

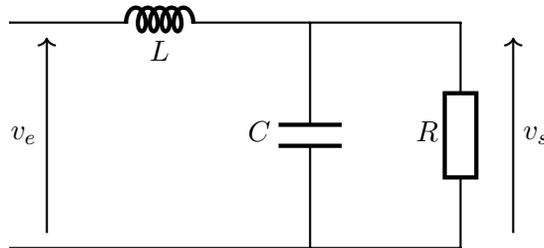
## DS 1 (4 heures)

### *Traitement du signal*

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Les résultats doivent être **encadrés**. La calculatrice est autorisée.

### Exercice 1 : Modulation et démodulation (d'après Centrale TSI 2010)

On considère le filtre représenté ci-dessous :



La tension d'entrée est fournie par un générateur et s'écrit  $v_e(t) = V_{em} \cos(\omega t + \varphi_e)$  où  $V_{em}$  est la valeur maximale et  $\omega$  la pulsation. La tension de sortie est alors notée  $v_s(t) = V_{sm} \cos(\omega t + \varphi_s)$ . L'étude du filtre sera menée en utilisant la notation complexe  $\underline{v}_e$  et  $\underline{v}_s$  de ces deux tensions :

$$\underline{v}_e(t) = V_{em} e^{j(\omega t + \varphi_e)} \quad \text{et} \quad \underline{v}_s(t) = V_{sm} e^{j(\omega t + \varphi_s)}$$

#### 1) Analyse qualitative

- Q.1** Représenter le circuit en basse fréquences et indiquer la limite de  $v_s$  dans ce cas.
- Q.2** Faire de même pour les hautes fréquences.
- Q.3** Quelle est alors la nature de ce filtre ?

#### 2) Analyse quantitative

- Q.4** Montrer que la fonction de transfert complexe de ce filtre s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + 2j\lambda \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

On précisera les expressions de  $H_0$ ,  $\lambda$  et  $\omega_0$  en fonction des paramètres des composants du circuit. Vérifier la concordance avec l'analyse qualitative.

- Q.5** Comment s'exprime l'amplitude  $V_{sm}$  du signal de sortie en fonction de  $|\underline{H}|$  et de l'amplitude  $V_{em}$  du signal d'entrée ?
- Q.6** Comment s'exprime la phase  $\varphi_s$  du signal de sortie en fonction de la phase  $\varphi$  de  $\underline{H}$  et de la phase  $\varphi_e$  du signal d'entrée ?

Dans toute la suite, on ajuste les composantes du circuit pour avoir  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Q.7** Montrer que  $|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}}$ .

**Q.8** Tracer sur votre copie le diagramme de Bode en gain de ce filtre en précisant les grandeurs portées sur les axes ainsi que quelques valeurs remarquables de ces grandeurs. Faire apparaître également les asymptotes en haute et basse fréquences ainsi que la pulsation de coupure à  $-3$  dB.

**Q.9** Tracer le diagramme de Bode en phase du filtre. On précisera les asymptotes en basse et haute fréquence. Que vaut la phase  $\varphi$  de  $H$  pour  $\omega = \omega_0$  ?

### 3) Modulation d'amplitude

Il est fréquent qu'un signal se présente sous une forme inadaptée à sa transmission ou à son traitement. La modulation est le procédé permettant de transposer les caractéristiques de ce signal dans des domaines de fréquences où la propagation et le traitement sont possibles. La démodulation est l'opération inverse.

On s'intéresse ici aux signaux hertziens audio (ondes électromagnétiques) qui s'étalent sur la plage de fréquence  $f_{m1} = 300 \text{ Hz} \leq f_m \leq f_{m2} = 4,5 \text{ kHz}$ . Ces signaux correspondent à la conversion de signaux sonores de même fréquence audible par notre oreille qui peut percevoir ordinairement des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz.

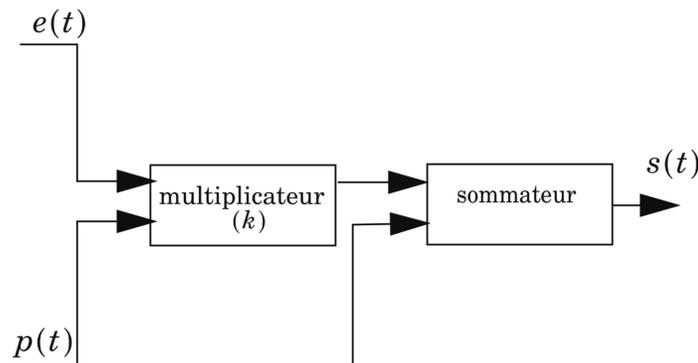
D'autre part, on peut montrer que la réception d'une onde électromagnétique nécessite une antenne dont la dimension caractéristique est une demi-longueur d'onde.

**Q.10** Quelle devrait être la taille d'une antenne permettant la réception des ondes considérés ? Cela vous semble-t-il réalisable ? Pourquoi est-il alors intéressant d'utiliser une autre fréquence ? Commenter l'intérêt de l'utilisation d'une autre fréquence si l'on veut émettre plusieurs ondes radios émanant de plusieurs stations.

Le signal à transporter est appelé signal modulant. Les méthodes de modulation sont élaborées à partir d'une onde sinusoïdale pure, appelée porteuse ou signal porteur. Le résultat de la combinaison de ces deux signaux s'appelle signal modulé. Le signal modulant est noté  $e(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$  et le signal porteur  $p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$  où  $f_m$  est la fréquence du signal modulant et  $f_p \gg f_m$  la fréquence du signal porteur. Le signal modulé en amplitude est un signal de la forme :

$$s(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) (1 + m \cos(2\pi f_m t))$$

où  $m$  est un réel strictement positif. Ce signal modulé a été obtenu en réalisant les opérations représentées dans le schéma bloc de la figure ci-dessous.



**Q.11** Montrer que ce schéma bloc permet effectivement d'obtenir le signal modulé. Donner l'expression de  $m$  en fonction de la constante de multiplication  $k$  et de  $A_m$ .

Dans toute la suite, on considère  $m < 1$ . On rappelle que le spectre d'un signal désigne la représentation de l'amplitude des signaux sinusoïdaux qu'il contient en fonction de leur fréquence respective.

**Q.12** On a réalisé en laboratoire l'enregistrement d'un signal modulé. Le résultat est donné en annexe. Préciser sur la figure en annexe (à rendre avec la copie) les valeurs des fréquences  $f_m$  et  $f_p$ , les expressions et valeurs particulières de  $s(t)$  marquées d'un point d'interrogation et on déterminera la valeur de  $m$ .

**Q.13** Réécrire le signal en le linéarisant (c'est-à-dire en le mettant sous la forme d'une somme de cosinus). Quelles fréquences contient ce signal ?

**Q.14** Représenter l'allure de son spectre.

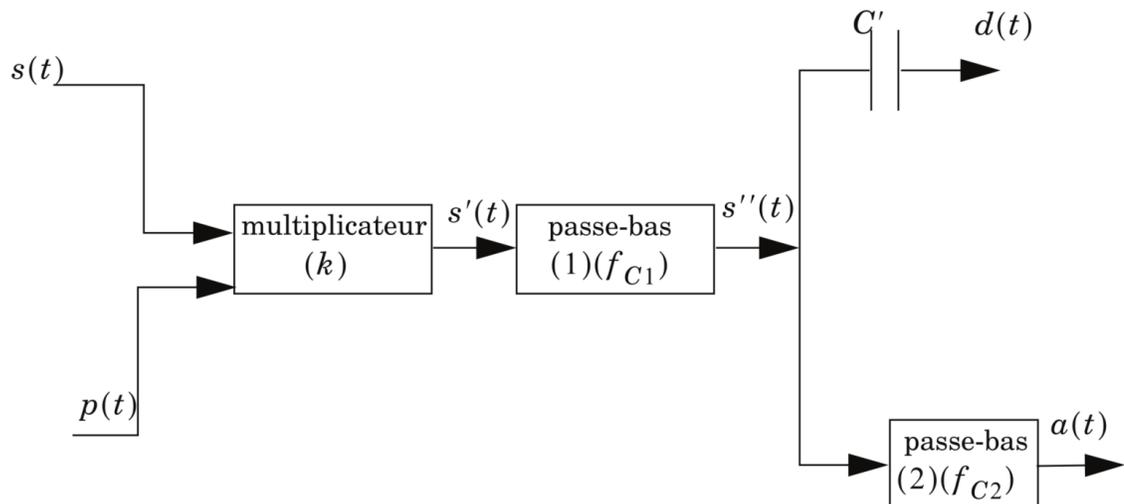
En pratique, on utilise un signal modulant qui est une somme de signaux sinusoïdaux qui encombrant la plage de fréquence  $f_{m1} = 300 \text{ Hz} \leq f_m \leq f_{m2} = 4,5 \text{ kHz}$ . La porteuse utilisée est de fréquence  $f_p = 185 \text{ kHz}$ .

**Q.15** Quelle est la nature du filtre nécessaire à la transmission intégrale du signal modulé ? Quelle doit être sa bande passante ?

**Q.16** Compte tenu de ce qui précède, montrer l'intérêt de la modulation effectuée.

#### 4) Démodulation synchrone

Le signal modulé qui est détecté par le récepteur est toujours noté  $s(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) (1 + m \cos(2\pi f_m t))$ . On suppose que l'on dispose, à la réception de ce signal, d'un générateur délivrant un signal  $p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$  identique au signal porteur utilisé lors de l'émission. La figure ci-dessous représente le principe de fonctionnement du circuit de démodulation situé en sortie de l'antenne réceptrice.



**Q.17** Donner l'expression du signal  $s'(t)$  obtenu à la sortie du multiplicateur. Le linéariser et représenter son spectre.

**Q.18** On souhaite, uniquement pour cette question, utiliser le filtre étudié au début de cet exercice à la place du filtre (1). Le cahier des charges impose une atténuation de 80dB pour les signaux de fréquences  $2f_p$

par rapport aux signaux de fréquence  $f_0$ . Justifier cette contrainte et calculer  $\omega_0$  et  $L$  pour respecter le cahier des charges. On prendra  $C = 1,00 \text{ nF}$  et  $f_p = 185 \text{ kHz}$ .

Le filtre passe-bas (1) a une fréquence de coupure  $f_{C1}$  telle que  $f_m < f_{C1} < f_p$  et le filtre passe-bas (2) une fréquence de coupure  $f_{C2} < f_m$ . Dans la suite, on suppose que les filtres (1) et (2) sont parfaits, c'est-à-dire que chaque filtre admet un gain de 1 pour des fréquences inférieures à sa fréquence de coupure et un gain nul pour toute fréquence supérieure à sa fréquence de coupure.

**Q.19** Déterminer l'expression du signal  $s''(t)$ .

**Q.20** À quoi sert le condensateur de capacité  $C'$  représenté sur le schéma bloc ? Donner alors l'expression du signal  $d(t)$ .

**Q.21** Exprimer le signal  $a(t)$  obtenu à la sortie du filtre (2).

**Q.22** Comment reconstituer le signal  $e(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$  à partir des signaux  $a(t)$  et  $d(t)$  ?

• • • **FIN** • • •