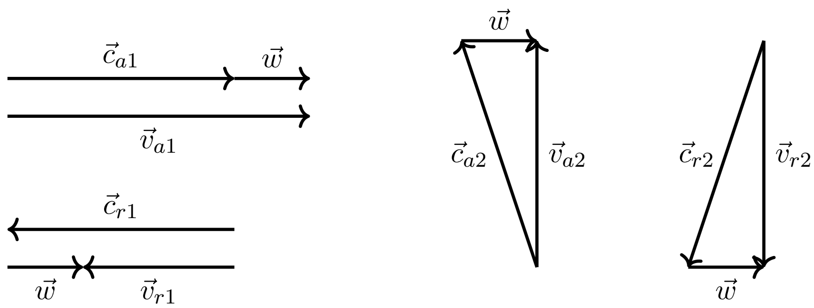
Correction du DS9

Exercice 1 : De l'éther luminifère à la relativité restreinte (CCP MP 2020)

I – L'éxpérience de Michelson et Morley

Q.1 Les vitesses $\vec{v}_{\varepsilon i}$ sont selon les axes horizontaux et verticaux et la vitesse $\vec{w}$ est constante. La loi de composition des vitesses donne : $\vec{v}_{\varepsilon i} = \vec{c}_{\varepsilon i} + \vec{w}_{\varepsilon i}$, soit les schémas suivants :



On en déduit : $v_{a1} = c + w$, $v_{r1} = c - w$ puis $v_{\varepsilon 2} = \sqrt{c_{\varepsilon 2}^2 - w^2}$.

Q.2 On aurait alors $\tau(\alpha) = \dfrac{L}{v_{a2}} + \dfrac{L}{v_{r2}} - \dfrac{L}{v_{a1}} - \dfrac{L}{v_{r1}}$, soit : $\tau(\alpha) = \dfrac{L}{c}\left(\dfrac{2}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}} - \dfrac{1}{1+\frac{w}{c}} - \dfrac{1}{1-\frac{w}{c}}\right)$. Un développement limité à l'ordre 2 donne ainsi : $\tau(\alpha) = \dfrac{L}{c}\left(2 + \dfrac{w^2}{c^2} - 1 + \dfrac{w}{c} - \dfrac{w^2}{c^2} - 1 - \dfrac{w}{c} - \dfrac{w^2}{c^2}\right)$. Après simplification : $\boxed{\tau(\alpha) = -\dfrac{Lw^2}{c^3}}$. L'ordre d'interférence p vaut alors $\boxed{p = \dfrac{\delta}{\lambda} = \nu\tau(\alpha) = -\dfrac{Lw^2\nu}{c^3}}$.

Q.3 La rotation de 90° est équivalente à un échange des voies 1 et 2 (l'ordre de l'aller et du retour n'ayant pas d'importance), donc on a simplement un changement de signe : $\tau(\beta) = -\tau(\alpha)$ et ainsi de suite. En particulier $p(\beta) = \dfrac{Lw^2\nu}{c^3}$.

Q.4 C'est immédiat à partir de ce qui précède.

Q.5 On attend un déplacement de la figure d'interférence d'une distance $i\Delta p$, orthogonalement à la direction des franges.

Q.6 a) Le référentiel héliocentrique est le référentiel barycentrique du Soleil (centré sur le Soleil, avec des axes pointant vers des étoiles lointaines).

b) **Première loi** : les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un des foyers.

Deuxième loi : L'aire balayée par unité de temps par le rayon Soleil-planète est constante.

Troisième loi : Le rapport T^2/a^3 entre la période T et le demi-grand axe a de l'ellipse est indépendant de la planète.

c) Il s'agit de la vitesse de la Terre dans le référentiel héliocentrique. On peut la retrouver avec un PFD (trajectoire supposée circulaire) : $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -\dfrac{M_sG}{r^2}\vec{u}_r$, d'où $r^3\dot{\theta}^2 = \dfrac{v^3}{\dot{\theta}} = M_sG$. Comme $\dot{\theta} = \dfrac{2\pi}{T_{an}}$, il vient $\boxed{v = \left(M_sG\dfrac{2\pi}{T_{an}}\right)^{1/3} = 29{,}8\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.

Q.7 L'application numérique donne $\boxed{\Delta p = 0,341}$, ce qui est suffisant pour observer un éventuel effet.

Q.8 On pourrait mesurer une vitesse $w = \sqrt{\frac{c^3\Delta p}{2L\nu}} \simeq 5\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ pour $\Delta p = 1/100$.
On aurait pu considérer que le Soleil se déplacait par rapport à l'éther et que la somme des vitesses $\vec{v}_S + \vec{v}_{T/S}$ aurait pu être plus faible que les $5\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Ce ne peut en revanche pas être le cas à tout moment de l'année, puisque la direction de $\vec{v}_{T/S}$ varie. Il y a en particulier au moins un moment où elle est alignée avec $\vec{v}_S$. La reconduction à différents moments de l'année permet d'écarter cette objection.
Reste encore l'objection "historique", qui était que la Terre aurait pu entraîner l'éther avec son mouvement.

II – Électromagnétisme et relativité

Q.9 Par définition, la force de Lorentz s'écrit : $\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})}$.

Q.10 Par définition, $\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}_e}$.

Q.11 L'égalité de la force de Lorentz entre les deux référentiels donne : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v}'\wedge\vec{B}')$.
Cela donne d'après la formule de composition des vitesses : $\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}\wedge\vec{B}' - \vec{V}_e\wedge\vec{B}'$. Prendre $\vec{v} = \vec{0}$ donne la première relation et la dépendance en $\vec{v}$ implique $\vec{B} = \vec{B}'$.

Q.12 Dans R' le fil est statique et il n'y a pas de courant. On en déduit $\vec{B}' = \vec{0}$ et donc $\vec{B} = \vec{0}$ d'après ce qui précède.

Q.13 Le problème est invariant par translation selon $\vec{e_z}$ et rotation autour de (Oz), ainsi que par symétrie par $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$. On a donc un champ $\vec{E}' = E'(r)\vec{u}_r$. On prend comme surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur h. La charge intérieure vaut $Q_{int} = \pi a^2\rho_f h$. L'application du théorème de Gauss donne :

$$\oiint \vec{E}'\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\pi r h E'(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\pi a^2\rho_f h}{\varepsilon_0}$$

soit : $\boxed{\vec{E}' = \dfrac{a^2\rho_f}{2r\varepsilon_0}\vec{u}_r} = \vec{E}$ (car le champ magnétique est nul ici).

Q.14 On sait que $I = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \lambda_f\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \lambda_f V_e$ (il est aussi possible de procéder avec $I = \iint \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ mais c'est un peu plus long). La situation magnétostatique présente les mêmes invariances par rotation et translation. On a donc $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$. On prend comme contour d'Ampère un cercle de rayon r. Le théorème d'Ampère donne :

$$\oint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{enlace} = \mu_0\lambda_f V_e$$

Soit $\boxed{\vec{B} = \dfrac{\mu_0\lambda_f V_e}{2\pi r}\vec{u}_\theta} \neq 0$. Ce résultat est incompatible avec le résultat précédent : les lois de la mécanique classique ne sont pas applicables pour la transformation des champs électromagnétiques.

Q.15 Comme la vitesse est suivant l'axe du fil, $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{0}$. Par ailleurs, $\vec{B}' = \vec{0}$. On en déduit que : $\vec{E} = \gamma\vec{E}' = \gamma\dfrac{a^2\rho_f}{2r\varepsilon_0}\vec{u}_r$ puis $\vec{B} = \gamma\dfrac{V_e}{c^2}\vec{u}_z\wedge\dfrac{a^2\rho_f}{2r\varepsilon_0}\vec{u}_r = \gamma\mu_0 V_e\dfrac{a^2\rho_f}{2r}\vec{u}_\theta = \gamma\dfrac{\mu_0\lambda_f V_e}{2\pi r}\vec{u}_\theta$. On retrouve l'expression précédente à un facteur γ près.

Q.16 Par identification, un observateur dans (R) verrait une densité linéique de charge $\lambda = \gamma\lambda_f$. Comme $\gamma > 1$, cela correspond à une contraction des longueurs.

III – L'expérience Michelson-Gale-Pearson

Q.17 Le référentiel géocentrique est le référentiel barycentrique de la Terre (en translation par rapport au référentiel héliocentrique). Dans ce référentiel la terre a un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des pôles. Par définition, $\Omega_T = \frac{2\pi}{T_j}$ (en considérant que T_j est le jour sidéral, non précisé...)

Q.18 Un point fixe à la surface de la Terre se déplace vers l'Est dans le référentiel géocentrique, le vent d'éther soufflerait donc vers l'ouest. On a $w(\varphi) = r\Omega_T$ avec r la distance entre un point à la surface terrestre et l'axe de rotation tel que $r = R_T \cos\varphi$. Finalement $\boxed{w(\varphi) = R_T \cos(\varphi)\Omega_T}$.

Q.19 a) C'est le même principe que dans la première partie : $v_{AB} = c - w(\varphi)$ et $v_{CD} = c + w(\varphi + \Delta\varphi)$. On obtient alors : $\tau_1 = \tau_0 + \dfrac{X}{c - w(\varphi)} + \dfrac{X}{c + w(\varphi + \Delta\varphi)}$.

b) Un premier développement limité donne : $\tau_1 = \tau_0 + \dfrac{X}{c}\left(2 + \dfrac{w(\varphi)}{c} - \dfrac{w(\varphi + \Delta\varphi)}{c}\right)$. Puis un second développement donne $\boxed{\tau_1 = \tau_0 + 2\dfrac{X}{c} - \dfrac{X}{c^2}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\varphi}\Delta\varphi}$.

Par ailleurs $Y = R_T\Delta\varphi$ et $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\varphi} = -R_T\Omega_T \sin(\varphi)$. On a donc $\tau_1 = \tau_0 + \dfrac{2X}{c} + \dfrac{X\Omega_T}{c^2}Y\sin(\varphi)$, ce qui donne le résultat demandé avec $f(Y, \varphi) = Y\sin(\varphi)$.

c) On inverse simplement les rôles de φ et $\varphi + \Delta\varphi$ pour obtenir : $\boxed{\tau_2 = \tau_0 + \dfrac{X}{c - w(\varphi + \Delta\varphi)} + \dfrac{X}{c + w(\varphi)}}$.

Q.20 Le déphasage vaut $\Delta\Phi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\delta = \dfrac{2\pi c}{\lambda_0}(\tau_1 - \tau_2) = \dfrac{2\pi c}{\lambda_0}\dfrac{2\Omega_T X}{c^2}Y\sin(\varphi) = \dfrac{4\pi}{\lambda_0 c}S\Omega_n$.

Q.21 Par définition, $\boxed{p = \dfrac{\Delta\Phi}{2\pi} = \dfrac{2S\Omega_n}{\lambda_0 c}}$.

Q.22 Vu la faible valeur de Ω_n, Δp risque d'être assez petit (d'où la nécessité d'un grand interféromètre). Le problème avec la Terre est qu'il n'est pas possible de l'arrêter, il est donc impossible de comparer la situation avec celle où $\Omega_n = 0$ pour calculer p. Au lieu de cela, on utilise la situation où S est bien plus faible, et donc p négligeable, pour fournir une référence.

Q.23 L'application numérique donne $\boxed{\Delta p = 0,134}$, soit deux fois moins que la valeur expérimentale.

Exercice 2 : Secousses en mécanique (Mines-Ponts MP 2001)

I – Première expérience

Q.1 L'analyse dimensionnelle permet d'identifier $m\alpha t$ à une force donc αt à une accélération. α se mesure donc en $\mathrm{m \cdot s^{-3}}$, c'est bien une secousse.

Q.2 La vitesse de glissement demandée s'écrit $\boxed{\vec{v}_g = \vec{v}_a - \vec{v}_n}$ donc en projection sur $\vec{u}$, $v_g = v_a - v_n < 0$ lorsque $t > 0$ puisque l'assiette glisse sur la nappe. Par contre, à l'instant $t = 0^+$, les vitesses restent égales à leur valeur à $t = 0^-$, soit zéro puisque les forces exercées sur la nappe et l'assiette sont finies.

Q.3 On applique le principe fondamental de la dynamique à l'assiette dans R_g, en projection sur $\vec{u}$. Compte tenu du sens de la vitesse de glissement et de la force normale du support verticale vers le haut de norme $N = Mg$, on obtient $M\dfrac{\partial^2 x_a}{\partial t^2} = fMg$. L'accélération de l'assiette dans R_g est bien constante de norme

fg. On en déduit grâce aux conditions initiales ($x_a(0) = 0$ et $\dot{x}_a(0) = 0$) que $\boxed{x_a(t) = \dfrac{gft^2}{2}}$.

Q.4 De même, on écrit l'équation du mouvement du centre de la nappe, sans glissement sur la table et compte tenu du principe des actions réciproques : $m\dfrac{\partial^2 x_n}{\partial t^2} = -fMg + m\alpha t$ qui s'intègre successivement en $\dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = -f\dfrac{Mg}{m}t + \dfrac{\alpha t^2}{2}$ et puis $\boxed{x_n(t) = -f\dfrac{Mg}{2m}t^2 + \dfrac{\alpha t^3}{6}}$.

Q.5 La durée du contact correspond au passage de $x_n - x_a$ de la valeur zéro à $R + r$. Cette condition s'écrit : $R + r = -\dfrac{gf\tau^2}{2}\left(1 + \dfrac{M}{m}\right) + \dfrac{\alpha\tau^3}{6}$. On trouve donc $\boxed{\alpha = \dfrac{6(R+r)}{\tau^3} + \dfrac{3fg}{\tau}\left(\dfrac{M}{m} + 1\right) = 2340\,\mathrm{m\cdot s^{-3}}}$. Au moment de la perte de contact, la force à développer est ainsi $m\alpha\tau = 11{,}7\,\mathrm{N}$ soit une force correspondant au poids d'une masse de $1\,\mathrm{kg}$ environ : un enfant peut y arriver.

Q.6 Le principe fondamental appliqué à l'assiette dans R_g donne cette fois $M\dfrac{\partial^2 x_a}{\partial t^2} = T$ et de même pour la nappe : $m\dfrac{\partial^2 x_n}{\partial t^2} = -T + m\alpha t$. Comme $x_a = x_n$ durant cette phase, la somme de ces deux équation donne d'une part $(m + M)\dfrac{\partial^2 x_n}{\partial t^2} = +m\alpha t$ et on en déduit également que $T = \dfrac{mM}{m+M}\alpha t$. Cette phase dure tant que $T < fMg$ soit $\boxed{t_1 = \dfrac{m+M}{m\alpha}fg}$.

Q.7 L'intégration de l'ED précédente donne $v_a(t) = v_n(t) = \dfrac{m\alpha}{2(m+M)}t^2$ puis $x_a(t) = x_n(t) = \dfrac{m\alpha}{6(m+M)}t^3$. En $t = t_1$, on trouve donc : $\boxed{v_a(t_1) = \dfrac{m+M}{2\alpha m}f^2g^2}$ puis $\boxed{x_a(t = t_1) = \left(\dfrac{m+M}{\alpha m}\right)^2\dfrac{f^3g^3}{6}}$.

Q.8 Pour $t > t_1$, il y a glissement entre la nappe et l'assiette, les équations sont donc celles trouvées dans la partie précédente : $M\dfrac{\partial^2 x_a}{\partial t^2} = fMg$ pour l'assiette et $m\dfrac{\partial^2 x_n}{\partial t^2} = -fMg + m\alpha t$ pour la nappe. Les conditions initiales sont celles trouvées à la question précédente, soit :

$$\boxed{x_a(t) = \frac{fg}{2}(t - t_1)^2 + \frac{m+M}{2\alpha m}f^2g^2(t - t_1) + \left(\frac{m+M}{\alpha m}\right)^2\frac{f^3g^3}{6}}$$

De la même manière, on trouve pour la nappe :

$$\boxed{x_n(t) = \frac{\alpha}{6}(t - t_1)^3 - \frac{Mgf}{2m}(t - t_1)^2 + \frac{m+M}{2\alpha m}f^2g^2(t - t_1) + \left(\frac{m+M}{\alpha m}\right)^2\frac{f^3g^3}{6}}$$

Q.9 Au temps t_c, on a comme précédemment $x_n(t_c) - x_a(t_c) = R + r$, c'est-à-dire :

$$R + r = \frac{\alpha}{6}(t - t_1)^3 - \frac{gf}{2}\left(\frac{M}{m} + 1\right)(t - t_1)^2$$

La durée $t_c - t_1$ de la deuxième phase est choisie égale à τ donc la valeur de α est la même. Par conséquent, on trouve $\boxed{t_1 = 7{,}6\,\mathrm{ms}} \ll \tau$. Cette très faible valeur de t_1 justifie l'hypothèse de la première modélisation.

II – Deuxième expérience

Q.10 Si on tire lentement, la masse m reste pratiquement en équilibre à chaque instant. Elle subit alors du ressort du bas la force $T_2 = F$ et du ressort du haut la tension T_1. Son équilibre impose que $T_1 = F + mg > F$. Au contraire, si on tire rapidement, la masse m ne bouge pratiquement pas et la tension du ressort supérieur reste égale à sa valeur initiale, quelle que soit F. En tirant lentement, c'est donc le ressort R_1 qui se brise en premier alors qu'en tirant rapidement, c'est le ressort R_2.

Q.11 Les ressorts étant sans masse, les forces exercées sur leurs deux extrémités se compensent et sont égales en norme à la tension du ressort étudié. Les forces qui s'appliquent que S sont donc la tension $\vec{T_2} = m\alpha t\vec{u}_x$, le poids $mg\vec{u}_x$ et la tension $\vec{T_1} = -kx_1\vec{u}_x$. Ainsi, le PFD appliqué à S en projection sur $\vec{u}_x$ donne $m\ddot{x}_1 = mg - kx_1 + m\alpha t$ qui s'écrit aussi $\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = g + \alpha t$. La solution générale s'écrit comme la somme de la solution de l'équation homogène $x_h(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ et d'une solution particulière $x_p(t) = \dfrac{mg}{k} + \dfrac{m\alpha}{k}t$. Les conditions initiales donnent $A = 0$ puis $B = -\dfrac{m\alpha}{k\omega}$, d'où la solution générale :

$$x_1(t) = \frac{mg}{k} + \frac{m\alpha}{k}t - \frac{m\alpha}{k\omega}\sin(\omega t)$$

qui est la solution demandée.

Q.12 On a vu que $T_2 = m\alpha t = \dfrac{m\alpha}{\omega}u$ et $T_1 = kx_1 = mg + \dfrac{m\alpha}{\omega}\left[u - \sin(u)\right]$.

Q.13 En posant ε tel qu'indiqué dans l'énoncé, il vient $T_1 = \dfrac{m\alpha}{\omega}\left[\varepsilon + u - \sin(u)\right]$. Ces deux courbes se croisent si $\varepsilon = \sin(u)$ possède au moins une solution, ce qui est possible si $\varepsilon \leq 1$.

Q.14 Si le ressort R_1 casse en premier, cela signifie que T_1 atteint la valeur T_r avant T_2. Ces deux conditions donnent $\varepsilon > \sin(u)$ (pour que $T_1 > T_2$) et $T_1 = \dfrac{m\alpha}{\omega}\left[\varepsilon + u - \sin(u)\right] = T_r$. À la limite, il vient donc $\varepsilon_L = \sin(u)$ soit $u = \arcsin(\varepsilon_L)$ puis $T_1 = \dfrac{m\alpha}{\omega}\arcsin(\varepsilon_L) = \dfrac{mg}{\varepsilon_L}\arcsin(\varepsilon_L) = T_r$. On en déduit la condition demandée : $\boxed{\dfrac{\arcsin(\varepsilon_L)}{\varepsilon_L} = \dfrac{T_r}{mg}}$.

Q.15 On donne $\dfrac{T_r}{mg} = \dfrac{kx_r}{mg} = 1{,}16$, soit $\varepsilon_L = 0{,}8$. La secousse limite vaut donc $\boxed{\alpha_L = 176\,\mathrm{m\cdot s^{-3}}}$.