

DS 9* (4 heures) *Optique, Mécanique*

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Les résultats doivent être encadrés. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 : De l'éther luminifère à la relativité restreinte (CCP MP 2020)

Après le succès des théories ondulatoires de Young et de Fresnel, il restait aux physiciens à expliquer la propagation de la lumière. En 1873, Maxwell publie la forme définitive de ses équations de l'électromagnétisme. À l'instar d'une onde mécanique, la lumière est conçue comme la vibration d'un "milieu support" présent partout dans l'univers : l'éther luminifère. Puis en 1905, Einstein fonde la théorie de la relativité restreinte sur le principe de relativité (qui énonce que toutes les lois physiques sont invariantes par changement de référentiel galiléen (ou inertiel)) et sur le postulat de l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide : le caractère absolu du temps est remis en question, la transformation de Galilée est remplacée par celle de Lorentz, l'éther luminifère peut enfin être abandonné. La question de son existence restera cependant une des grandes quêtes de la Physique jusque dans les années 1930.

Les parties I – et III – de ce problème abordent deux expériences à propos de l'éther restées célèbres dans l'histoire des sciences. La partie II – traite des lois de transformation du champ électromagnétique lors d'un changement de référentiel.

Point de vue général : on souhaite reprendre les raisonnements historiques à propos de l'éther tenus par les physiciens pré-relativistes. On introduit pour cela le référentiel de l'observateur noté (R_{obs}) et on considère l'éther comme un fluide en mouvement à la vitesse \vec{w} dans (R_{obs}), ce qui définit le référentiel de l'éther (R_{eth}). La lumière, qui est une oscillation de l'éther, se propage dans celui-ci de manière isotrope : quelle que soit sa direction, le vecteur vitesse de propagation de la lumière dans (R_{eth}), noté \vec{c} , a pour norme $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (valeur qui sera arrondie à $3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pour les applications numériques).

Consigne : en nous plaçant à l'époque des physiciens pré-relativistes, nous utiliserons la transformation galiléenne des vitesses et ferons comme si nous ne savions pas que c est une constante universelle de la Physique.

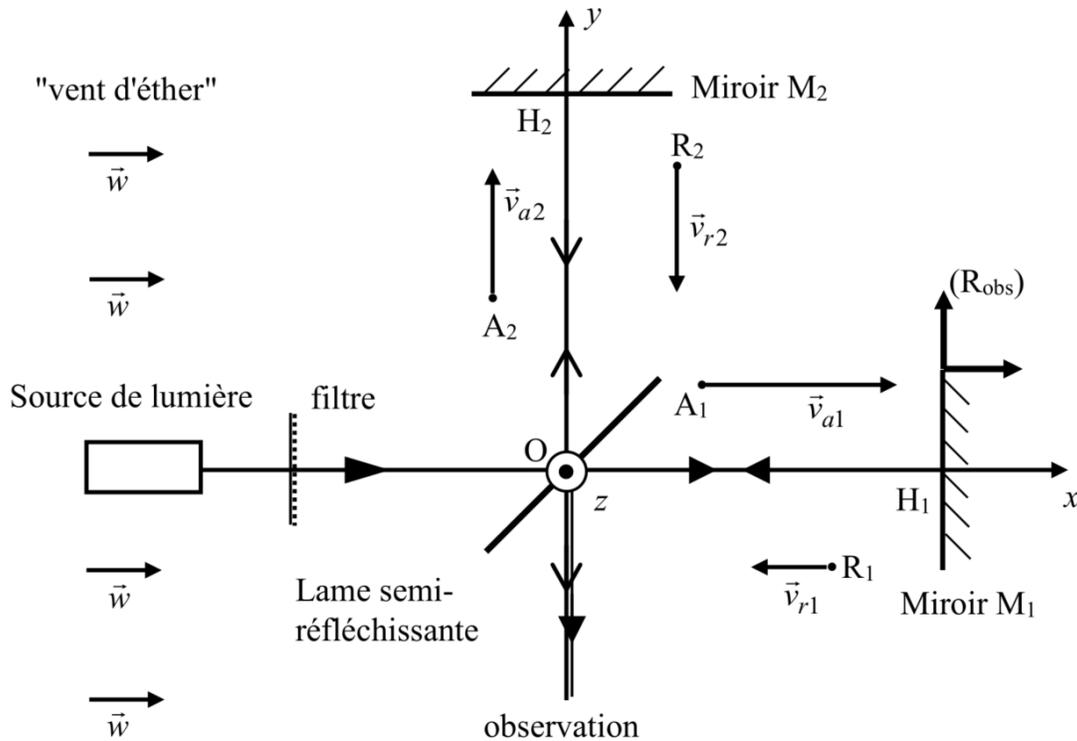
I – L'expérience de Michelson et Morley (1887)

Le schéma de principe du dispositif que Michelson et Morley utilisèrent en 1887 est représenté en FIGURE 1. Il s'agit d'un interféromètre de Michelson réglé au contact optique avec L la longueur commune des bras de l'interféromètre : $L = OH_1 = OH_2$. L'ensemble Séparatrice-Compensatrice est modélisé comme une lame semi-réfléchissante d'épaisseur nulle, placée à 45° du faisceau incident et n'introduisant aucun déphasage supplémentaire sur les trajets lumineux. Les deux faisceaux lumineux obtenus après division d'amplitude suivent des trajets selon les axes (Ox) et (Oy) perpendiculaires. On observe les franges d'interférences à l'aide d'un oculaire micrométrique placé à la sortie de l'appareil.

À l'entrée de l'interféromètre, un filtre interférentiel isole la raie H_α du rayonnement solaire. On note ν la fréquence de la lumière monochromatique ainsi obtenue. Le référentiel d'observation (R_{obs}) est ici le référentiel terrestre dans lequel les miroirs M_1 et M_2 sont immobiles. L'air est assimilé au vide et nous considérerons qu'il n'a aucune influence sur la propagation. En revanche, l'ensemble du dispositif baigne dans l'éther en mouvement à la vitesse $\vec{w} = w\vec{e}_x$ uniforme avec $w > 0$ (mouvement appelé "vent d'éther").

Configuration α : l'interféromètre est positionné de telle sorte que le trajet lumineux sur le bras n°1 soit colinéaire au vent d'éther. Le bras n°2 est perpendiculaire à cette direction.

Configuration β : on fait subir à l'ensemble $S =$ Source, interféromètre, observateur une rotation de 90° autour de l'axe (Oz) dans le sens horaire, de telle sorte que ce soit le bras n°2 qui devienne colinéaire au vent d'éther.

FIGURE 1 – Schéma de l'interféromètre de Michelson dans la configuration α

L'interféromètre est dans la configuration α (FIGURE 1). On appelle A_1 , un point quelconque entre O et H_1 sur le trajet lumineux aller du bras n°1 et R_1 un point sur le trajet retour. On note de même A_2 et R_2 deux points entre O et H_2 sur les trajets aller et retour du bras n°2. En utilisant l'indice $i = 1$ ou 2 pour indiquer la voie de l'interféromètre et l'indice $\varepsilon = a$ ou r pour indiquer le sens aller ou retour, on note $\vec{v}_{\varepsilon i}$ la vitesse de la lumière dans (R_{obs}) et $\vec{c}_{\varepsilon i}$ sa vitesse dans (R_{eth}) . Par souci de lisibilité, les quatre points A_1 , A_2 , R_1 et R_2 et les vitesses $\vec{v}_{\varepsilon i}$ ont été représentées hors des trajets des rayons lumineux.

Q.1 Reproduire la FIGURE 1 et la compléter en dessinant les "triangles des vitesses" reliant les vecteurs $\vec{v}_{\varepsilon i}$, $\vec{c}_{\varepsilon i}$ et \vec{w} aux points A_1 , A_2 , R_1 et R_2 en supposant qu'une loi de composition galiléenne des vitesses s'applique. Attribuer à chaque expression fournie ci-dessous la norme $v_{\varepsilon i}$ correspondante :

$$c - w \quad ; \quad \sqrt{c^2 - w^2} \quad ; \quad c + w \quad ; \quad \sqrt{c^2 + w^2}$$

Q.2 En déduire l'expression de la différence $\tau(\alpha) = \tau_2(\alpha) - \tau_1(\alpha)$ des durées de parcours de la lumière arrivant à l'oculaire en suivant la voie 1 (respectivement 2) dans la configuration α . Faire un développement limité de $\tau(\alpha)$ à l'ordre 2 en $\frac{w}{c}$. Donner alors l'expression de l'ordre d'interférence $p(\alpha)$ en fonction de la fréquence ν , de L , de c et du rapport $\frac{w}{c}$ (on rappelle que l'ordre d'interférence de deux signaux lumineux cohérents entre eux et présentant un déphasage φ est égal à $\frac{\varphi}{2\pi}$).

Q.3 Avec le moins possible de calculs, donner de même les expressions :

- de la différence $\tau(\beta) = \tau_2(\beta) - \tau_1(\beta)$ des durées de parcours de la lumière arrivant à l'oculaire en suivant la voie 1 (respectivement 2) dans la configuration β ;
- du développement limité de $\tau(\beta)$ à l'ordre 2 en $\frac{w}{c}$;
- de l'ordre d'interférence $p(\beta)$ en fonction de ν , L , c et du rapport $\frac{w}{c}$.

- Q.4** Soit $\Delta p = p(\beta) - p(\alpha)$ la variation de l'ordre d'interférence produite lors du passage de l'interféromètre de la configuration α à la configuration β . Montrer que $\Delta p = 2L \frac{\nu}{c} \left(\frac{w}{c} \right)^2$.
- Q.5** De manière à visualiser un petit nombre de franges d'interférence à l'oculaire micrométrique, on règle l'interféromètre en coin d'air à partir de la configuration α en opérant une toute petite rotation du miroir M_1 autour de son diamètre H_1z . La figure d'interférences se présente alors comme un ensemble de franges rectilignes parallèles équidistantes d'interfrange i . En supposant la variation Δp de l'ordre d'interférence obtenue à la question précédente inchangée par ce nouveau réglage, indiquer quelle modification de la figure d'interférences est attendue lors du passage de la configuration α à la configuration β . Exprimer cette modification à l'aide de Δp et i .
- Q.6** En faisant l'hypothèse d'un éther immobile dans le référentiel héliocentrique et ne subissant aucun effet d'entraînement par l'atmosphère terrestre, Michelson et Morley comptaient observer cette modification avec une vitesse de vent d'éther de norme $w = 30,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ environ.
- Rappeler la définition du référentiel héliocentrique.
 - Énoncer, sans les démontrer, les trois lois de Képler pour une planète autour du Soleil.
 - Expliquer à quelle caractéristique terrestre correspond la valeur $w = 30,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ escomptée par Michelson et Morley. Retrouver cette valeur à partir de G (constante de Newton), M_S (masse du Soleil) et T_{an} (durée de l'année terrestre). Faire l'application numérique avec $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ et $T_{an} = 365,25$ jours.
- Q.7** Pour passer de la configuration α à la configuration β , Michelson et Morley avaient monté leur interféromètre sur une table en granit posée au-dessus d'un flotteur en bois sur un bain de mercure, ce qui leur permettait d'opérer une rotation de l'ensemble en toute simplicité. Une grande longueur des bras de l'interféromètre (obtenue par un rallongement des trajets à l'aide de plusieurs jeux de miroirs) et un oculaire micrométrique avaient été prévus afin d'assurer une détection confortable des modifications attendues de la figure d'interférences. La sensibilité du dispositif était de l'ordre du centième d'interfrange.
- Avec $w = 30,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, $L = 11,2 \text{ m}$ et $\nu = 4,57 \times 10^{14} \text{ Hz}$, donner la valeur numérique de Δp , variation de l'ordre d'interférence escomptée par Michelson et Morley, exprimée précédemment. Commenter.
- Q.8** Donner une estimation numérique de la vitesse d'éther minimale que le dispositif permettait de mesurer a priori. Quelle(s) objection(s) aurait-on pu faire quant au résultat de l'expérience finalement annoncé négatif par Michelson et Morley? Pourquoi l'expérience fut-elle reconduite à différents moments de l'année?

Le résultat négatif de l'expérience de Michelson et Morley a révélé la mise en défaut de la transformation de Galilée. Cette dernière conduit également à des lois erronées de changement de référentiel pour le champ électromagnétique. C'est l'objet de la partie II – ci-après.

II – Électromagnétisme et relativité

Soit (R') un référentiel en translation rectiligne uniforme à la vitesse \vec{V}_e par rapport à un référentiel (R) . Un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) est présent dans (R) .

- Q.9** Rappeler l'expression de la force électromagnétique exprimant l'action du champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) sur une particule de charge q animée d'une vitesse \vec{v} dans (R) .
- Q.10** Expliciter la formule de transformation galiléenne des vitesses reliant la vitesse \vec{v}' de la particule dans (R') à sa vitesse \vec{v} dans (R) et à \vec{V}_e .

Q.11 Dans (R') , le champ électromagnétique précédent est caractérisé par les champs (\vec{E}', \vec{B}') . En utilisant l'invariance de la force électromagnétique entre les référentiels (R) et (R') , montrer que la loi de composition des vitesses utilisée à la question précédente est compatible avec les lois suivantes de transformation « classique » des champs :

$$\begin{cases} \vec{E} &= \vec{E}' - \vec{V}_e \wedge \vec{B}' \\ \vec{B} &= \vec{B}' \end{cases}$$

On considère, dans le vide, un fil rigide rectiligne cylindrique de rayon a et infiniment long, chargé avec une densité volumique ρ_f uniforme (FIGURE 2). On note $\lambda_f = \pi a^2 \rho_f$ la densité linéique de charge et (R') le référentiel du fil. La direction du fil est confondue avec l'axe (Oz) d'un référentiel (R) dans lequel le fil est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V}_e = V_e \vec{e}_z$. On repère un point M à l'extérieur du fil par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) (avec $r > a$). On note ϵ_0 la permittivité diélectrique et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

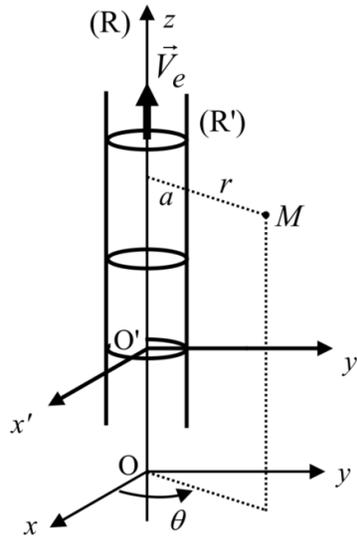


FIGURE 2 – Fil chargé en mouvement à la vitesse \vec{V}_e dans (R)

On cherche à calculer les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} créés par le fil dans (R) en tout point à l'extérieur du fil, à partir de leurs homologues \vec{E}' et \vec{B}' dans (R') .

Q.12 Justifier que $\vec{B}' = \vec{0}$. En déduire \vec{B} d'après les lois « classique » de transformation des champs.

Q.13 Par l'application du théorème de Gauss, calculer \vec{E}' à l'extérieur du fil. En déduire \vec{E} .

Q.14 Quelle est, en fonction de λ_f et V_e , l'expression de l'intensité du courant électrique vue par un observateur dans (R) ? À l'aide du théorème d'Ampère, exprimer \vec{B} . Commenter par rapport à ce qui précède.

En fait, les lois de transformation des champs selon la relativité restreinte sont les suivantes :

$$\begin{cases} \vec{E}_{\parallel} &= \vec{E}'_{\parallel} \\ \vec{E}_{\perp} &= \gamma (\vec{E}'_{\perp} - \vec{V}_e \wedge \vec{B}'_{\perp}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{B}_{\parallel} &= \vec{B}'_{\parallel} \\ \vec{B}_{\perp} &= \gamma \left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} \vec{V}_e \wedge \vec{E}'_{\perp} \right) \end{cases}$$

avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_e^2}{c^2}}}$ et où l'indice \parallel désigne la composante des champs dans la direction définie par \vec{V}_e et l'indice \perp leur composante perpendiculaire à \vec{V}_e . Avec ces notations, on a donc $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ et $\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}$.

- Q.15** En utilisant ces lois de transformation et en considérant exacts les champs \vec{E}' et \vec{B}' obtenus précédemment, donner les expressions correctes des champs \vec{E} et \vec{B} .
- Q.16** Quelle est alors, en fonction de λ_f et γ , la valeur de la densité linéique de charge λ vue par un observateur dans (R) ? Ce résultat correspond-il à une contraction ou à une dilatation des longueurs si on considère qu'il y a conservation de la charge électrique?

En 1924, la théorie de la relativité restreinte a presque vingt ans, mais les physiciens n'ont toujours pas tranché définitivement la question de l'éther, surtout qu'en 1913, un jeune physicien français, Georges Sagnac, découvre un effet qui va relancer le débat : en faisant circuler sur un même trajet fermé, mais en sens inverse, deux rayons lumineux émis à partir d'une source, Sagnac mesure un décalage des franges d'interférences lorsque le plateau sur lequel repose l'ensemble du dispositif est mis en rotation à la vitesse de quelques tours par seconde. Le décalage mesuré est proportionnel à la vitesse angulaire du plateau et à l'aire de la boucle suivie par la lumière. Cet effet, qui semble révéler une anisotropie de la vitesse de la lumière dans un référentiel en rotation, serait-il la preuve tant attendue de l'existence de l'éther? Michelson, Gale et Pearson mettent alors sur pied une version modifiée de l'expérience de 1887 dans le but de tester les deux théories (éther luminifère et relativité restreinte) en mesurant l'effet Sagnac dû à la rotation de la Terre. Cette rotation étant bien plus lente que la rotation du plateau utilisé par Sagnac, il fallait construire un interféromètre aux dimensions "gigantesques". La partie III – traite de cette expérience "hors normes".

III – L'expérience de Michelson-Gale-Pearson (1924) : mesure de l'effet Sagnac

La Terre est supposée sphérique de rayon R_T et animée d'un mouvement de rotation uniforme d'Ouest en Est autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_T$. Seul l'hémisphère nord a été représenté en FIGURE 3. Un point quelconque sur cet hémisphère est repéré par ses coordonnées géographiques : latitude φ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$) comptée à partir de l'équateur vers le Nord et longitude θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) comptée à partir du méridien de Greenwich vers l'Ouest.

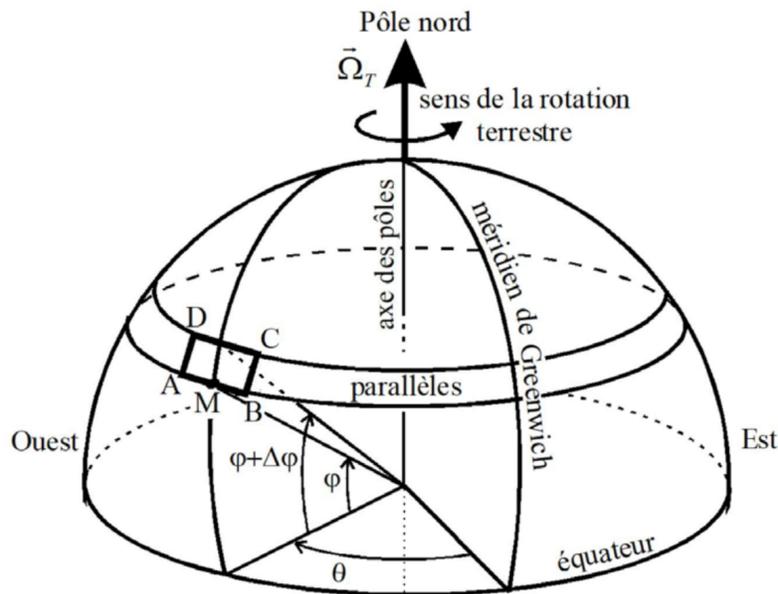


FIGURE 3 – Coordonnées géographiques d'un point M dans l'hémisphère nord et interféromètre de Michelson-Gale-Pearson à boucle rectangulaire $ABCD$

- Q.17** Rappeler la définition du référentiel géocentrique (R_g) . Quel est le mouvement de la Terre dans (R_g) ? Relier la norme Ω_T du vecteur $\vec{\Omega}_T$ à la durée T_j du jour terrestre.

Dans cette partie, on fait l'hypothèse d'un éther immobile dans (R_g) et on étudie les effets du "vent d'éther" dus à la rotation terrestre.

Q.18 Dans quelle direction et dans quel sens "souffle le vent d'éther" pour un observateur terrestre? On note $\vec{w}(\varphi) = w(\varphi)\vec{e}$ la vitesse du vent d'éther à la latitude φ , avec \vec{e} le vecteur unitaire adéquat de sorte que $w(\varphi)$ soit positive. Exprimer $w(\varphi)$ en fonction de R_T , Ω_T et φ .

La FIGURE 4 représente schématiquement le dispositif de Michelson-Gale-Pearson utilisé en 1924. Celui-ci s'inspire de l'interféromètre à boucle fermée utilisé par Sagnac en 1913.

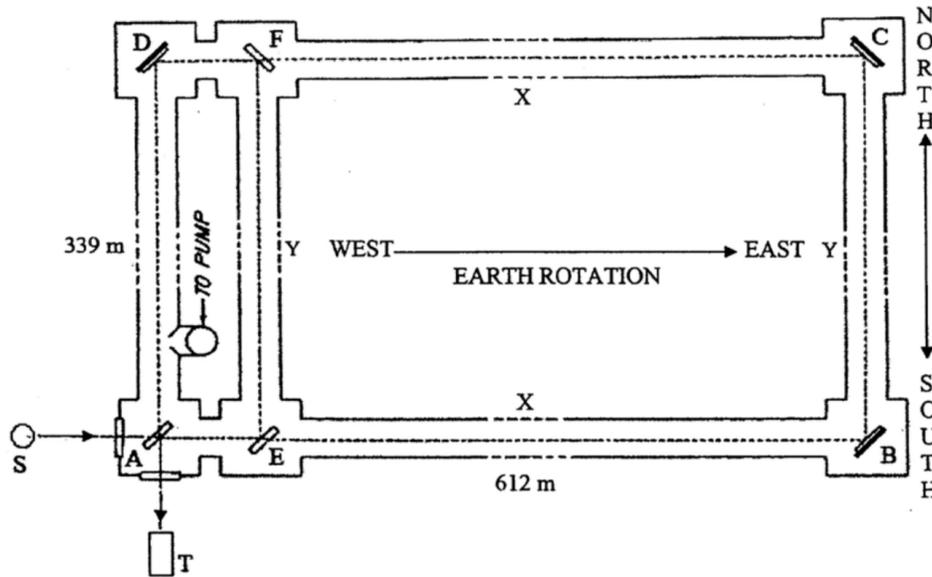


FIGURE 4 – Schéma de l'interféromètre utilisé dans l'expérience de Michelson-Gale-Pearson

Il s'agit d'un interféromètre à boucle rectangulaire, de largeur $Y = AD = BC = 339\text{ m}$ et de longueur $X = AB = DC = 612\text{ m}$ installé sur un vaste champ à Clearing, en Illinois. Les côtés longs, AB et DC , de ce rectangle sont dirigés d'Ouest en Est, en suivant deux parallèles de latitudes respectives φ et $\varphi + \Delta\varphi$ (FIGURE 3). Les petits côtés AD et BC qui complètent le rectangle occupent la direction Sud-Nord locale.

Cette "piste" rectangulaire était conçue à partir de tubes en fonte hermétiquement liés, dans lesquels un dispositif de pompage avait été prévu pour assurer un vide de bonne qualité.

On peut remarquer dans la partie gauche de la FIGURE 4 un tube supplémentaire EF , formant avec AD une boucle rectangulaire $AEFD$ d'aire beaucoup plus petite que le rectangle principal $ABCD$. Nous évoquerons plus loin le rôle de ce rectangle secondaire.

Aux sommets A , E et F , sont placées des lames semi-réfléchissantes orientées à 45° par rapport aux côtés et en B , C et D se trouvent trois miroirs plans également inclinés à 45° afin d'assurer des trajets lumineux parallèles aux axes de symétrie des tubes. Pour simplifier l'étude, on considèrera que les lames ont toutes une épaisseur nulle.

Un rayon de lumière issu d'une source S est divisé en deux rayons, l'un transmis et l'autre réfléchi par la lame A . Les deux rayons de lumière sont ainsi injectés en sens inverse le long du rectangle $ABCD$, en se réfléchissant sur les miroirs aux coins B , C et D , pour revenir sur la lame A et finalement interférer dans le plan focal image de l'objectif d'un télescope T .

- Q.19** a) On note τ_0 la durée que met la lumière à parcourir la distance cumulée $2Y$ entre les deux latitudes φ et $\varphi + \Delta\varphi$ (il est inutile de chercher à déterminer sa valeur). À l'aide de deux lois de composition galiléenne des vitesses aux latitudes φ et $\varphi + \Delta\varphi$, exprimer en fonction de τ_0 , c , X et des composantes de vitesse du vent d'éther $w(\varphi)$ et $w(\varphi + \Delta\varphi)$, la durée de parcours τ_1 de la lumière dans son trajet $ABCD$.
- b) Faire le développement limité de τ_1 à l'ordre 1 en $\frac{w(\varphi)}{c}$ et en $\frac{w(\varphi + \Delta\varphi)}{c}$, puis à l'ordre 1 en $\Delta\varphi$ (on rappelle que $w(\varphi + \Delta\varphi) \approx w(\varphi) + \dot{w}(\varphi)\Delta\varphi$ où $\dot{w}(\varphi)$ désigne la dérivée de $w(\varphi)$). En faisant apparaître Y , établir que la durée τ_1 peut s'écrire sous la forme

$$\tau_1 = \tau_0 + \frac{2X}{c} + \frac{\Omega_T X}{c^2} f(Y, \varphi)$$

dans laquelle on explicitera $f(Y, \varphi)$.

- c) Exprimer de même la durée de parcours τ_2 de la lumière effectuant le trajet $ADCBA$ en fonction de τ_0 , c , X , $w(\varphi)$ et $w(\varphi + \Delta\varphi)$. Un calcul non demandé analogue à celui de la question précédente conduit à $\tau_2 = \tau_0 + \frac{2X}{c} - \frac{\Omega_T X}{c^2} f(Y, \varphi)$.

- Q.20** On suppose la lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 . On note $\Omega_n = \Omega_T \sin \varphi$ la composante du vecteur $\vec{\Omega}_T$ sur la direction de la normale au plan $ABCD$ orientée vers le ciel (zénith local) et $S = XY$ l'aire du rectangle $ABCD$ délimité par le trajet lumineux. Établir que le déphasage $\Delta\Phi$ entre les deux rayons lumineux à leur arrivée en A est $\Delta\Phi = \frac{4\pi}{\lambda_0 c} S \Omega_n$.

- Q.21** Quel est l'ordre d'interférence p correspondant ?

- Q.22** Dans l'expérience de Sagnac, un décalage des franges (donc une variation Δp de l'ordre d'interférence) est observé par rapport à la situation où le plateau est immobile. Quelle est la difficulté de la mesure d'une variation Δp dans le cas de la Terre sur le même principe ? Expliquer le rôle du rectangle $AEFD$, d'aire beaucoup plus petite que S .

- Q.23** On donne $\varphi = 41^\circ 48' N$, $\lambda_0 = 0,500 \mu\text{m}$ et $\Omega_T = 7,29 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer Δp .

L'expérience de 1924 a donné $(\Delta p)_{exp} = 0,26\dots$. L'effet Sagnac dû à la rotation de la Terre existe donc bel et bien, mais seule la relativité peut en donner le calcul correct.

Formulaire

- Développements limités à l'ordre 2 au voisinage de zéro de deux fonctions utiles :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$$

$$(1+x)^\gamma = 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} x^2 + o(x^2)$$

- Relations de trigonométrie :

$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

Exercice 2 : Secousses en mécanique (Mines-Ponts MP 2001)

On étudie ici la notion, peu courante en mécanique newtonienne, de secousse : on nomme ainsi une quantité α égale à la dérivée temporelle d'une accélération a : $\alpha = \frac{da}{dt}$. Cette notion est illustrée par deux expériences « à une dimension » et indépendantes l'une de l'autre.

I – Première expérience

Sur la table de la FIGURE 5, recouverte d'une nappe inextensible sans ourlet, on place une assiette à fond plat bien remplie. D'un geste brusque, on tire la nappe. L'assiette reste sur la table.

La masse de l'assiette est $M = 400$ g, celle de la nappe est $m = 50$ g. La table est modélisée par un disque de centre O et de rayon $R = 25$ cm. Il est recouvert d'une nappe de même dimension et d'épaisseur négligeable. L'assiette circulaire, dont la surface en contact avec la table est de rayon $r = 5$ cm, est placée au centre de la nappe.

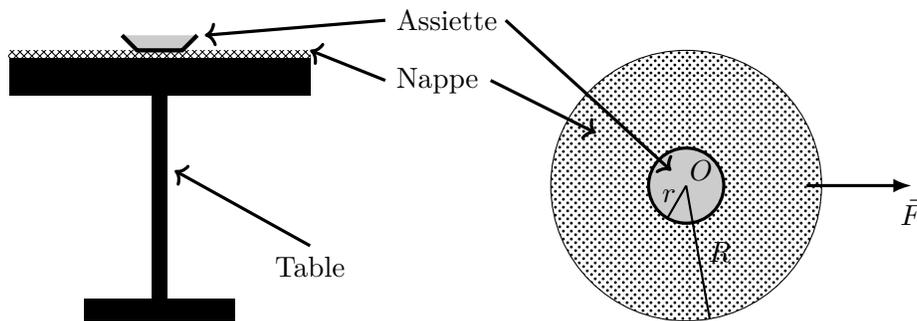


FIGURE 5 – Table, assiette et nappe vues de côté et de haut

On admet que le support de la force \vec{F} développée par l'expérimentateur pendant qu'il tire sur la nappe passe par O et que cette force s'écrit, en fonction du temps t , $\vec{F} = m\alpha t\vec{u}$, où \vec{u} est un vecteur unitaire constant et α une constante. Le frottement entre la nappe et la table est négligeable. Le coefficient de frottement de glissement entre la nappe et l'assiette est noté f ($f = 0,2$). Le repère d'espace $R_g(O, \vec{u})$ est supposé galiléen. On note g l'accélération de la pesanteur ($g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

Q.1 Montrer que la constante α a bien la dimension d'une secousse.

I.A Première modélisation

Q.2 On suppose que, tout le long de l'expérience, l'assiette glisse sur la nappe. Quel est, à l'instant $t = 0^+$, la valeur de la vitesse de glissement de l'assiette par rapport à la nappe ? Quel est son signe pour $t > 0$?

Q.3 Montrer que l'accélération de l'assiette est constante dans R_g et déterminer l'équation horaire du mouvement de son centre C_a sous la forme $x_a = f(t)$.

Q.4 Déterminer l'équation horaire du mouvement du centre C_n de la nappe, $x_n = h(t)$.

Q.5 On observe que le contact nappe-assiette dure un temps $\tau = 0,1$ s. Calculer la valeur de α . La manipulation peut-elle être conduite avec succès par un enfant ?

I.B Modélisation plus réaliste

En réalité, la dynamique de l'assiette comprend deux phases. Dans la première phase, de durée t_1 , l'intensité de la force de frottement est inférieure à la valeur fMg donnée par la loi de Coulomb, l'assiette ne glisse pas sur la nappe et $x_a = x_n$. Le contact entre l'assiette et la nappe induit une force tangentielle \vec{T} sur l'assiette et donc $-\vec{T}$ sur la nappe.

- Q.6** Pour $0 \leq t \leq t_1$, appliquer l'équation fondamentale de la dynamique à la nappe puis à l'assiette. Déduire de ces deux relations que la durée de la phase sans glissement est $t_1 = \frac{fg}{\alpha} \frac{M+m}{m}$.
- Q.7** Exprimer la position et la vitesse de l'assiette et de la nappe lorsque cette phase s'achève, c'est-à-dire en $t = t_1$.
- Q.8** Déterminer, pour $t \geq t_1$, et sous la forme de polynômes de la variable $(t - t_1)$, les équations horaires respectives du mouvement de C_a ($x_a = \phi(t - t_1)$) et de celui de C_n ($x_n = \eta(t - t_1)$).
- Q.9** On observe que cette deuxième phase (qui s'achève en t_c lorsqu'il n'y a plus contact nappe-assiette) dure un temps $t_c - t_1 = 0,1$ s. Déterminer les valeurs de α et de t_1 .

II – Deuxième expérience

Un solide S , de masse m , est accroché à un support par l'intermédiaire d'un ressort R_1 de masse négligeable et de raideur k . Un second ressort R_2 , identique au premier, pend sous le solide (FIGURE 6). À l'instant $t = 0$, on tire sur le ressort R_2 . On constate que si l'on tire lentement, l'un des ressorts finit par se briser et que si l'on tire rapidement, c'est l'autre ressort qui se brise.

- Q.10** Prévoir quel est, dans chacun des cas, le ressort qui se brise.

La force \vec{F} appliquée à l'extrémité libre de R_2 s'exprime par $\vec{F} = m\alpha t \vec{u}_x$ pour $t > 0$ où α est une constante et \vec{u}_x le vecteur unitaire vertical dirigé vers le bas. La tension \vec{T} de chaque ressort suit la loi de Hooke, jusqu'à une tension de rupture T_r : $T = kx$ pour $T < T_r$, où x est l'allongement du ressort par rapport à sa longueur à vide. On pose $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et l'on appelle $x_1(t)$ l'allongement de R_1 . Les conditions initiales sont $\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{t=0} = 0$ et $x_1(0) = \frac{mg}{k}$

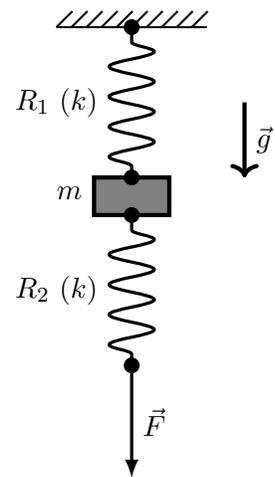


FIGURE 6 – Deux ressorts

- Q.11** Déduire du principe fondamental de la dynamique appliqué au solide S que l'allongement $x_1(t)$ est donné par :

$$x_1 = \frac{mg}{k} + \frac{m\alpha}{k} \left[t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right] = \frac{mg}{k} + \frac{m\alpha}{k\omega} [u - \sin(u)]$$

où on a posé $u = \omega t$.

- Q.12** En déduire l'évolution temporelle des tensions $T_1(u)$ et $T_2(u)$ de chaque ressort.
- Q.13** Représenter les graphes respectifs de $T_1(u)$ et $T_2(u)$ et discuter leurs possibilités d'intersections. On pourra poser $\varepsilon = \frac{g\omega}{\alpha}$.
- Q.14** On considère le cas où les graphes de $T_1(u)$ et de $T_2(u)$ se coupent. Établir, sous la forme $f(\varepsilon) = \frac{T_r}{mg}$, l'équation donnant la valeur limite de la secousse, α_L , en dessous de laquelle le ressort R_1 se casse le premier.
- Q.15** *Application numérique* : calculer α_L sachant que la tension de rupture est atteinte pour un allongement de 5,8 cm. On donne $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $m = 0,1 \text{ kg}$.

Donnée : graphe de la fonction $\frac{\arcsin(x)}{x}$.

