Correction du concours blanc (CCP)

Problème I : Physique des ondes et particules associées

I Dualité onde-corpuscule

I.1 On sait que dans un milieu quelconque, $\vec{k} = \dfrac{\omega}{v_\varphi}\vec{u}$ avec v_φ la vitesse de phase et $\vec{u}$ le vecteur unitaire indiquant la direction et le sens de propagation. La quantité de mouvement du photon est alors donnée par $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.

I.2 La relation de Planck-Einstein donne pour un photon : $E = \hbar\omega = \dfrac{hc}{\lambda}$. Les applications numériques donnent pour un photon visible $E \simeq 2\,\text{eV}$ et pour un photon X $E \simeq 1\,\text{keV}$.

I.3 Si le photon (de longueur d'onde λ_0 dans le vide) se déplace dans un milieu d'indice n, sa vitesse de phase (égale à la vitesse de groupe) est donnée par $v_\varphi = v_g = \dfrac{c}{n}$. On obtient ainsi $\|\vec{p}\| = \dfrac{\hbar\omega}{v_\varphi} = \dfrac{n\hbar\omega}{c} = \dfrac{nh}{\lambda_0}$.

I.4 Pour cette particule, on a d'après la relation de De Broglie : $\vec{k} = \dfrac{\vec{p}}{\hbar}$ puis $\omega = \dfrac{E}{\hbar}$.

I.5 a) L'énergie potentielle d'un électron soumis à un potentiel électrique V s'écrit $E_p = -eV$. Par conservation de l'énergie mécanique, il vient : $0 - eV_i = \dfrac{1}{2}mv_f^2 - eV_f$ d'où $v_f = \sqrt{\dfrac{2e(V_f - V_i)}{m}} = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}}$.
Par conséquent, $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{\sqrt{2emU}}$.

b) Pour un photon X, $\lambda \simeq 10^{-10}\,\text{m}$, l'application numérique donne $U \simeq 150\,\text{V}$.

I.6 L'énergie d'agitation thermique vaut $E_{th} = \dfrac{3}{2}k_BT$ d'après le théorème d'équipartition de l'énergie. La quantité de mouvement de ces électrons s'écrit $p_{th} = \sqrt{2mE_{th}}$, on en déduit donc que leur longueur d'onde de De Broglie vaut $\lambda_{db} = \dfrac{h}{p} \simeq 6\,\text{nm}$. Cette longueur d'onde est grande devant le paramètre de maille du réseau : ces électrons doivent être considérés comme quantiques.

I.7 On peut citer dans l'ordre chronologique :

Planck (1900) : l'énergie est quantifiée

Einstein (1905) : la lumière est constituée de particules, les photons

Bohr (1913) : les rayons des orbitales électroniques dans les atomes sont quantifiées

De Broglie (1923) : la matière peut être décrite comme une onde

Schrödinger (1926) : équation régissant l'évolution de la fonction d'onde d'une particule

Heisenberg (1932) : principes d'incertitude

I.8 a) On a toujours $\|\vec{q}\| = \hbar\|\vec{k}\| = \dfrac{\hbar\omega}{V} = \dfrac{h\nu}{V}$.

b) On sait également que $e_p = \hbar\omega = h\nu$.

c) Les applications numériques donnent : $q = 4{,}4 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ et $e_p = 4{,}1 \times 10^{-12}\,\text{eV}$.

d) Pour un photon visible dans le vide, $E \simeq 2\,\text{eV} \gg e_p$ et $p \simeq 10^{-27}\,\text{J}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1} \gg q$. L'énergie et la quantité de mouvement du photon visible dans le vide sont très grandes devant celles du phonon.

I.9 Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système isolé dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen assure que la dérivée de la quantité de mouvement est nulle, donc la quantité de mouvement totale se conserve. Si les forces exterieures qui s'éxercent sur le système sont nulles alors il y a également conservation de l'énergie mécanique.

I.10 a) La conservation de la quantité de mouvement entre l'état initial et l'état final donne :

$$p_{inc} + q = p_{em}^{+} \Longrightarrow \frac{nh}{\lambda_{inc}} + 2\frac{nh}{\lambda_{inc}}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{nh}{\lambda_{em}^{+}}$$

soit avec $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$: $\Delta\nu^{+} = 2\dfrac{c}{\lambda_{inc}}\sin\dfrac{\theta}{2} = 2\dfrac{nV}{\lambda_{inc}}\sin\dfrac{\theta}{2}$.

b) L'application numérique donne :

i- L'application numérique donne $\Delta\nu^{+} \simeq 5{,}4 \times 10^{9}\,\text{Hz}$

ii- On en déduit que $\dfrac{\Delta\lambda^{+}}{\lambda_{inc}} = \dfrac{\lambda_{em}^{+}}{\lambda_{inc}} - 1 = \dfrac{c}{\lambda_{inc}(\nu_{inc} + \Delta\nu^{+})} - 1 = \dfrac{c}{c + \lambda_{inc}\Delta\nu^{+}} - 1 \simeq -9{,}5 \times 10^{-6}$.

c) Pour un réseau utilisé à l'ordre 1 et en considérant des petits angles, la formule des réseaux donne pour deux longueurs d'onde proches λ_1 et λ_2 : $\theta_2 - \theta_1 \approx \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{a}$, soit la résolution relative du spectromètre à réseau : $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_1} \approx \dfrac{a\Delta\theta}{\lambda_1}$. La résolution relative maximale est obtenue avec un pas de l'ordre de la longueur d'onde (impossible de prendre un pas plus grand) et alors $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_1} \approx \Delta\theta \simeq \dfrac{1}{10}$ par utilisation d'un goniomètre. La résolution d'un spectromètre à réseau est donc bien trop insuffisante pour déceler le décallage Brillouin.

II Interférométrie à fort pouvoir de résolution

II.1 En incidence normale, la différence de marche entre deux rayons émergents successifs vaut $\Delta L = 2d$.

II.2 Pour que les interférences soient constructives, il faut que la différence de marche entre deux rayons successifs soit un multiple entier de la longueur d'onde.

II.3 Pour une composante de longueur d'onde λ, l'ordre d'interférence est défini par $p = \dfrac{\Delta L}{\lambda} = \dfrac{2d}{\lambda}$.

II.4 a) Les interférences sont constructives pour un ordre d'interférence p entier, soit $d_p = \dfrac{p\lambda}{2}$. L'intensité reçue en fonction de d présente des pics régulièrement espacés.

b) Entre deux pics, on a $\delta = \lambda/2$.

II.5 Le spectre en fréquence correspondant est composé de $\nu^{-} = \dfrac{c}{\lambda^{-}}$, $\nu_{inc} = \dfrac{c}{\lambda_{inc}}$ et $\nu^{+} = \dfrac{c}{\lambda^{+}}$ telles que $\nu^{-} < \nu_{inc} < \nu^{+}$.

II.6 D'après ce qui précède, $d_0 = \dfrac{p\lambda_{inc}}{2}$.

II.7 a) Les valeurs correspondantes de d sont $d = (p \pm 1)\dfrac{\lambda_{inc}}{2}$, on retrouve $\delta = \dfrac{\lambda_{inc}}{2}$.

b) La valeur correspondante au pic pour la longueur d'onde λ^{+} est $d = d_0 - \varepsilon = \dfrac{p\lambda^{+}}{2} = p\dfrac{\lambda_{inc} + \Delta\lambda^{+}}{2}$ d'où $\varepsilon = -p\dfrac{\Delta\lambda^{+}}{2}$. De la même manière, la valeur de d correspondante au pic pour la longueur d'onde

λ^- est $d = d_0 + \varepsilon = \dfrac{p\lambda^-}{2} = p\dfrac{\lambda_{inc} + \Delta\lambda^-}{2}$ d'où $\varepsilon = p\dfrac{\Delta\lambda^-}{2}$.
L'énoncé semble suggérer que $\Delta\lambda^+ = -\Delta\lambda^-$, ce qui ne paraît pas évident.

c) D'après ce qui précède, $Z = -\Delta\nu^+ \dfrac{\lambda_{inc}}{2}\dfrac{2}{p\Delta\lambda^+} = -\left(\dfrac{1}{\lambda^+} - \dfrac{1}{\lambda_{inc}}\right)\dfrac{c\lambda_{inc}}{p\Delta\lambda^+} = -\dfrac{\lambda_{inc} - \lambda^+}{\lambda_{inc}\lambda^+}\dfrac{c\lambda_{inc}}{p\Delta\lambda^+}$. On en déduit que $Z = \dfrac{c}{p\lambda^+}$. Pour obtenir le résultat demandé, il faut faire l'approximation $\Delta\lambda^+ \ll \lambda_{inc}$ d'où $Z \simeq \dfrac{c}{p\lambda_{inc}} = \dfrac{c}{2d_0}$.

Si $\Delta\nu^+ > Z$, cela signifie que $\varepsilon > \delta$, soit encore $p|\Delta\lambda^+| > \lambda_{inc}$. Il faudrait travailler dans un ordre très élevé dans ce cas (grande valeur de d_0) ce qui n'est pas envisageable en pratique. Le mieux est de choisir d_0 telle que $\Delta\nu^+ < Z = \dfrac{c}{2d_0}$, d'où $d_0 < \dfrac{c}{2\Delta\nu^+} \simeq 2{,}8\,\mathrm{cm}$. La valeur proposée convient donc.

II.8 a) L'intervalle spectral libre correspond au décallage fréquentiel initial (pour une épaisseur d_0). Les trois pics d'amplitude $0,89$ correspondent ainsi aux ordres $p-1$, p et $p+1$ de la fréquence ν_{inc}, avec $p = \dfrac{2d_0}{\lambda_{inc}} = \dfrac{c}{Z\lambda_{inc}} \simeq 37\,736$.

On a de plus $\delta = \dfrac{\lambda_{inc}}{2} \simeq 265\,\mathrm{nm}$ et $\varepsilon = -p\dfrac{\Delta\lambda^+}{2} \simeq 96\,\mathrm{nm}$. Lorsque d augmente à partir de d_0, comme $\varepsilon < \delta$, le premier pic observé pourrait correspondre soit à l'ordre p de la longueur d'onde λ^- soit à l'ordre $p+1$ de la longueur d'onde λ^+. Ces deux pics sont respectivement observés pour $d = d_0 + \varepsilon$ et $d = d_0 + \dfrac{\lambda^+}{2} - \varepsilon > d_0 + \varepsilon$. C'est donc l'ordre p de la longueur d'onde λ^- qui est observé en premier puis l'ordre $p+1$ de la longueur d'onde λ^+ avant de trouver l'ordre $p+1$ de la longueur d'onde λ_{inc}. Le principe est le même si d diminue depuis d_0.

Le décallage en fréquence est réalisé en modifiant la valeur de d mais une augmentation de d augmente le décalage en longueur d'onde et donc diminue le décalage en fréquence. Tout cela conduit au tableau suivant :

Décalage fréquentiel	0,0	5,4	9,6	15	21,4	25,6	30
Ordre	$p+1$	$p+1$	p	p	p	$p-1$	$p-1$
Fréquence	ν_{inc}	ν^+	ν^-	ν_{inc}	ν^+	ν^-	ν_{inc}

b) On avait précédemment $\Delta\nu^+ = 2\dfrac{nV}{\lambda_{inc}}\sin\dfrac{\theta}{2}$, l'application donne alors $V = 1353\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

II.9 a) La différence de marche entre deux rayons successifs est donnée par $\delta = \dfrac{2d}{\cos\alpha} + 2d\tan\alpha\sin\alpha = 2d\cos\alpha$, soit un déphasage entre ces deux ondes de $\phi = \dfrac{2\pi\delta}{\lambda_0}$.

b) La vibration lumineuse de la première onde émergente vaut en un point M de l'écran d'observation : $\underline{s}_1(M,t) = a\exp(j\omega_0 t)$ (la phase de cette onde est choisie nulle). La vibration de la deuxième onde émergente est alors $\underline{s}_2(M,t) = Ra\exp(j\omega_0 t + j\phi)$. La vibration lumineuse de la troisième onde s'écrit $\underline{s}_3(M,t) = R^2 a\exp(j\omega_0 t + 2j\phi)$. Le résultat se généralise pour la n-ième onde :

$$\underline{s}_n(M,t) = R^{n-1}a\exp(j\omega_0 t + (n-1)j\phi)$$

c) La vibration totale est alors donnée par la somme des vibrations de toutes ces ondes :

$$\underline{s}(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\underline{s}_n(M,t) = ae^{j\omega_0 t}\sum_{n=0}^{\infty}\left(Re^{j\phi}\right)^n = ae^{j\omega_0 t}\frac{1}{1 - Re^{j\phi}}$$

d) Le facteur de transmission ne dépend que de l'angle d'incidence : on observe des anneaux d'égale inclinaison.

e) Les interférences sont constructives si les ondes sont en phase, c'est-à-dire pour ϕ multiple entier de 2π : $\phi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

f) Dans ce cas, le coefficient de transmission s'écrit : $G(0,d) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{4}{\rho^2}\sin^2\left(\dfrac{2\pi d}{\lambda_0}\right)}$.

II.10 a) La méthode est similaire en électricité pour déterminer la bande passante d'un filtre.

b) Il faut certainement utiliser $\lambda_0 = \lambda_{inc}$ pour trouver $p = 2\dfrac{d_0}{\lambda_0} \simeq 47\,604$.

c) On cherche $d^{\pm}$ tel que :

$$G(0,d^{\pm}) = \frac{1}{1 + \dfrac{4}{\rho^2}\sin^2\left(\dfrac{2\pi d^{\pm}}{\lambda_0}\right)} = \frac{1}{2}$$

Cela donne $d^{\pm} = \pm\dfrac{\lambda_0}{2\pi}\arcsin\left(\dfrac{\rho}{2}\right) \approx \dfrac{\lambda_0\rho}{4\pi}$. On en déduit donc que $\Delta d = \dfrac{\lambda_0\rho}{2\pi}$.

d) Il y a une erreur d'énoncé : il faut lire $d > \Delta d/2$ et non $d > \Delta\lambda/2$. L'ordre initial est donné par $p = \dfrac{2d_0}{\lambda_0}$ et on déplace le miroir mobile d'une distance d de sorte à ce que pour la nouvelle longueur d'onde : $p = \dfrac{2(d_0+d)}{\lambda_0 + \Delta\lambda}$. Ainsi, l'écart en longueur d'onde est détectable si $p > \dfrac{2d_0 + \Delta d)}{\lambda_0 + \Delta\lambda}$. Cette relation équivaut, comme $2d_0 = p\lambda_0$, à :

$$\Delta\lambda > \frac{\Delta d}{p} = \frac{\lambda_0\rho}{2p\pi}$$

e) Il faut certainement justifier que l'intensité est négligeable en dehors des pics, mais ce n'est pas clair.

II.11 Les applications numériques donnent : $\Delta d = 4\,\text{nm}$, $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \dfrac{\lambda_0\rho}{4\pi d_0} = 1{,}6 \times 10^{-7}$ et $G_{min} = \dfrac{\rho^2}{\rho^2+4} \simeq 6{,}2 \times 10^{-4}$. Avec cette résolution, il est possible de déceler le décalage brillouin.

II.12 Je ne vois pas le rapport...

Problème II : Isolation thermique d'une canalisation d'eau

II.6 La puissance fournie par la canalisation au fluide extérieur vaut $P_{th} = \iint \vec{j}_Q \cdot \mathrm{d}\vec{S} = h\,(T_i - T_0)\,2\pi r_i L$.

II.7 De la même manière, la puissance fournie (et non échangée) par l'isolant au fluide extérieur par conducto-convection est $P_{th,isolant} = h\,(T_e - T_0)\,2\pi r_e L$.

II.8 a) En appliquant le premier principe à la couche cylindrique de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + \mathrm{d}r$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = P_{cond}(r) - P_{cond}(r + \mathrm{d}r)$$

En régime stationnaire, $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0$, on en déduit que P_{cond} est indépendante de r.

b) Par continuité du flux thermique, donc de la puissance thermique, en régime stationnaire, la puissance thermique conductive en r_e^- est égale à la puissance thermique conducto-convective en r_e^+ :

$$P_{\text{cond}}(r_e^-) = P_{\text{cond}}(r) = P_{th,isolant}$$

c) La loi de Fourier s'écrit : $\vec{j}_{cond}(r) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r$. On en déduit : $P_{cond} = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} 2\pi r L$.

d) Comme $P_{cond} = P_{th,isolant}$, on déduit que $-\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} 2\pi r L = h\left(T_e - T_0\right) 2\pi r_e L$, soit :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \frac{hr_e}{\lambda r}\left(T_0 - T_e\right)$$

e) Par intégration entre $r = r_i$ $(T = T_i)$ et r $(T = T(r))$, il vient : $T(r) = T_i + \dfrac{hr_e}{\lambda}\left(T_0 - T_e\right)\ln\left(\dfrac{r}{r_i}\right)$.

f) D'après ce qui précède, $T_e = T(r_e) = T_i + \dfrac{hr_e}{\lambda}\left(T_0 - T_e\right)\ln\left(\dfrac{r_e}{r_i}\right)$, ce qui donne

$$T_e = \frac{T_i + T_0 \dfrac{hr_e}{\lambda}\ln\left(\dfrac{r_e}{r_i}\right)}{1 + \dfrac{hr_e}{\lambda}\ln\left(\dfrac{r_e}{r_i}\right)} = T_0 + \frac{T_i - T_0}{1 + \dfrac{hr_e}{\lambda}\ln\left(\dfrac{r_e}{r_i}\right)}$$

II.9 On a d'après les questions précédentes : $\dfrac{P_{th}}{P_{th,isolant}} = \dfrac{T_i - T_0}{T_e - T_0}\dfrac{r_i}{r_e}$ or on sait que $\dfrac{T_i - T_0}{T_e - T_0} = 1 + \dfrac{hr_e}{\lambda}\ln\left(\dfrac{r_e}{r_i}\right)$. On en déduit :

$$\frac{P_{th}}{P_{th,isolant}} = \left[1 + \frac{hr_e}{\lambda}\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)\right]\frac{r_i}{r_e}$$

c'est-à-dire la relation demandée en posant $x = \dfrac{r_e}{r_i}$ et $\alpha = \dfrac{hr_i}{\lambda}$.

II.10 Remarquons que l'ajout d'un isolant (avec $x = \dfrac{r_e}{r_i} > 1$) présente un intérêt si $\dfrac{P_{th}}{P_{th,isolant}} > 1$.

a) La figure 11 de l'énoncé montre que pour $x > 1$, $\dfrac{1}{x} + \alpha\ln(x)$ est une fonction croissante de x et qu'elle est toujours supérieure à 1. On a donc toujours $P_{th,isolant} < P_{th}$ quelle que soit l'épaisseur d'isolant. Le polyuréthane isole quelle que soit son épaisseur.

b) la figure 12 monte un comportement différent. Pour $x \in [1;60]$, $P_{th} < P_{th,isolant}$ donc ajouter du plâtre augmente la puissance cédée par l'eau à l'air ambiant : l'eau se refroidit alors plus vite qu'en l'absence de plâtre. C'est seulement pour $x > 60$, soit $r_e > 60r_i = 120\,\text{cm}$ que l'isolant devient efficace, c'est peu réaliste. Ce comportement est du à la résistance conducto-convective qui diminue avec r_e.

c) Soit $f(x) = \dfrac{1}{x} + \alpha\ln x$. Pour trouver l'abscisse x_m correspondant au minimum de cette fonction, on la dérive : $f'(x) = \dfrac{\alpha x - 1}{x^2}$. Ainsi, x_m est tel que $f'(x_m) = 0$ d'où $x_m = \dfrac{1}{\alpha}$.

d) La figure 12 montre que $x_m \approx 4$. On en déduit que $\dfrac{hr_i}{\lambda_2} = \dfrac{1}{4}$ puis que $\lambda_2 = 4hr_i = 0{,}24\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$.

• • • FIN • • •