.a. Pour quelles valeurs de $d = d_p$, obtient-on des interférences constructives pour une longueur d'onde λ donnée ? En supposant que l'intensité est très faible pour des valeurs différentes des d_p , tracer l'allure de l'intensité reçue en fonction de d , pour une onde incidente monochromatique de longueur d'onde λ .

II.4.b. Que vaut δ la plus petite variation de d entre deux maxima d'intensité pour une longueur d'onde donnée ?

Application à la diffusion Brillouin

Le faisceau qui arrive sur l'interféromètre est celui qui sort de la cuve à eau pour $\theta = 90^\circ$. Il a trois composantes dans son spectre λ^- , λ_{inc} et λ^+ telles que $\lambda^- > \lambda_{\text{inc}} > \lambda^+$. La longueur d'onde λ^- correspond à la création d'un phonon au lieu de l'annihilation (**figure 1 b**, page 3).

II.5. Préciser quel est le spectre en fréquence correspondant (on citera les fréquences en ordre croissant).

II.6. On règle au préalable la distance d à une valeur d_0 qui correspond au pic d'intensité d'ordre p pour λ_{inc} . Quel est le lien entre p et d_0 ?

II.7. On déplace le miroir mobile autour de d_0 .

II.7.a. Quelles sont les valeurs de $d = d_0 \pm \delta$ qui correspondent pour cette même longueur d'onde aux ordres $p + 1$ et $p - 1$?

II.7.b. Quelles sont les valeurs de $d = d_0 \pm \varepsilon$ qui correspondent aux pics d'ordre p des 2 autres composantes du spectre ?

II.7.c. Montrer que la quantité $Z = (\Delta\nu^+) \frac{\delta}{\varepsilon}$, appelée intervalle spectral libre, vaut $Z = \frac{c}{2d_0}$. Peut-on travailler si $\Delta\nu^+ > Z$? Comment doit-on choisir d_0 ? La valeur de 1,25 cm convient-elle ?

II.7.d. Tracer l'allure de l'intensité en fonction de d dans le domaine centré autour de d_0 et de largeur 2δ . On supposera l'intensité des pics Brillouin légèrement supérieure aux autres. Ecrire sur chaque pic représenté, à quel ordre et à quelle fréquence il correspond.

II.8. On utilise un interféromètre dont l'intervalle spectral libre vaut $Z = 15 \text{ GHz}$. On réalise une première expérience de diffusion Brillouin avec de l'eau liquide à 50°C dans les conditions de saturation et une seconde expérience avec de l'eau liquide dans un état « métastable » à 50°C . Les résultats de la première expérience sont donnés dans le tableau 1 (page 6) : la valeur est celle du facteur de transmission G (rapport de l'intensité à une intensité de référence) pour les pics successifs dans l'intervalle spectral libre. En dehors de ces pics très étroits, la valeur de G est assimilée à 0. Pour chaque pic est indiqué le décalage spectral en fréquence.

$G = (I/I_{ref})$	0,89	0,99	0,99	0,89	0,99	0,99	0,89
Décalage en fréquence en GHz	0,0	5,4	9,6	15,0	21,4	25,6	30,0
Ordre	?	?	?	?	?	?	?
Fréquence	?	?	?	?	?	?	?

Tableau 1 - Résultats de la première expérience

II.8.a. Pour chaque pic de l'expérience 1, indiquer, en complétant le tableau, l'ordre et la fréquence en utilisant les notations de l'énoncé v_{inc} , v^+ et v^- .

II.8.b. Sachant que le nouveau décalage Brillouin Δv^+ vaut 4,8 GHz dans l'expérience 2, déterminer la vitesse du son dans l'eau métastable.

Pouvoir de résolution de l'interféromètre

Dans cette sous-partie, nous allons essayer de comprendre pourquoi l'interféromètre a un excellent pouvoir de résolution comme spectromètre.

II.9. On suppose que le dispositif précédemment décrit est éclairé par une onde plane de longueur d'onde λ_0 , sous une incidence α faible. La situation est représentée **figure 3**.

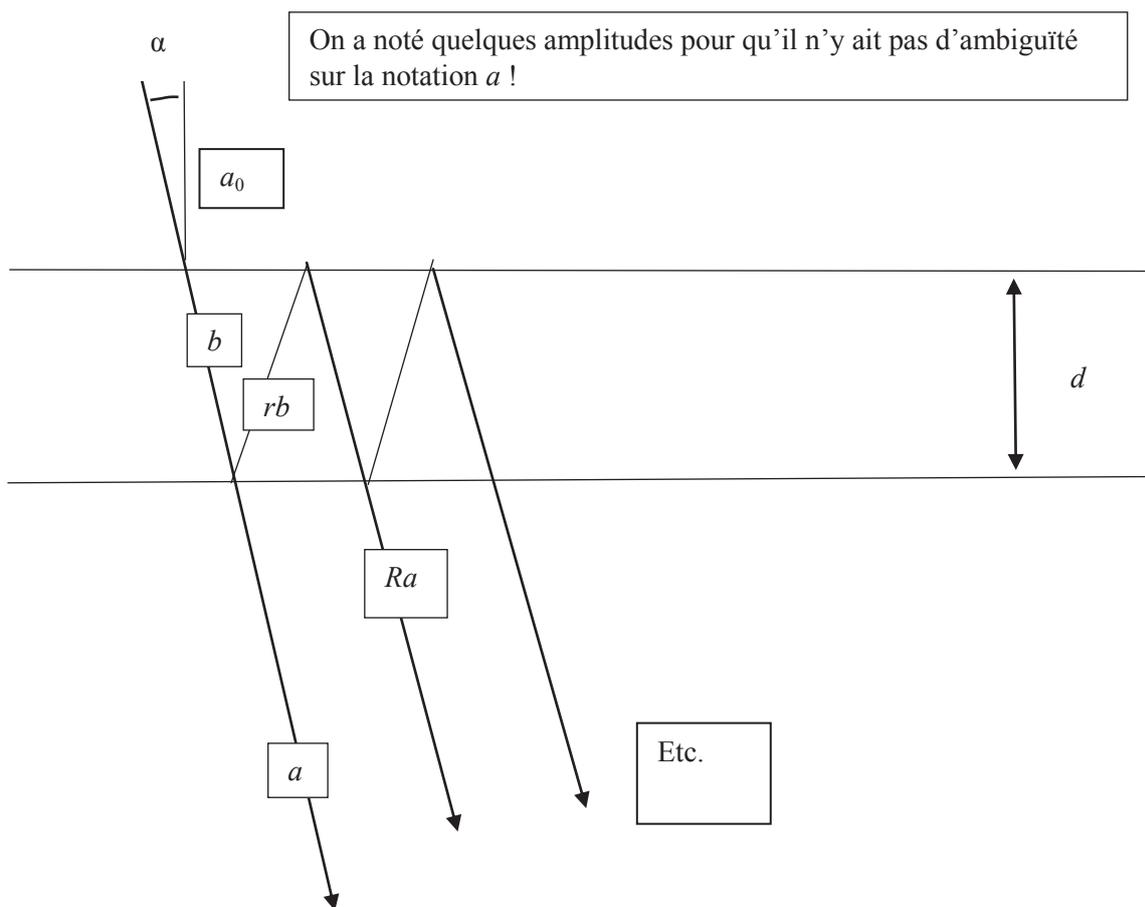


Figure 3 - Interféromètre en incidence oblique

II.9.a. Etablir la différence de marche entre deux rayons transmis successifs.

II.9.b. On appelle $r = \frac{a_{\text{réfléchié}}}{a_{\text{incidente}}}$ le coefficient de réflexion de l'amplitude de l'onde lumineuse quand elle se réfléchit sur les miroirs à l'intérieur de la cavité. On note $R = r^2$ qui a une valeur quantité proche de 1 mais évidemment inférieure. Comment s'écrit l'amplitude du n ème rayon transmis si on nomme a l'amplitude de l'onde émergente sur le premier rayon transmis quand elle sort du miroir inférieur ? On l'exprimera avec a , R et $\phi = 4\pi/\lambda_0 d \cos \alpha$.

II.9.c. Poser la formule qui permettrait de calculer l'amplitude totale de l'onde dans la direction θ , en tenant compte des interférences de $N \rightarrow \infty$ ondes transmises. On rappelle que la somme des termes d'une progression géométrique se calcule avec la formule :

$$\sum_{n=0}^{n=N} x^n = (1 - x^{N+1})/(1 - x).$$

On en déduit que le facteur de transmission vaut $G(\alpha, d) = \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} d \cos \alpha \right) \right]^{-1}$.

II.9.d. Quelle sera la forme des figures d'interférences observées dans le plan focal d'une lentille convergente placée parallèlement aux miroirs ?

II.9.e. A quelles valeurs de ϕ correspondent les pics d'intensité ?

II.9.f. Pour la suite du problème, on observe dans la direction $\alpha = 0$. Que devient la fonction $G(0, d)$ dans le cas où R est très grand, c'est-à-dire $R = 1 - \rho$ avec ρ très petit devant 1 ?

II.10. On suppose que $d = d_0 = p \frac{\lambda_0}{2}$ avec p entier. On veut donner une évaluation de la largeur des pics. Comme l'intensité n'est jamais nulle, on va prendre sa largeur à mi-hauteur, c'est-à-dire chercher l'intervalle $\Delta d = d^+ - d^-$, autour de d_0 dans lequel $G(0, d) > 1/2$.

II.10.a. Quand avez-vous déjà utilisé ce genre de point de vue dans un autre domaine de la physique ?

II.10.b. Quelle est la valeur de p si on a écarté le miroir de droite à partir de la distance $d_0 = 1,2615$ cm entre les deux miroirs ?

II.10.c. Calculer Δd en fonction de ρ .

II.10.d. On considère qu'on peut distinguer 2 pics correspondant à 2 longueurs d'onde voisines λ et $\lambda + \Delta\lambda$, si le déplacement de d , qui fait passer d'un pic à l'autre au même ordre p , est supérieur à $\Delta\lambda/2$. En déduire quel est le plus petit écart de longueur d'onde détectable $\Delta\lambda$ en fonction de ρ , p et λ_0 .

II.10.e. Justifier l'hypothèse de la question **II.4.a** (page 5).

II.11. On travaille avec des parois métallisées de telle façon que $R = 0,95$. Déterminer Δd , $\Delta\lambda/\lambda_0$ et la valeur minimale G_{\min} du facteur de transmission. Conclure quant à l'observation du décalage Brillouin de l'eau saturante à 50 °C dans l'expérience décrite précédemment.

II.12. Retrouver rapidement l'expression des modes propres d'une onde stationnaire dans la cavité. Quel résultat précédent retrouve-t-on ?

Problème II : Isolation thermique d'une canalisation d'eau

Afin de limiter les pertes thermiques dans les canalisations, on se propose, dans cette partie, d'étudier quelques solutions d'isolation thermique.

La canalisation est cylindrique, d'axe Oz , de rayon r_i et de longueur $L \gg r_i$. L'eau y circulant est à la température T_i . L'objectif de cette partie est de comparer les pertes latérales de la canalisation sans ou avec un isolant.

On adopte le modèle suivant :

- seule la conduction thermique radiale, c'est-à-dire dans une direction perpendiculaire à l'axe Oz , est prise en compte. On néglige donc la conduction selon l'axe Oz ;
- la température de l'eau dans la canalisation est supposée uniforme. La conduction radiale s'opère donc pour $r \geq r_i$ uniquement ;
- l'étude est menée en régime stationnaire ;
- on néglige l'épaisseur de la paroi de la canalisation.

Sans isolant (figure 9, page 14), la canalisation est en contact avec l'air intérieur de l'habitation, de température T_0 .

II.6. La densité surfacique de puissance thermique échangée par transfert conducto-convectif au niveau de la surface latérale de la canalisation est donnée par $\vec{j}_Q = h(T_i - T_0)\vec{u}_r$ (loi de Newton), où h est une constante dimensionnée appelée coefficient d'échange et \vec{u}_r le vecteur unitaire radial de la base cylindrique. Exprimer la puissance thermique P_{th} transférée au niveau de la surface latérale du système.

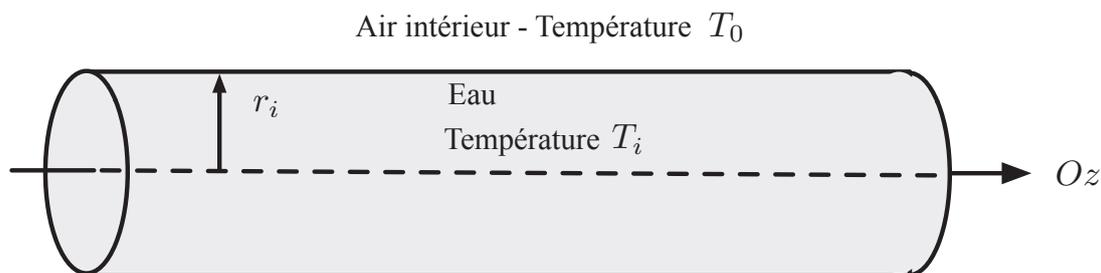


FIGURE 9 – Canalisation sans isolant.

On applique désormais un isolant thermique sur la canalisation précédente. L'isolant possède un rayon intérieur r_i et un rayon extérieur r_e (voir figure 10). En un point situé à une distance r de l'axe Oz et situé à l'intérieur de l'isolant, c'est-à-dire pour $r_i \leq r \leq r_e$ en repérage cylindrique, la température est notée $T(r)$. On note $T_e = T(r_e)$ et $T_i = T(r_i)$.

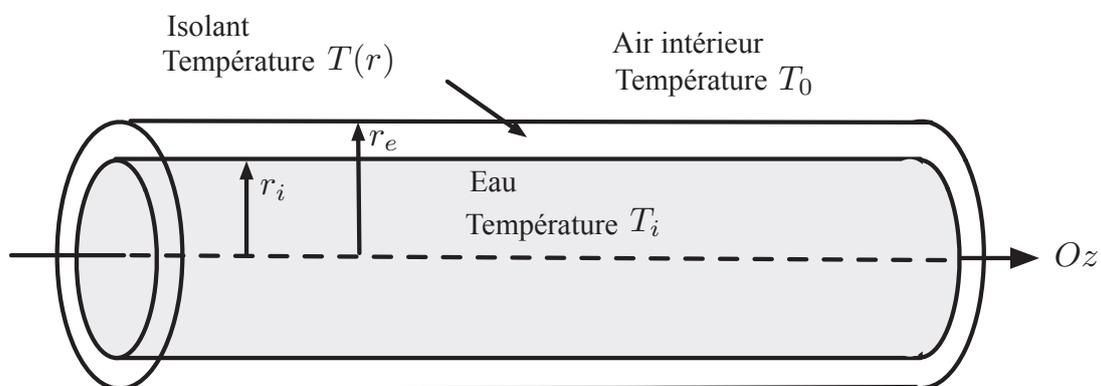


FIGURE 10 – Canalisation avec isolant.

Dans la suite, l'échange conducto-convectif au niveau de la surface intérieure de l'isolant n'est pas pris en compte.

La température de part et d'autre de la surface intérieure de l'isolant est continue : $T(r_i^-) = T(r_i^+) = T_i$.

II.7. On suppose que le coefficient d'échange en $r = r_e$ est h . Exprimer la puissance thermique $P_{th,isolant}$ échangée au niveau de la surface latérale extérieure de l'isolant par conduction-convection en fonction de h , T_0 , T_e , L et r_e .

II.8. On note $P_{cond}(r)$ la puissance thermique associée au phénomène de conduction thermique dans l'isolant, traversant un cylindre de longueur L et de rayon r tel que $r_i \leq r \leq r_e$. Nous allons établir et exploiter le lien entre $P_{th,isolant}$ et $P_{cond}(r)$.

II.8.a. En effectuant un bilan d'énergie interne sur un cylindre de longueur L , de rayons interne r et externe $r + dr$ tels que $r_i \leq r < r + dr \leq r_e$ (avec $dr \ll r$), montrer qu'en régime stationnaire $P_{cond}(r)$ est indépendante de r , soit : $\frac{dP_{cond}(r)}{dr} = 0$.

II.8.b. En déduire que : $P_{cond}(r) = P_{th,isolant}$.

II.8.c. Rappeler l'expression de la loi de Fourier relative à la conduction thermique en exprimant le vecteur densité surfacique de flux de conduction thermique $\vec{j}_{cond}(r) = j_{cond}(r) \vec{u}_r$ en fonction notamment de la conductivité thermique de l'isolant, λ , supposée uniforme. Exprimer ensuite la puissance thermique associée, $P_{cond}(r)$.

Donnée : en repérage cylindrique : $\vec{\text{grad}}(f(r)) = \frac{df(r)}{dr} \vec{u}_r$.

II.8.d. Dédurre des questions précédentes que : $\frac{dT}{dr} = \frac{hr_e}{\lambda r} (T_0 - T_e)$.

II.8.e. En déduire l'expression de $T(r)$.

II.8.f. En déduire que : $T_e = T_0 + \frac{T_i - T_0}{1 + \frac{hr_e}{\lambda} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}$.

II.9. Montrer que : $\frac{P_{th}}{P_{th,isolant}} = \frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$, avec $x = \frac{r_e}{r_i}$ et α à exprimer en fonction de h , r_i et λ .

On envisage deux solutions d'isolation différentes. On donne pour chacune d'elles : $h = 3,0 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ et $r_i = 2,0 \text{ cm}$.

— Solution d'isolation n° 1 : l'isolant est du polyuréthane, de conductivité thermique : $\lambda_1 = 0,025 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Le graphe de $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$ en fonction de x est représenté sur la figure 11 ci-dessous pour la valeur de α correspondante.

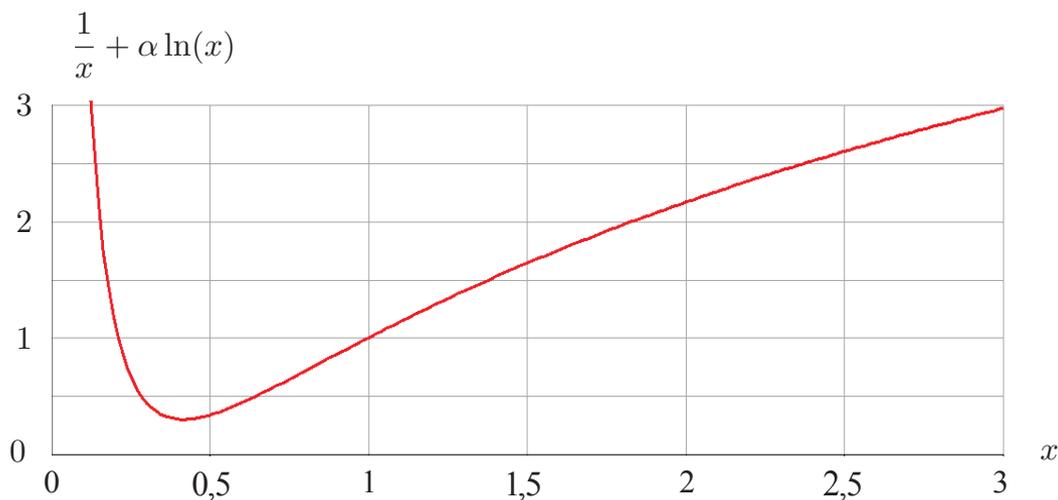


FIGURE 11 – Graphe de la fonction $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$ fonction de x pour la valeur de α du polyuréthane.

— Solution d'isolation n° 2 : l'isolant est du plâtre, de conductivité thermique λ_2 .

Le graphe de $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$ en fonction de x est représenté sur la figure 12 (page 16) pour la valeur de α correspondante. L'encart représente un agrandissement pour $0 \leq x \leq 8$.

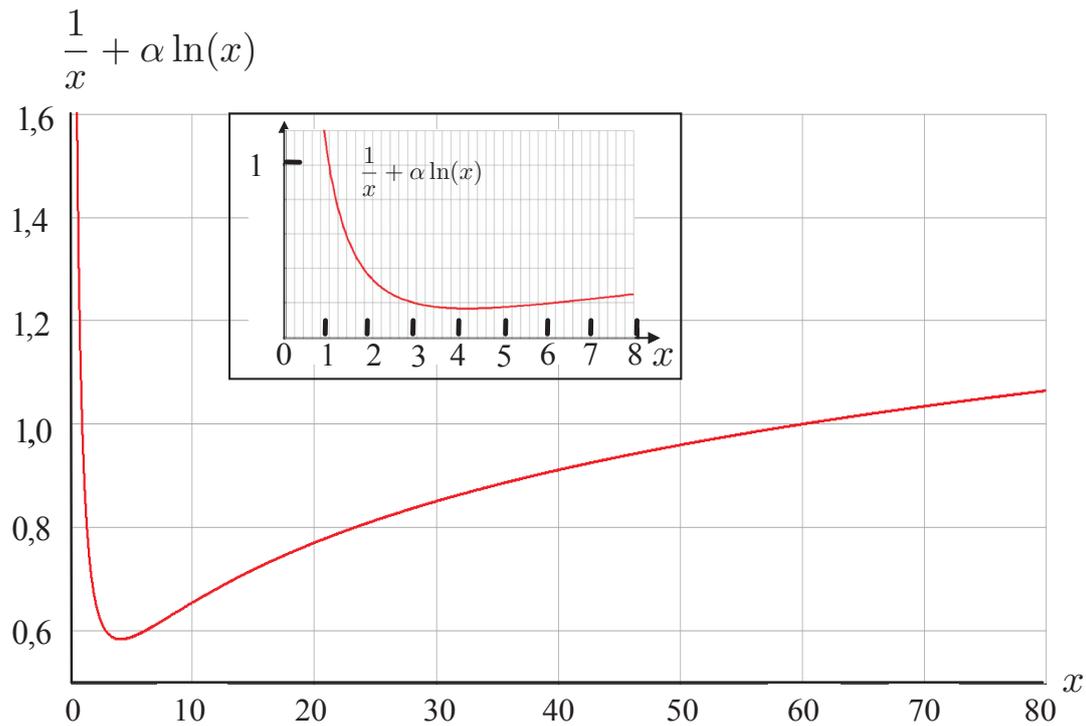


FIGURE 12 – Graphe de la fonction $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$ fonction de x pour la valeur de α du plâtre.

II.10. En vous appuyant sur les graphes des figures 11 et 12, répondre de façon argumentée aux questions suivantes :

II.10.a. Est-il toujours efficace d'isoler avec du polyuréthane ?

II.10.b. Est-il toujours efficace d'isoler avec du plâtre ? Le cas échéant, déterminer à partir de quelle valeur de r_e l'isolation au plâtre devient efficace et commenter.

II.10.c. Pour quelle valeur x_m de x la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$ admet-elle un minimum ?

II.10.d. En déduire la valeur numérique de la conductivité thermique du plâtre λ_2 .

Fin de l'énoncé