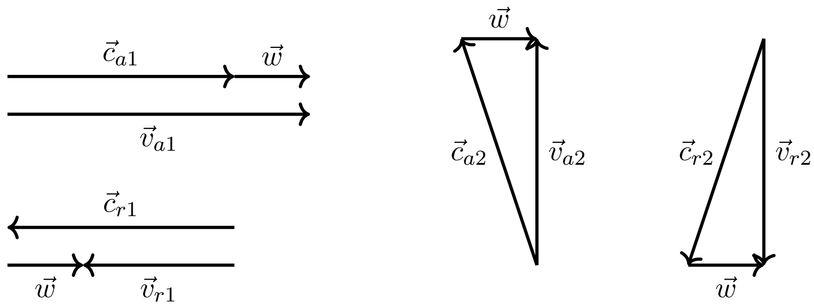
# Correction du DS9

## Exercice 1 : De l'éther luminifère à la relativité restreinte (CCP MP 2020)

### I – L'éxpérience de Michelson et Morley

**Q.1** Les vitesses $\vec{v}_{\varepsilon i}$ sont selon les axes horizontaux et verticaux et la vitesse $\vec{w}$ est constante. La loi de composition des vitesses donne : $\vec{v}_{\varepsilon i} = \vec{c}_{\varepsilon i} + \vec{w}_{\varepsilon i}$, soit les schémas suivants :




On en déduit : $v_{a1} = c + w$, $v_{r1} = c - w$ puis $v_{\varepsilon 2} = \sqrt{c_{\varepsilon 2}^2 - w^2}$.

**Q.2** On aurait alors $\tau(\alpha) = \dfrac{L}{v_{a2}} + \dfrac{L}{v_{r2}} - \dfrac{L}{v_{a1}} - \dfrac{L}{v_{r1}}$, soit : $\tau(\alpha) = \dfrac{L}{c}\left(\dfrac{2}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}} - \dfrac{1}{1+\frac{w}{c}} - \dfrac{1}{1-\frac{w}{c}}\right)$. Un développement limité à l'ordre 2 donne ainsi : $\tau(\alpha) = \dfrac{L}{c}\left(2 + \dfrac{w^2}{c^2} - 1 + \dfrac{w}{c} - \dfrac{w^2}{c^2} - 1 - \dfrac{w}{c} - \dfrac{w^2}{c^2}\right)$. Après simplification : $\boxed{\tau(\alpha) = -\dfrac{Lw^2}{c^3}}$. L'ordre d'interférence $p$ vaut alors $\boxed{p = \dfrac{\delta}{\lambda} = \nu\tau(\alpha) = -\dfrac{Lw^2\nu}{c^3}}$.

**Q.3** La rotation de 90° est équivalente à un échange des voies 1 et 2 (l'ordre de l'aller et du retour n'ayant pas d'importance), donc on a simplement un changement de signe : $\tau(\beta) = -\tau(\alpha)$ et ainsi de suite. En particulier $p(\beta) = \dfrac{Lw^2\nu}{c^3}$.

**Q.4** C'est immédiat à partir de ce qui précède.

**Q.5** On attend un déplacement de la figure d'interférence d'une distance $i\Delta p$, orthogonalement à la direction des franges.

**Q.6** a) Le référentiel héliocentrique est le référentiel barycentrique du Soleil (centré sur le Soleil, avec des axes pointant vers des étoiles lointaines).

b) **Première loi** : les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un des foyers.

**Deuxième loi** : L'aire balayée par unité de temps par le rayon Soleil-planète est constante.

**Troisième loi** : Le rapport $T^2/a^3$ entre la période $T$ et le demi-grand axe $a$ de l'ellipse est indépendant de la planète.

c) Il s'agit de la vitesse de la Terre dans le référentiel héliocentrique. On peut la retrouver avec un PFD (trajectoire supposée circulaire) : $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -\dfrac{M_sG}{r^2}\vec{u}_r$, d'où $r^3\dot{\theta}^2 = \dfrac{v^3}{\dot{\theta}} = M_sG$. Comme $\dot{\theta} = \dfrac{2\pi}{T_{an}}$, il vient $\boxed{v = \left(M_sG\dfrac{2\pi}{T_{an}}\right)^{1/3} = 29{,}8\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.

**Q.7** L'application numérique donne $\boxed{\Delta p = 0,341}$, ce qui est suffisant pour observer un éventuel effet.

**Q.8** On pourrait mesurer une vitesse $w = \sqrt{\frac{c^3\Delta p}{2L\nu}} \simeq 5\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ pour $\Delta p = 1/100$.
On aurait pu considérer que le Soleil se déplacait par rapport à l'éther et que la somme des vitesses $\vec{v}_S + \vec{v}_{T/S}$ aurait pu être plus faible que les $5\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Ce ne peut en revanche pas être le cas à tout moment de l'année, puisque la direction de $\vec{v}_{T/S}$ varie. Il y a en particulier au moins un moment où elle est alignée avec $\vec{v}_S$. La reconduction à différents moments de l'année permet d'écarter cette objection.
Reste encore l'objection "historique", qui était que la Terre aurait pu entraîner l'éther avec son mouvement.

## II – Électromagnétisme et relativité

**Q.9** Par définition, la force de Lorentz s'écrit : $\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$.

**Q.10** Par définition, $\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}_e}$.

**Q.11** L'égalité de la force de Lorentz entre les deux référentiels donne : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$.
Cela donne d'après la formule de composition des vitesses : $\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v} \wedge \vec{B}' - \vec{V}_e \wedge \vec{B}'$. Prendre $\vec{v} = \vec{0}$ donne la première relation et la dépendance en $\vec{v}$ implique $\vec{B} = \vec{B}'$.

**Q.12** Dans $R'$ le fil est statique et il n'y a pas de courant. On en déduit $\vec{B}' = \vec{0}$ et donc $\vec{B} = \vec{0}$ d'après ce qui précède.

**Q.13** Le problème est invariant par translation selon $\vec{e_z}$ et rotation autour de $(Oz)$, ainsi que par symétrie par $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$. On a donc un champ $\vec{E}' = E'(r)\vec{u}_r$. On prend comme surface de Gauss un cylindre de rayon $r$ et de hauteur $h$. La charge intérieure vaut $Q_{int} = \pi a^2 \rho_f h$. L'application du théorème de Gauss donne :

$$\oiint \vec{E}' \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi r h E'(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\pi a^2 \rho_f h}{\varepsilon_0}$$

soit : $\boxed{\vec{E}' = \dfrac{a^2\rho_f}{2r\varepsilon_0}\vec{u}_r} = \vec{E}$ (car le champ magnétique est nul ici).

**Q.14** On sait que $I = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \lambda_f \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \lambda_f V_e$ (il est aussi possible de procéder avec $I = \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ mais c'est un peu plus long). La situation magnétostatique présente les mêmes invariances par rotation et translation. On a donc $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$. On prend comme contour d'Ampère un cercle de rayon $r$. Le théorème d'Ampère donne :

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{enlace} = \mu_0 \lambda_f V_e$$

Soit $\boxed{\vec{B} = \dfrac{\mu_0 \lambda_f V_e}{2\pi r}\vec{u}_\theta} \neq 0$. Ce résultat est incompatible avec le résultat précédent : les lois de la mécanique classique ne sont pas applicables pour la transformation des champs électromagnétiques.

**Q.15** Comme la vitesse est suivant l'axe du fil, $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{0}$. Par ailleurs, $\vec{B}' = \vec{0}$. On en déduit que : $\vec{E} = \gamma \vec{E}' = \gamma \dfrac{a^2\rho_f}{2r\varepsilon_0}\vec{u}_r$ puis $\vec{B} = \gamma \dfrac{V_e}{c^2}\vec{u}_z \wedge \dfrac{a^2\rho_f}{2r\varepsilon_0}\vec{u}_r = \gamma \mu_0 V_e \dfrac{a^2\rho_f}{2r}\vec{u}_\theta = \gamma \dfrac{\mu_0\lambda_f V_e}{2\pi r}\vec{u}_\theta$. On retrouve l'expression précédente à un facteur $\gamma$ près.

**Q.16** Par identification, un observateur dans $(R)$ verrait une densité linéique de charge $\lambda = \gamma\lambda_f$. Comme $\gamma > 1$, cela correspond à une contraction des longueurs.

### III – L'expérience Michelson-Gale-Pearson

**Q.17** Le référentiel géocentrique est le référentiel barycentrique de la Terre (en translation par rapport au référentiel héliocentrique). Dans ce référentiel la terre a un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des pôles. Par définition, $\Omega_T = \frac{2\pi}{T_j}$ (en considérant que $T_j$ est le jour sidéral, non précisé...)

**Q.18** Un point fixe à la surface de la Terre se déplace vers l'Est dans le référentiel géocentrique, le vent d'éther soufflerait donc vers l'ouest. On a $w(\varphi) = r\Omega_T$ avec $r$ la distance entre un point à la surface terrestre et l'axe de rotation tel que $r = R_T \cos\varphi$. Finalement $\boxed{w(\varphi) = R_T \cos(\varphi)\Omega_T}$.

**Q.19** a) C'est le même principe que dans la première partie : $v_{AB} = c - w(\varphi)$ et $v_{CD} = c + w(\varphi + \Delta\varphi)$. On obtient alors : $\tau_1 = \tau_0 + \dfrac{X}{c - w(\varphi)} + \dfrac{X}{c + w(\varphi + \Delta\varphi)}$.

b) Un premier développement limité donne : $\tau_1 = \tau_0 + \dfrac{X}{c}\left(2 + \dfrac{w(\varphi)}{c} - \dfrac{w(\varphi + \Delta\varphi)}{c}\right)$. Puis un second développement donne $\boxed{\tau_1 = \tau_0 + 2\dfrac{X}{c} - \dfrac{X}{c^2}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\varphi}\Delta\varphi}$.

Par ailleurs $Y = R_T\Delta\varphi$ et $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\varphi} = -R_T\Omega_T \sin(\varphi)$. On a donc $\tau_1 = \tau_0 + \dfrac{2X}{c} + \dfrac{X\Omega_T}{c^2}Y\sin(\varphi)$, ce qui donne le résultat demandé avec $f(Y, \varphi) = Y\sin(\varphi)$.

c) On inverse simplement les rôles de $\varphi$ et $\varphi + \Delta\varphi$ pour obtenir : $\boxed{\tau_2 = \tau_0 + \dfrac{X}{c - w(\varphi + \Delta\varphi)} + \dfrac{X}{c + w(\varphi)}}$.

**Q.20** Le déphasage vaut $\Delta\Phi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\delta = \dfrac{2\pi c}{\lambda_0}(\tau_1 - \tau_2) = \dfrac{2\pi c}{\lambda_0}\dfrac{2\Omega_T X}{c^2}Y\sin(\varphi) = \dfrac{4\pi}{\lambda_0 c}S\Omega_n$.

**Q.21** Par définition, $\boxed{p = \dfrac{\Delta\Phi}{2\pi} = \dfrac{2S\Omega_n}{\lambda_0 c}}$.

**Q.22** Vu la faible valeur de $\Omega_n$, $\Delta p$ risque d'être assez petit (d'où la nécessité d'un grand interféromètre). Le problème avec la Terre est qu'il n'est pas possible de l'arrêter, il est donc impossible de comparer la situation avec celle où $\Omega_n = 0$ pour calculer $p$. Au lieu de cela, on utilise la situation où $S$ est bien plus faible, et donc $p$ négligeable, pour fournir une référence.

**Q.23** L'application numérique donne $\boxed{\Delta p = 0,134}$, soit deux fois moins que la valeur expérimentale.

## Exercice 2 : Aspects mécaniques de la sécurité routière (E3A MP 2017)

### I – Distance nécessaire pour s'arrêter sur une ligne droite horizontale

**Q.1** Un mouvement rectiligne est un déplacement sur une droite (direction constante) alors qu'un mouvement uniforme impose que la norme du vecteur vitesse est une constante.

**Q.2** Initialement, la voiture se déplace à la vitesse $\vec{v}_0$. Pendant la durée $t_R$, le mouvement reste rectiligne uniforme, le vecteur vitesse est une constante. Dans ce cas, $\boxed{\vec{v}(t) = v_0\vec{u}_x}$.

**Q.3** L'accélération s'exprime avec les hypothèses : $\boxed{\vec{a}(t) = -a_0\vec{u}_x}$. La vitesse est donnée par : $\boxed{\vec{v}(t) \cdot \vec{u}_x = -a_0(t - t_R) + v_0}$.

**Q.4** On en déduit qu'entre 0 et $t_R$, $\boxed{x(t) = v_0 t}$. Pour $t > t_R$, $x(t) = -\dfrac{1}{2}a_0(t - t_R)^2 + v_0(t - t_R) + C$

avec $C$ une constante permettant d'assurer la continuité entre les deux expressions. On en déduit que $C = x(t = t_R) = v_0 t_R$ d'où $\boxed{x(t) = -\frac{1}{2}a_0(t - t_R)^2 + v_0 t}$ pour $t > t_R$.

**Q.5** L'arrêt intervient à $t = t_1$. Ainsi, $v(t_1) = -a_0(t_1 - t_R) + v_0 = 0$ donc $\boxed{t_1 = \frac{v_0}{a_0} + t_R}$. La distance $d_a$ parcourue avant l'arrêt du véhicule vaut ainsi $\boxed{d_a = x(t_1) = \frac{v_0^2}{2a_0} + v_0 t_R}$.

**Q.6** Pour être en sécurité avec les repères, il faut que $d_a < D$ ce qui implique que $\boxed{a_0 > \frac{v_0^2}{2(D - v_0 t_R)}}$.

**Q.7** Les applications numériques donnent :

- pour $v_0 = 130\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $t_1 = 4{,}0\,\mathrm{s}$ et $d_a = 90\,\mathrm{m}$ ;
- pour $v_0 = 90\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $t_1 = 3{,}1\,\mathrm{s}$ et $d_a = 51\,\mathrm{m}$.

à décélération fixée, la distance d'arrêt et le temps d'arrêt sont plus faibles pour une vitesse faible.

**Q.8** On impose un temps d'arrêt de $t_2 = 2{,}0\,\mathrm{s}$ avec toujours le même temps $t_R$ de réaction. On calcule dans ce cas $\boxed{a_2 = \frac{v_0}{t_2 - t_R} = 36\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}}$. C'est une décélération très grande, comparé à la décélération $a_1$ utilisée précédemment. La distance parcourue est alors $\boxed{d_a = \frac{v_0^2}{2a_2} + v_0 t_R = 54\,\mathrm{m}}$ qui est très courte. Cette décélération n'est pas attégnable en pratique, en raison des capacités de freinage limitées des véhicules actuels. La règle des deux secondes conduirait donc à un accident.

## II – Influence de l'état de la route sur la distance d'arrêt

**Q.9** Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, les forces appliquées à la voiture sont :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ ;
- la réaction normale du support $\vec{N} = N\vec{u}_z$ ;
- la force due au freinage $\vec{f} = -f\vec{u}_x$.

Cette dernière force inclut la force due au freinage imposé par le conducteur et tous les frottements que le système pourrait subir.

**Q.10** L'application du principe fondamental de la dynamique à la voiture dans le référentiel terrestre, projeté sur l'axe $(Oz)$ conduit à $\boxed{N = mg}$.

**Q.11** Les lois de Coulomb sont $\begin{cases} \|\vec{T}\| < \lambda\|\vec{N}\| \text{ pour le non-glissement} \\ \|\vec{T}\| = \lambda\|\vec{N}\| \text{ pour le glissement} \end{cases}$

**Q.12** Dans le cas où il y a glissement sur une route horizontale : $T = \lambda N = \lambda mg$ soit $\boxed{\vec{T} = -\lambda mg\vec{u}_x}$.

**Q.13** Si la force de freinage est constante, le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe $(Ox)$ donne $ma_0 = f$. L'application numérique donne $\boxed{f = 12\,\mathrm{kN}}$. La question précédente nous permet de calculer la valeur de la force de frottements avec $\lambda = 0{,}70$ (pneu sur route sèche) : $T = \lambda mg = 7\,\mathrm{kN}$. L'intensité de la force de frottements qu'exerce la route est moins grande que la force de freinage globale puisque des frottements supplémentaires s'appliquent.

**Q.14** La variation d'énergie cinétique du véhicule s'écrit $\boxed{\Delta E_c = -\frac{1}{2}mv_0^2 = -312{,}5\,\mathrm{kJ}}$.

**Q.15** Pour éviter le glissement, il faut $T < \lambda N = \lambda mg$. D'après ce qui précède, on peut écrire la force de freinage totale comme la force de frottement qu'exerce la route plus une contribution autre : $f = T + T_{autre}$. Au début du freinage, la vitesse est la même que dans la situation précédente donc les forces autres sont identiques (au moins initialement). Ainsi $f < \lambda mg + T_{autre}$ (constant).

**Q.16** Sur le béton sec, la limite de la force de frottement de la route vaut $T = 7\,\mathrm{kN}$ et sur le béton humide, elle est de $T = 5\,\mathrm{kN}$. Pour maintenir le contact et garder le contrôle du véhicule, le freinage doit être moins fort sur une route mouillée que sur une route sèche. Cela implique que les distances de freinage augmentent.

**Q.17** Le véhicule étant maintenant dans une descente, la projection du PFD sur la normale donne $\boxed{N = mg\cos\alpha}$.

**Q.18** Dans ce cas la condition à vérifier pour le pas avoir glisement est : $\boxed{f = T_{autre} + T < T_{autre} + \lambda mg\cos\alpha}$ qui est d'autant plus faible que la pente est grande : la force de freinage maximale garantissant le contrôle du véhicule diminue en descente.