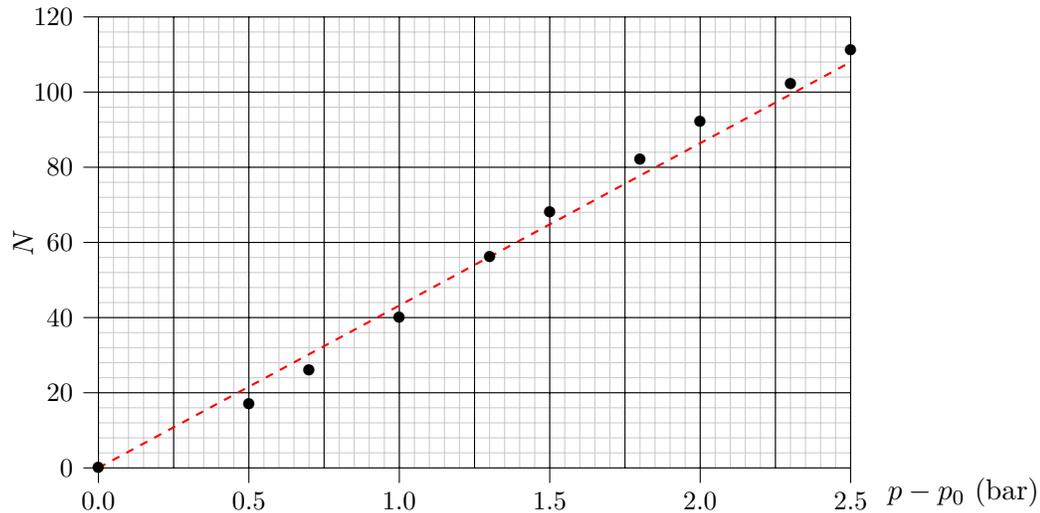




une frange défile à chaque fois que la différence de marche varie de  $\lambda_0$  donc  $\delta_{\text{sup}} = N\lambda_0$ . On en déduit

$$N = \frac{a}{T_0}(p - p_0) \frac{2L}{\lambda_0}.$$

- 4 — On peut tracer la droite  $N = f(p - p_0)$ , la pente de celle-ci est donnée par  $q = \frac{2aL}{T_0\lambda_0}$ . Le graphique ci-dessous montre le tracé et permet de proposer la valeur  $q = \frac{108}{2,5} = 43,2$  donc  $a = 8,6 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{bar}^{-1}$  ou  $a = 8,6 \cdot 10^{-7} \text{ K} \cdot \text{Pa}^{-1}$ . Un outil de calcul donnerait une estimation plus précise de la pente et donc de la valeur de  $a$ .



- 5 — Le principe fondamental de la dynamique s'écrit  $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - m_e\Gamma\vec{v} - m_e\omega_0^2\vec{r}$  à condition de négliger la partie magnétique de la force de Lorentz. Ceci résulte de l'approximation **non relativiste** puisque l'équation de Maxwell-Faraday impose, pour une OPPM, la relation  $\vec{B} = \frac{k\wedge\vec{E}}{\omega}$  donc  $\|\vec{B}\| \leq \frac{1}{v_\varphi}\|\vec{E}\|$ , soit encore  $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \leq \frac{v}{v_\varphi}\|\vec{E}\| \ll \|\vec{E}\|$  si  $v \ll v_\varphi \sim c$ . En notation complexe, on cherche des solutions de la

forme  $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i\omega t}$  donc  $\frac{d\vec{v}}{dt} = i\omega\vec{v}$  et  $\vec{r} = \frac{\vec{v}}{i\omega}$ . Il vient donc

$$\vec{v} = -\frac{e}{m_e} \frac{\vec{E}}{i\omega + \Gamma + \frac{\omega_0^2}{i\omega}}.$$

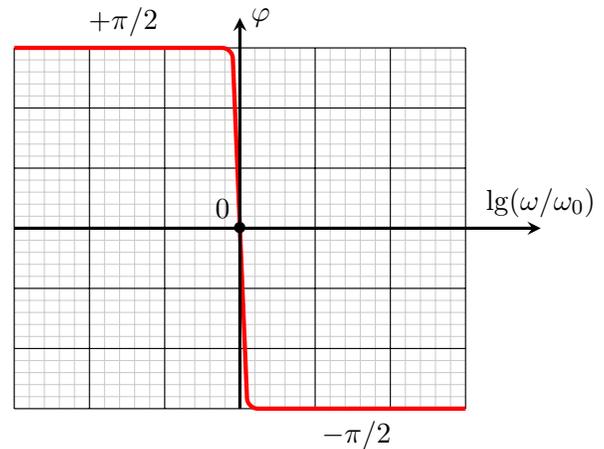
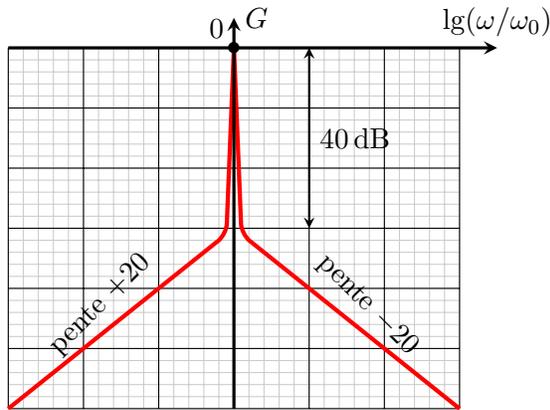
- 6 — La même méthode fournirait une vitesse des ions beaucoup plus faible à cause de leur **forte masse**. Celle du proton est en effet au moins de l'ordre de 2000 fois celle de l'électron. La densité volumique de courant  $\vec{j} = -2n^*e\vec{v}_e$  (il y a deux électrons électroactifs par molécule) s'écrit donc
- $$\vec{j} = \frac{2n^*e^2}{m_e} \frac{i\omega}{-\omega^2 + i\omega\Gamma + \omega_0^2} \vec{E}$$
- qui prend la forme de l'énoncé si on pose  $\kappa = 2$ .

- 7 — Il s'agit d'un filtre **passé bande** puisque  $\gamma \sim \frac{2n^*e^2}{m_e} \frac{i\omega}{\omega_0^2} \rightarrow 0$  si  $\omega \rightarrow 0$  tandis que  $\gamma \sim \frac{n^*e^2}{m_e} \frac{1}{i\omega} \rightarrow 0$  si  $\omega \rightarrow \infty$ . Cette fonction de transfert peut-être mise sous sa forme canonique :  $\gamma = \frac{2ne^2}{m_e\Gamma} \frac{1}{1 + iQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

de pulsation de résonance  $\omega_0$  en posant le facteur de qualité  $Q = \frac{\omega_0}{\Gamma}$ . Le maximum du module de cette

fonction est  $\gamma_0 = \frac{2n^*e^2}{m_e\Gamma}$  ce qui s'écrit finalement  $\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + iQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ . Le tracé du diagramme de

Bode, en gain et en phase, montre une résonance très aiguë.



□ 8 — Dans un milieu neutre ( $\rho = 0$ ), les équations de Maxwell s'écrivent  $\boxed{\text{div } \vec{E} = 0}$ ,  $\boxed{\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ ,  $\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$  et  $\boxed{\text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \gamma \vec{E}}$ . En notation complexe, on peut donc aussi écrire cette dernière relation sous la forme  $\text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 i \omega \vec{E} \left(1 + \frac{\gamma}{\varepsilon_0 i \omega}\right)$  qui est la même relation que dans le vide en remplaçant  $\varepsilon_0$  par  $\varepsilon_0 \varepsilon_r$  avec  $\boxed{\varepsilon_r = 1 + \frac{\gamma}{\varepsilon_0 i \omega}}$ . On obtiendra alors l'équation de d'Alembert  $\boxed{\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$ .

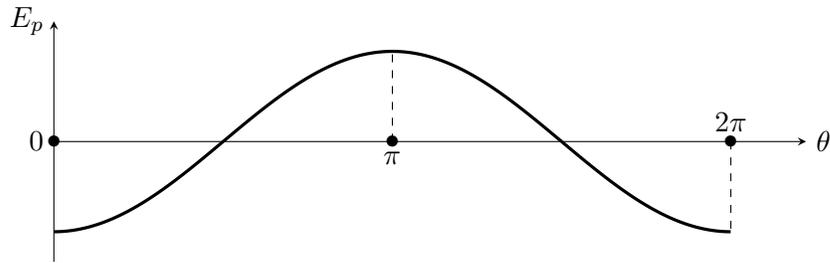
□ 9 — Si on néglige les frottements,  $\Gamma = 0$ . De plus, si  $\omega \ll \omega_0$  on aura  $\gamma \simeq \frac{2n^* e^2 i \omega}{m_e \omega_0^2}$  donc  $\boxed{\varepsilon_r = 1 + \frac{2n^* e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega_0^2}}$ . La célérité de l'onde vérifie  $\frac{1}{v^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r = \frac{n^2}{c^2}$  donc  $\boxed{n^2 = \varepsilon_r}$  d'où  $n^2 - 1 = \frac{2n^* e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega_0^2} \ll 1$ . On en déduit que  $n = \sqrt{1 + \frac{2n^* e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega_0^2}} \simeq 1 + \frac{n^* e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega_0^2}$ .

□ 10 — La densité particulaire  $n^*$  apparaît dans l'équation d'état sous la forme  $P = n^* k_B T$  donc  $\boxed{n = 1 + \frac{P e^2}{m_e k_B T \varepsilon_0 \omega_0^2}}$ . Ceci est vrai aussi pour  $n_0$  :  $n_0 = 1 + \frac{P_0 e^2}{m_e k_B T \varepsilon_0 \omega_0^2}$  donc par différence  $n - n_0 = \frac{a}{T_0} (P - P_0)$  où  $\boxed{a = \frac{e^2}{m_e k_B \varepsilon_0 \omega_0^2}}$ . L'application numérique donne  $\boxed{\omega_0 \simeq 1,5 \times 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$  qui est dans le domaine des ultraviolets proches. La condition  $\omega \ll \omega_0$  est donc vérifiée dans le domaine visible.

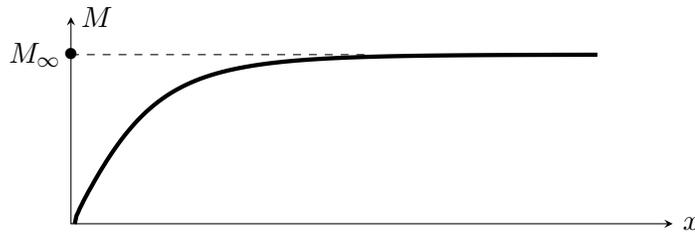
□ 11 — Les positions d'équilibre correspondant à l'annulation du moment donc à  $\vec{\mu} \wedge \vec{B} = 0$  lorsque les deux vecteurs sont colinéaires, de même sens ou de sens contraire. Si on s'écarte un peu de l'état où  $\vec{\mu}$  et  $\vec{B}$  sont de même sens (ci-dessous à gauche), le couple de forces ramène  $\vec{\mu}$  vers  $\vec{B}$  : l'équilibre est donc stable. Un raisonnement similaire montre que le cas où  $\vec{\mu}$  et  $\vec{B}$  sont de sens contraire (ci-dessous à droite) correspond à un équilibre instable.



Posant l'énergie potentielle associée  $E_p = -\mu B \cos \theta$  où  $\theta$  est l'angle entre les deux vecteurs on retrouve le même résultat :



- 12 — Dans un mouvement circulaire  $\vec{r}$  est perpendiculaire à  $\vec{v}$  donc  $L = m_e r v$ . L'intensité du courant est donnée par  $i = -\frac{e}{\tau}$ . Comme l'électron effectue un tour en une période  $\tau$ , la vitesse est  $v = \frac{2\pi r}{\tau}$  donc  $i = -\frac{ev}{2\pi r}$ . Le moment magnétique correspondant est  $\mu = \pi r^2 i$  donc  $\mu = -\frac{evr}{2}$  ou encore  $\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$  qui est dirigé selon la normale à la surface donc colinéaire à  $\vec{L}$  mais de sens contraire du fait du signe de la charge de l'électron. Comme par ailleurs  $L = p\hbar$ , on en déduit  $\mu = p\mu_B$  avec  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,3 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ .
- 13 — La loi de probabilité de Boltzmann s'écrit  $P_k = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_k}{k_B T}\right)$  avec  $E_k = -kg\mu_B B$  donc  $x = \frac{g\mu_B B}{k_B T}$ .
- 14 — La normalisation de la probabilité impose  $\sum_k P_k = 1$  donc  $Z = \sum_{k=-m}^m \exp(kx)$  qui est la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $e^x$  comportant  $2m+1$  termes et dont le premier terme vaut  $e^{-mx}$ . On en déduit  $Z = \frac{e^{-mx} - e^{(m+1)x}}{1 - e^x}$  soit encore, en mettant en facteur  $e^{x/2}$  au numérateur et au dénominateur,  $Z = \frac{\text{sh}\left((2m+1)\frac{x}{2}\right)}{\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}$ .
- 15 — Par définition de la moyenne d'une variable aléatoire,  $\langle \mu_z \rangle = \sum P_k k g \mu_B$  donc  $\langle \mu_z \rangle = \frac{g\mu_B}{Z} \sum x e^{kx}$ . Comme  $Z = \sum e^{kx}$ , on a  $\frac{dZ}{dx} = \sum x e^{kx}$  soit  $\langle \mu_z \rangle = g\mu_B \frac{d}{dx} [\ln Z(x)]$ . On peut aussi écrire  $M = n^* \langle \mu_z \rangle$  et on calcule  $\frac{d}{dx} [\ln Z(x)] = (m + \frac{1}{2}) \frac{\text{ch}\left((2m+1)\frac{x}{2}\right)}{\text{sh}\left((2m+1)\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2} \frac{\text{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}{\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}$ . Finalement, on trouve bien le résultat attendu  $M = M_\infty \left\{ \frac{m + \frac{1}{2}}{\text{th}\left[(m + \frac{1}{2})x\right]} - \frac{\frac{1}{2}}{\text{th}\left[\frac{x}{2}\right]} \right\}$  à condition de poser  $M_\infty = n^* g \mu_B$ .
- 16 — On doit mener le développement à l'ordre 3 avec  $\text{th}(t) \approx t \left(1 - \frac{t^2}{3}\right)$  donc  $\frac{1}{\text{th}(t)} \approx \frac{1}{t} \left(1 + \frac{t^2}{3}\right) = \frac{1}{t} + \frac{t}{3}$ . On en déduit que  $M = M_\infty \left[ \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] \frac{x}{3}$  soit enfin  $M = \gamma \frac{B}{T}$  avec  $\gamma = \frac{n^* g^2 \mu_B^2}{3k_B} m(m+1)$ .
- 17 — À la limite  $x = \frac{g\mu_B B}{k_B T} \rightarrow 0$  toutes les valeurs de  $k$  sont équiprobables : dans cette situation de désordre maximal il est normal que  $M \rightarrow 0$ . La limite  $x = \frac{g\mu_B B}{k_B T} \rightarrow \infty$  correspond au cas où tous les moments dipolaires sont alignés sur la valeur la plus probable et donc  $M \rightarrow M_\infty$ . Le tracé de la courbe est proposé ci-dessous.



Numériquement,  $\chi = \frac{\mu_0}{T} \frac{n^* g^2 \mu_B^2}{k_B} m(m+1) = 4 \times 10^{-5}$  avec les données proposées ici, du même ordre de grandeur que la mesure donnée par l'énoncé.

□ 18 — Pour un gaz soumis à des forces de pression, l'identité thermodynamique s'écrit  $dU = Tds - PdV$  donc l'équivalent du terme intensif  $BdM$  serait le terme extensif  $-PdV$ . En posant  $h = u - BM$ , on trouve  $dh = Tds - MdB$ . Comme  $dh = c_B dT$ , on peut écrire  $ds = \frac{c_B}{T} dT + \gamma \frac{B}{T^2} dB$ .

□ 19 — Le théorème de Schwarz assure que  $\frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial s}{\partial B} \right)$ . Cette égalité s'écrit aussi  $\frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{c_B}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \gamma \frac{B}{T^2} \right) = -2\gamma \frac{B}{T^3}$  donc  $\frac{\partial c_B}{\partial B} = -2\gamma \frac{B}{T^2}$  qui est la relation demandée avec  $\eta = 2$ . L'intégration de cette relation relativement à  $B$  fournit  $c_B(B, T) = c_B(B=0, T) + \int_0^B -2\gamma \frac{B'}{T^2} dB'$  c'est-à-dire, compte tenu de l'indication de l'énoncé,  $c_B = \frac{\alpha - \gamma B^2}{T^2}$ .

□ 20 — Du fait du caractère isentropique de la désaimantation,  $ds = 0$  impose  $c_B dT = -\gamma \frac{B}{T} dB$  lors de cette opération, soit d'après ce qui précède :  $\frac{dT}{T} = -\frac{\gamma B dB}{\alpha - \gamma B^2}$ . Cette relation s'intègre en  $\ln \frac{T_f}{T_i} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha - \gamma B_f^2}{\alpha - \gamma B_i^2} \right|$  d'où  $T_f = T_i \sqrt{\frac{\gamma B_f^2 - \alpha}{\gamma B_i^2 - \alpha}}$ . Si on prend  $\alpha = 0$  comme suggéré dans l'énoncé, alors  $T_f = T_i \frac{B_f}{B_i} = 35 \text{ mK}$ .

## Problème II : Étude d'une installation nucléaire REP

### 1) Cycle de Carnot

a) Soit le système constitué par le fluide en évolution cyclique dans le moteur ditherme. Notons  $W$  le travail reçu,  $Q_{ch}$  le transfert thermique reçu de la part de la source chaude et  $Q_{fr}$  le transfert thermique reçu de la part de la source froide au cours d'un cycle. Par application des deux principes sur un cycle réversible au système, on a :

$$\Delta U = W + Q_{ch} + Q_{fr} = 0 ; \quad \Delta S = S_e + S_c = S_e = \frac{Q_{fr}}{T_{fr}} + \frac{Q_{ch}}{T_{ch}} = 0$$

car l'énergie interne et l'entropie du système sont des fonctions d'état. Le rendement pour un moteur étant défini par  $\eta = -\frac{W}{Q_{ch}}$ , dans le cas du moteur ditherme de Carnot, on obtient :  $\eta_c = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}$ .

b) L'application numérique donne  $\eta_c \simeq 0,4$ .

c) Le rendement réel de la centrale s'écrit  $\eta_r = \frac{P_e}{P_t} \simeq 0,3 < \eta_c$ .

### 2) Cycle de Rankine

a) Le tracé du cycle dans le diagramme de Clapeyron est donné ci-dessous :



- f) De  $A$  à  $A'$ , l'évolution s'effectue sans travail utile, donc  $q_{AA'} = h_{A'} - h_A = c_p(T_{A'} - T_A)$ . L'application numérique donne  $q_{AA'} \simeq 1000 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .
- g) De  $A'$  à  $B$ , l'évolution s'effectue également sans travail utile, d'où  $q_{A'B} = h_B - h_{A'} \simeq 1600 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .
- h) Le rendement du cycle de Rankine de l'installation s'exprime sous la forme :

$$\eta_{Rankine} = \frac{w_{BC}}{q_{AA'} + q_{A'B}} \simeq 0,4$$

Il est supérieur au rendement réel ce qui n'est pas étonnant puisque les pertes sont négligées et que le cycle étudié ici n'est pas tout à fait celui décrit par le fluide (voir question suivante). Il est en revanche bien inférieur au rendement de Carnot.

- i) À la fin de la détente dans la turbine, l'état de l'eau est décrit par le point  $C$  qui correspond à un mélange diphasé liquide-vapeur. Par lecture graphique, on a  $x_C \simeq 0,68$ . L'eau étant partiellement liquide, cela peut entraîner la corrosion des pièces métalliques constituant la turbine.

### 3) Cycle de Rankine avec détente étagée

- a) Le point  $C'$  s'obtient par une transformation isentropique depuis  $B$ , jusqu'à la pression  $P_3$ . Le point  $B'$  se trouve sur la courbe de rosée à la même pression  $P_3$ .  $C''$  est alors obtenu par une transformation isentropique depuis  $B'$  jusqu'à la pression  $P_1$ . Les nouveaux points sont tracés sur le diagramme précédent.
- b) Graphiquement,  $x_{C'} \simeq 0,85$  et  $x_{C''} \simeq 0,77$ , tous deux supérieurs à  $x_C$ . L'intérêt de la surchauffe est donc de limiter la fraction d'eau liquide lors de la détente pour limiter la corrosion de la turbine.
- c) Le nouveau rendement est défini par :

$$\eta_{Rankine} = \frac{w_{BC'} + w_{B'C''}}{q_{AA'} + q_{A'B} + q_{C'B'}} \simeq 0,38$$

Le rendement pour le cycle de Rankine étagé est moindre que pour le cycle simple mais on limite les risques de corrosion. Il est toujours supérieur au rendement réel, en raison des pertes négligées.

••• FIN •••