Correction du DM12

Exercice 1 : Station spatiale

Q.1 Il existe plusieurs formulations du principe d'inertie. En voici une possible : Il existe des référentiels que l'on appelle galiléens dans lesquels un corps isolé (soumis à aucune force extérieure) est en mouvement rectiligne et uniforme.
Une fois que l'on a identifié un référentiel galiléen, tout référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport à lui et aussi galiléen.

Q.2 Le référentiel géocentrique est centré sur le centre de la Terre et ses axes sont fixes car ils pointent vers des étoiles lointaines. Il peut être considéré comme galiléen en bonne approximation si le temps d'observation d'une expérience est très faible devant sa période de révolution qui est de une année (en pratique quelques dizaines d'heures).

Q.3 Comme le mouvement de S est circulaire, l'accélération de la station dans le référentiel géocentrique s'écrit :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}_G}(S) = -R\dot{\theta}^2\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$$

La seule force qui s'applique sur la station est la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre, dirigée suivant le vecteur $\vec{u_r}$. Par application du PFD, la composante suivant $\vec{u_\theta}$ de l'accélération est donc nulle : $\ddot{\theta} = 0$. On trouve bien une vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ constante. En utilisant la projection sur $\vec{u_r}$ du PFD, on trouve :

$$mR\omega^2 = G\frac{mM_T}{R^2} \Longrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{GM_T}{R^3}}}$$

Q.4 Par définition du poids, on sait que $g = \dfrac{GM_T}{R_T^2}$. On obtient alors : $\boxed{\omega = \dfrac{R_T}{R}\sqrt{\dfrac{g}{R}}}$. L'application numérique donne : $\boxed{\omega \approx 1{,}1 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$ et $\boxed{T \approx 5560\,\mathrm{s} \approx 1\mathrm{h}30}$.

Q.5 Le référentiel $\mathcal{R}'$ n'est pas galiléen car il n'est pas en translation rectiligne dans $\mathcal{R}_G$.

Q.6 L'accélération d'entraînement est l'accélération absolue du point coïncident (pour rappel, c'est le point fixe dans le référentiel $\mathcal{R}'$ confondu avec le point M à un instant donné). Ici, elle s'écrit :

$$\boxed{\vec{a_e} = -\omega^2\overrightarrow{OM} = -\omega^2(\vec{r} + \vec{R})}$$

Par définition, la force d'inertie d'entrainement est alors : $\boxed{\vec{f_{ie}} = -m\vec{a_e} = m\omega^2(\vec{r} + \vec{R})}$.

Q.7 Si le point M est animé d'une vitesse $\vec{v}$ par rapport à la station, il subit en plus la force d'inertie de Coriolis, qui s'exprime : $\boxed{\vec{f_{ic}} = -2m\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}}$.

Q.8 On applique le principe fondamental de la dynamique au point M dans le référentiel $\mathcal{R}'$:

$$m\vec{a} = m(\ddot{x}\vec{u_x} + \ddot{y}\vec{u_y}) = \vec{F} + \vec{f_{ie}} + \vec{f_{ic}}$$

avec $\vec{F} + \vec{f_{ie}} = 3m\omega^2 x\vec{u_x}$ et $\vec{f_{ic}} = -2m\omega(-\dot{y}\vec{u_x} + \dot{x}\vec{u_y})$. La projection du PFD sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ mène ainsi à :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \ddot{x} - 3\omega^2 x & = & 2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} & = & -2\omega\dot{x} \end{array}\right.}$$

Q.9 Il s'agit d'un système de deux équations différentielles linéaires couplées. Les conditions initiales sont $x(0) = y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = -v_0$. L'intégration de la seconde équation en tenant compte des conditions initiales donne : $\dot{y} = -2\omega x$. On remplace cette équation dans la première équation pour obtenir :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

C'est l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique de pulsation ω, dont la solution est de la forme : $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Les conditions initiales donnent $A = 0$ et $B = -\dfrac{v_0}{\omega}$, soit :

$$\boxed{x(t) = -\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)}$$

La deuxième équation permet alors d'obtenir $\dot{y} = 2v_0 \sin(\omega t)$ qui s'intègre en : $y(t) = -2\dfrac{v_0}{\omega}\cos(\omega t) + C$. Les conditions initiales donnent $C = 2\dfrac{v_0}{\omega}$. Finalement, on trouve :

$$\boxed{y(t) = 2\frac{v_0}{\omega}\left(1 - \cos(\omega t)\right)}$$

On a obtenu l'équation paramétrée d'une ellipse de centre $(0, 2v_0/\omega)$, de demi-grand axe $2v_0/\omega$ et de demi-petit axe v_0/ω. Cette trajectoire est parcourue en une période $T = 2\pi/\omega$ (lorsque la station spatiale a fait un tour, le point M revient à sa position initiale).

Exercice 2 : Déviation vers l'est

Q.1 La force d'inertie de Coriolis a pour expression : $\vec{f_{ic}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)$. Sa norme s'écrit donc :

$$\|\vec{f_{ic}}\| = 2m\Omega v \sin(\vec{\Omega}, \vec{v}) \leq 2m\Omega v$$

Cette force est maximale lorsque le vecteur vitesse et le vecteur rotation sont perpendiculaires, ce qui se produit à l'équateur.

Q.2 La condition de l'énoncé s'écrit $\|\vec{f_{ic}}\| \leq 2m\Omega v \leq 0.01mg$ donc : $\boxed{v \leq \dfrac{0.01g}{2\Omega} \simeq 6{,}7 \times 10^2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$ (car $T = 86\,400\,\mathrm{s}$ et $\Omega = \dfrac{2\pi}{T} = 7{,}3 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$).

Q.3 L'expression de la force de Coriolis dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est :

$$\vec{f_{ic}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M) = -2m\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -2m\Omega \begin{pmatrix} \dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda \\ \dot{x}\sin\lambda \\ -\dot{x}\cos\lambda \end{pmatrix}$$

Comme la vitesse du point M reste beaucoup plus faible que la vitesse calculée à la question précédente, la force d'inertie de coriolis est très faible comparée au poids. On peut donc supposer que les accélérations qui lui sont dues (suivant $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$) sont très faibles de même que les vitesses associées : $\dot{x} \ll \dot{z}$ et $\dot{y} \ll \dot{z}$, d'où :

$$\boxed{\vec{f_{ic}} = -2m\Omega \begin{pmatrix} \dot{z}\cos\lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Q.4 Le PFD au point M dans le référentiel terrestre non galiléen s'écrit : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f_{ic}}$ ce qui donne :

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2m\Omega\begin{pmatrix} \dot{z}\cos\lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que : $\begin{cases} \ddot{x} = & -2\Omega\dot{z}\cos\lambda \\ \ddot{z} = & -g \end{cases}$. La seconde équation donne $\dot{z} = -gt$ puis $z = -\frac{1}{2}gt^2 + h$. En remplacant dans la première équation et en intégrant deux fois, on trouve : $x = \frac{1}{3}\Omega g t^3 \cos\lambda$. Lorsque le point M arrive au sol ($z = 0$) on a $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, soit finalement :

$$\boxed{x_E = \frac{1}{3}\Omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}\cos\lambda}$$

Q.5 L'application numérique donne $\boxed{x_E = 0{,}7\,\mathrm{mm}}$. C'est une déviation très faible ! Cette déviation ne change pas de signe en changeant d'hémisphère (elle a toujours lieu vers l'est) et elle diminue lorsque l'on se rapproche des pôles (nord ou sud).

Q.6 Ce mouvement vers l'est (même minime) induit une vitesse suivant $\vec{u}_x$ et donc une deuxième composante de la force de Coriolis à prendre en compte qui tend à dévier la masse vers l'équateur. Dans l'hémisphère nord, la seconde déviation s'effectue vers le sud et elle s'effectue vers le nord dans l'hémisphère sud. L'orientation des vecteurs vitesse et rotation ne change pas le long d'un méridien donc cette déviation est maximale à l'équateur (lorsque la vitesse de déviation vers l'est est maximale) et elle est nulle aux pôles.

Exercice 3 : Cyanines

Q.1 D'après l'analogie avec la corde de Melde, la forme de la fonction d'onde spatiale d'une particule confinée dans un puit de potentiel infini est $\boxed{\psi(x) = \psi_0\sin(kx + \phi)}$. La particule ne peut pas être présente dans les zones de l'espace où le potentiel est infini, soit : $\boxed{\psi(x = 0) = \psi(x = L) = 0}$.

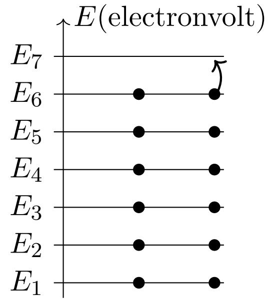
Q.2 Les conditions limites assurent que $\psi(x = 0) = \psi_0\sin(\phi) = 0$ soit $\phi = 0$ puis $\psi(x = L) = \psi_0\sin(kL) = 0$. On obtient alors $k_nL = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$ et donc $\boxed{\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}}$.

Q.3 D'après la relation de De Broglie : $p_n = \dfrac{h}{\lambda_n} = \hbar k_n = \dfrac{nh}{2L}$. L'énergie de la particule se confond avec son énergie cinétique (le potentiel est nul dans le puits), soit $\boxed{E_n = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{8mL^2}}$.

Q.4 La chaîne est composée de 9 atomes de carbones impliqués dans une double liaison, plus deux atomes d'azotes, on a alors une chaîne longue de 10 liaisons, plus deux demies-liaison aux extrémités, ce qui conduit à $L = 11d$. L'application numérique donne $\boxed{L = 1{,}54\,\mathrm{nm}}$.

Q.5 A.N : $E_1 = 0{,}16\,\mathrm{eV}$; $E_2 = 0{,}63\,\mathrm{eV}$; $E_3 = 1{,}4\,\mathrm{eV}$; $E_4 = 2{,}5\,\mathrm{eV}$; $E_5 = 3{,}9\,\mathrm{eV}$; $E_6 = 5{,}7\,\mathrm{eV}$; $E_7 = 7{,}4\,\mathrm{eV}$.

Q.6 Il y a 5 doubles liaisons, donc 12 électrons à considérer comme libre dans la chaîne carbonée. L'état d'énergie le plus bas correspond au cas où les 6 premiers niveaux sont chacun occupés par deux électrons (de spins antiparallèles).



Q.7 La transition pour une excitation de plus basse énergie correspond au passage d'un électron du niveau E_6 au niveau E_7. Le photon qui peut être absorbé pour provoquer cette excitation doit apporter une énergie $\Delta E = h\nu = E_7 - E_6 = 2{,}0\,\mathrm{eV}$ et doit donc avoir une longueur d'onde $\boxed{\lambda = \dfrac{hc}{\Delta E} = 590\,\mathrm{nm}}$. Cette longueur d'onde correspond au rouge-orange, le colorant apparaît de la couleur complémentaire qui est bleu-vert.

Q.8 Pour la molécule C_{11}, $L = 13d = 1{,}8\,\mathrm{nm}$ et il faut prendre en compte 14 d'électrons considérés comme libres. La transition s'effectue entre le niveau $E_7 = 5{,}5\,\mathrm{eV}$ et $E_8 = 7{,}2\,\mathrm{eV}$ d'où $\lambda = 730\,\mathrm{nm}$. L'absorption se fait dans le rouge donc le colorant apparaît vert.

De la même namière, pour la molécule C_7, $L = 9d = 1{,}3\,\mathrm{nm}$ avec 10 électrons à prendre en compte. La transition s'effectue entre les niveaux $E_5 = 5{,}9\,\mathrm{eV}$ et $E_6 = 8{,}4\,\mathrm{eV}$ d'où $\lambda = 519\,\mathrm{nm}$. L'absorption se fait dans le vert donc le colorant apparaît rouge.

Malgré l'extrême simplicité de la modélisation, l'accord est bon avec l'expérience.

• • • FIN • • •