Correction du DS1

Exercice 1 : Modulation et démodulation (d'après Centrale TSI 2010)

Q.1 Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert en basse fréquence, la bobine comme un fil. La tension de sortie dans ce cas est environ la tension d'entrée.

Q.2 En haute fréquences, le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert. La tension de sortie est nulle dans ce cas limite.

Q.3 Il s'agit donc d'un filtre passe bas.

Q.4 L'association parallèle RC est un dipôle d'impédance équivalente : $\underline{Z}_{eq} = \dfrac{R}{1 + jRC\omega}$. Le pont diviseur de tension mène à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + jL\omega}$$

On obtient bien la forme proposée dans l'énoncé avec $H_0 = 1$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\lambda = \dfrac{1}{2R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Q.5 On a $V_{sm} = |\underline{H}|V_{em}$.

Q.6 On a $\varphi_s = \varphi + \varphi_e$.

Q.7 D'après ce qui précède, on calcule le module de la fonction de transfert, ce qui donne :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

ce qui conduit bien au résultat.

Q.8 Le diagramme de Bode en gain est caractéristique d'un filtre passe-bas du second ordre, sans résonance. La pente en haute fréquence est de -40dB/dec et la pulsation de coupure à -3dB est ω_0.

Q.9 Le diagramme de Bode en phase présente une asymptote à 0 en basse fréquence et à $-\pi$ en haute fréquence.

Q.10 Une antenne demi-onde aurait une taille comprise entre 33 et 500 km : c'est irréalisable ! Il faut une porteuse de fréquence beaucoup plus grande, donc de longueur d'onde plus petite pour pouvoir utiliser des antennes de taille raisonnable. Choisir une porteuse de fréquence très grande devant la fréquence du signal modulant permet d'éviter le brouillage des signaux.

Q.11 D'après le schéma-bloc : $s(t) = p(t) + kp(t)e(t) = A_p\Big(1 + kA_m\cos(2\pi f_m t)\Big)\cos(2\pi f_p t)$. On pose $m = kA_m$.

Q.12 La courbe est une sinusoïde de période T_p, dont l'amplitude varie avec une période plus importante T_m. On lit sur le graphe $T_p = 5\,\mu s$ d'où $f_p = 200\,\text{kHz}$ puis $T_m = 250\,\mu s$ d'où $f_m = 4\,\text{kHz}$.

L'amplitude du signal varie entre $A_p(1+m) = 2{,}7\,\text{V}$ et $A_p(1-m) = 1{,}6\,\text{V}$ d'où $A_p = 2{,}1\,\text{V}$ puis $m = 0,26$.

Q.13 En utilisant $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$, il vient :

$$s(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) + A_p \frac{m}{2} \cos(2\pi(f_p + f_m)t) + A_p \frac{m}{2} cos(2\pi(f_p - f_m)t)$$

Ce signal contient les fréquences f_p, $f_p + f_m$ et $f_p - f_m$.

Q.14

Q.15 La bande passante d'un filtre nécessaire à la transmission intégrale du signal $s(t)$ est donc

$$[f_p - f_{m2}; f_p + f_{m2}]$$

soit $[180{,}5\,\text{kHz}; 189{,}5\,\text{kHz}]$. Il s'agit d'un filtre passe-bande de facteur de qualité $Q = \frac{f_p}{\Delta f} \simeq 20$.

Q.16 La bande passante est assez étroite pour que les différents signaux modulants puissent être récupérés par une même antenne.

Q.17 On obtient d'après le schéma-bloc :

$$\begin{aligned}
s'(t) &= kp(t)s(t) \\
&= kA_p \cos(2\pi f_p t)\Big(A_p \cos(2\pi f_p t) + A_p \frac{m}{2} \cos(2\pi(f_p + f_m)t) + A_p \frac{m}{2} cos(2\pi(f_p - f_m)t)\Big) \\
&= k\frac{A_p^2}{2}\Big(1 + \cos(4\pi f_p t) + \frac{m}{2}\cos(2\pi(2f_p + f_m)t) + m\cos(2\pi f_m t) + \frac{m}{2}\cos(2\pi(2f_p - fm)t)\Big)
\end{aligned}$$

Ce signal contient une composante continue et les fréquences f_m, $2f_p$, $2f_p - f_m$ et $2f_p + f_m$.

Q.18 Le fait d'avoir une atténuation de 80dB permet de supprimer complètement les fréquences proches de la porteuse. De plus, le filtre est du second ordre et l'écart entre f_m et f_p est de deux décades environ, donc il est préférable de ne pas couper d'avantage le signal porteur, au risque d'attenuer le signal modulant.
On veut $G_{dB}(2f_p) = -80\text{dB} = 40\log\left(\frac{f_0}{2f_p}\right)$ d'où $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 0,02 f_p$. Finalement, on obtient $\omega_0 = 2{,}5 \times 10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $L = 1{,}85\,\text{H}$.

Q.19 Le filtre passe-bas (1) élimine les 3 fréquences autour de la porteuse, il reste donc la composante continue et l'harmonique à f_m :

$$s''(t) = k\frac{A_p^2}{2}\Big(1 + m\cos(2\pi f_m t)\Big)$$

Q.20 Le condensateur C' élimine la composante continue, soit $d(t) = k\frac{mA_p^2}{2} cos(2\pi f_m t)$.

Q.21 Le filtre passe-bas (2) élimine l'harmonique à f_m donc $a(t) = k\frac{A_p^2}{2}$.

Q.22 La fréquence de $d(t)$ est f_m et le rapport des amplitudes de $d(t)$ et $a(t)$ est $m = kA_m$. L'analyse de ces deux signaux permet donc de reconstituer le signal modulant $e(t) = A_m cos(2\pi f_m t)$.

• • • FIN • • •