

DM 11

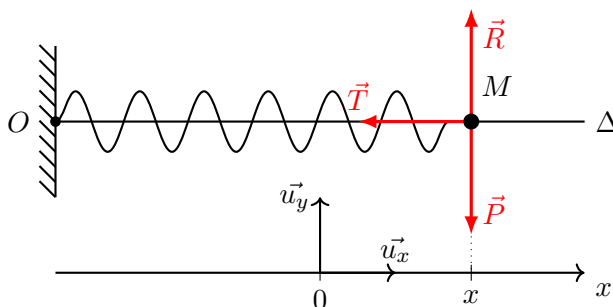
Optique, Mécanique

Exercice 1 : Ressort avec ou sans frottements

Q.1 Les forces qui s'appliquent sur la particule M sont :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$, vertical vers le bas
- la force de rappel du ressort $\vec{T} = -kx\vec{u}_x$, horizontale et vers la gauche si $x > 0$
- la réaction de la tige $\vec{R} = mg\vec{u}_y$, verticale vers le haut (sans frottements)

Ces forces sont représentées sur le schéma ci-dessous :



Q.2 L'énergie potentielle élastique étant donnée par $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, il vient : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + kx^2)$.

La seule force qui travaille est la force de rappel du ressort, qui est conservative : l'énergie mécanique se conserve donc. Sa dérivée temporelle est nulle :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$$

d'où l'équation du mouvement : $m\ddot{x} + kx = 0$ en éliminant le cas $\dot{x} = 0$ qui n'est pas intéressant.

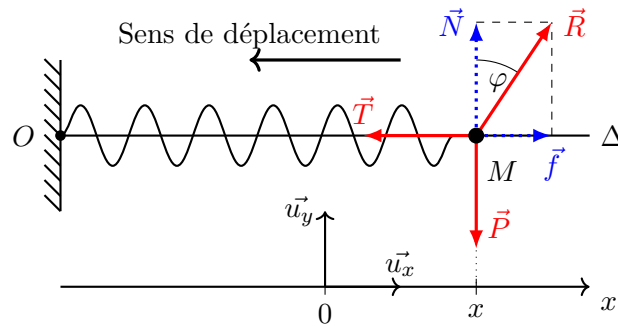
Q.3 Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. La solution générale est donc de la forme :

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Les conditions initiales sont $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, soit $A = x_0$ et $B = \sqrt{\frac{m}{k}}\dot{x}_0$. Finalement :

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \dot{x}_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Q.4 On ajoute maintenant des forces de frottements, qui s'opposent au mouvement du point M . La réaction du rail se compose maintenant de la réaction verticale $\vec{N}$ et de la force de frottement $\vec{f}$ ci-dessous :



On sait que $\|\vec{N}\| = \|\vec{P}\| = mg$ car il n'y a pas de vitesse suivant l'axe $\vec{u}_y$. De plus, si M est en mouvement, la norme de la force de frottement vaut f . On en déduit que : $\tan \varphi = \frac{f}{mg}$.

Q.5 Le point M est initialement immobile. Le point se déplace si le module de la force de rappel du ressort est supérieure au module de la force de frottement statique, soit $|kx_0| > f$. On en déduit que : $|x_0| > \frac{f}{k}$.

Q.6 Le point M va s'arrêter pour une position d'équilibre x_1 telle que la force de frottement compense la force de rappel du ressort, soit : $|x_1| \leq \frac{f}{k}$ ou encore : $-\frac{f}{k} \leq x_1 \leq \frac{f}{k}$.

Q.7 La force de frottement est toujours de signe opposée à la vitesse, c'est pour cela qu'elle s'écrit sous la forme proposée.

Q.8 L'équation du mouvement devient en prenant en compte la force de frottement : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\varepsilon \frac{f}{m}$.

Q.9 Sur l'intervalle considéré, $\dot{x} < 0$ donc $\varepsilon = -1$. L'équation devient : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f}{m}$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre dont la solution générale est la somme d'une solution homogène et d'une solution particulière :

$$x(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + B \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + \frac{f}{k}$$

Les conditions initiales sont $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, soit $A = x_0 - \frac{f}{k}$ et $B = 0$, soit finalement :

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{f}{k} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + \frac{f}{k}$$

Q.10 Cette phase du mouvement entre x_0 et x_1 dure tant que $\dot{x} < 0$. Or d'après ce qui précède,

$$\dot{x} = - \left(x_0 - \frac{f}{k} \right) \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

donc cette phase dure tant que $\sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) > 0$, donc pour $0 \leq \sqrt{\frac{k}{m}} t \leq \pi$. Le temps de trajet entre x_0

et x_1 est donc : $t_1 = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$. Il vient $x_1 = x(t_1) = -x_0 + 2\frac{f}{k}$.

Q.11 Par définition, le travail de la force de frottement entre x_1 et x_2 est : $W_f = \int_{x_1}^{x_2} \vec{f} \cdot d\vec{OM}$. Entre ces deux points, la vitesse est suivant $+\vec{u}_x$ donc $\varepsilon = 1$ d'où $\vec{f} = -f\vec{u}_x$. Comme $d\vec{OM} = dx\vec{u}_x$, il vient :

$$W_f = - \int_{x_1}^{x_2} f \cdot dx = -f(x_2 - x_1) < 0$$

La variation d'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives. Ainsi :

$$\Delta E_m = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = -f(x_2 - x_1)$$

On en déduit : $\frac{1}{2}k(x_2 + x_1) = -f$ puis $x_2 = -x_1 - 2\frac{f}{k} = x_0 - 4\frac{f}{k}$.

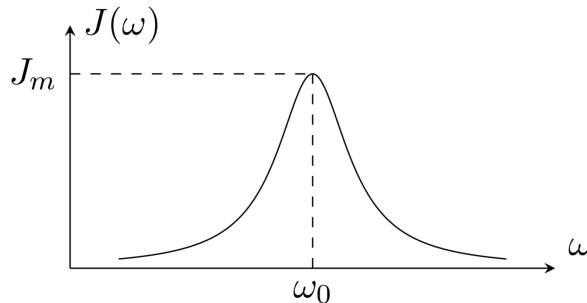
Q.12 Les abscisses des maxima décroissent de $4\frac{f}{k}$ par pseudo-période T , l'amplitude du mouvement décroît donc linéairement avec le temps. Le lieu des maxima est une droite de coefficient directeur $-4\frac{f}{kT}$ passant par x_0 pour $t = 0$: son équation est $x_{max}(t) = -4\frac{f}{kT}t + x_0$. Comme $T = t_1 + t_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, il vient :

$$x_{max}(t) = -2\frac{f}{\pi\sqrt{km}}t + x_0$$

Exercice 2 : Caractérisation du spectre d'une diode laser (bonus)

Q.1 LASER est l'acronyme de *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*. Le but est de placer des atomes dans un état d'énergie excité puis de les faire retomber dans leur état fondamental grâce à des photons incidents (émission stimulée). Les photons émis lors de cette désexcitation stimulée possèdent la même direction et la même énergie que les photons incidents. Le milieu contenant les atomes est enfermé entre deux miroirs dont l'un réfléchit à 100% et l'autre à plus de 50% et qui permet de renvoyer la plus grande partie des photons émis vers le milieu pour provoquer de nouvelles émissions stimulées, afin d'amplifier le phénomène. Les photons qui peuvent sortir constituent le faisceau laser.

Q.2 L'allure de la courbe est la suivante :



On cherche les deux valeurs de ω telles que $J(\omega) = J_m/2$, ce qui conduit à $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_1} = 1$ c'est-à-dire $\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \omega_1$. La largeur à mi-hauteur est donc $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = 2\omega_1$.

Q.3 L'intensité résultante sur l'écran au point M_0 est donnée par la Formule de Fresnel :

$$dI(M_0) = 2d\omega J(\omega) \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right]$$

avec $\frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{\omega}{c}\delta$.

- Q.4** Deux ondes émises à des longueurs d'ondes différentes n'interfèrent pas : on somme leur intensités. On en déduit que :

$$I(M_0, t) = \int_0^\infty dI(M_0) = \int_0^\infty 2J(\omega) \left[1 + \cos\left(\frac{\omega v}{c}(t - t_0)\right) \right] d\omega$$

- Q.5** D'après les intégrales données, on trouve que :

$$I(M_0, t) = 2\pi\omega_1 J_m \left[1 + \exp\left(-\frac{\omega_1 v}{c}|t - t_0|\right) \cos\left(\frac{\omega_0 v}{c}(t - t_0)\right) \right]$$

L'intensité en fonction du temps présente donc des oscillations à la pulsation $\frac{\omega_0 v}{c}$ enveloppée dans une exponentielle décroissante.

- Q.6** Pour déterminer ω_0 , on utilise le second graphique qui nous permet de compter 10 oscillations en 3,25 s soit $T = \frac{2\pi c}{\omega_0 v} \simeq 0,32 \text{ s}$ puis $\omega_0 \simeq 7 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On en déduit $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} \simeq 265 \text{ nm}$. Il s'agit de radiation ultra-violette.

- Q.7** On utilise la première courbe dans cette question. Lorsque l'intensité est maximale (pour $t_0 = 50 \text{ s}$), elle vaut $I_{max} = 4\pi\omega_1 J_m$. On en déduit que :

$$I(M_0, t) = \frac{I_{max}}{2} \left[1 + \exp\left(-\frac{\omega_1 v}{c}|t - t_0|\right) \cos\left(\frac{\omega_0 v}{c}(t - t_0)\right) \right]$$

On mesure en outre qu'en $t_1 = 100 \text{ s}$, $\frac{1}{2} \left[1 + \exp\left(-\frac{\omega_1 v}{c}|t_1 - t_0|\right) \right] \simeq 0,57$ ce qui nous permet de trouver $\omega_1 \simeq 1,42 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ puis $\Delta\omega \simeq 2,83 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. La longueur de cohérence de cette diode laser est donc

$$\ell_c = \frac{2\pi c}{\Delta\omega} \simeq 66 \mu\text{m}.$$

- Q.8** Par définition, $\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{\ell_c} = \lambda_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \simeq 1 \text{ nm}$.