

Essentiels de MPSI

Induction – Forces de Laplace

1 - Notion de champ magnétique

Le champ magnétique en un point M , noté $\vec{B}(M)$ se définit par son action sur une particule ponctuelle de charge q qui passe au point M , animée d'une vitesse \vec{v} : elle subit de la part du champ magnétique la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}(M)$$

Ce champ magnétique s'exprime en Tesla, avec $1 \text{ T} = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$. Un champ magnétique est créé par un aimant ou bien par un circuit parcouru par un courant électrique.

★ Définitions

- Une ligne de champ d'un champ vectoriel \vec{A} est une ligne qui est tangente au vecteur $\vec{A}(M)$ en chacun de ses point M .
- Un champ est dit stationnaire quand, en tout point M , il a la même valeur à tout instant : il ne dépend pas du temps t .
- Un champ est dit uniforme quand, à tout instant t , il a la même valeur en tout point M .

Le moment magnétique d'une spire plane de surface S et parcourue par un courant I se définit par :

$$\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S} = IS\vec{n}$$

avec \vec{n} le vecteur unitaire dont la direction est orthogonale au plan de la spire et dont le sens est lié au sens conventionnel positif du courant par la règle de la main droite. La norme du moment magnétique s'exprime en $\text{A} \cdot \text{m}^2$.

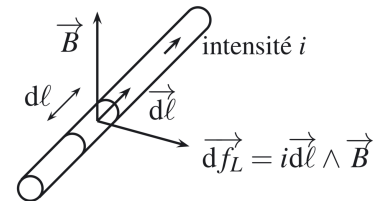
Remarques :

- ① Le moment magnétique d'une bobine (assimilée à un ensemble de spires) est la somme vectorielle des moments magnétiques des spires.
- ② La notion de moment magnétique s'applique aussi aux aimants : l'aimantation d'un aimant est le moment magnétique par unité de volume et s'exprime donc en $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$.

2 - Actions d'un champ magnétique

On cherche à caractériser l'action d'un champ magnétique extérieur sur un circuit électrique parcouru par un courant i . Le champ magnétique n'étant pas nécessairement constant sur tout le circuit, on commence par déterminer la force élémentaire subie par un élément infinitésimal $d\vec{\ell}$ de ce circuit. Cette force élémentaire, appelée **force de Laplace élémentaire**, est donnée par :

$$d\vec{f}_L = dq\vec{v} \wedge \vec{B} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$



Remarques :

- ① Attention, la vitesse qui apparaît dans cette expression n'est pas la vitesse du conducteur, mais la vitesse des porteurs de charge dans celui-ci. Par définition $i = \frac{dq}{dt}$ et comme $d\vec{\ell} = \vec{v}dt$, il vient bien $i d\vec{\ell} = dq\vec{v}$.
- ② On entend par champ magnétique extérieur que ce champ n'est pas créé par le courant passant dans le circuit étudié mais par un dispositif extérieur, non étudié.

a. Cas d'une barre en translation

Un tronçon de conducteur rectiligne MN parcouru par un courant d'intensité i , comptée positivement de M vers N , et plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme \vec{B} subit la **force de Laplace** :

$$\vec{f}_L = i\vec{MN} \wedge \vec{B}$$

Si le tronçon MN a un mouvement de translation de vitesse \vec{V} dans un référentiel \mathcal{R} , la puissance de la force de Laplace dans ce référentiel est :

$$\mathcal{P}(\vec{f}_L) = \vec{f}_L \cdot \vec{V}$$

Remarques :

- ① La force de Laplace se calcule en additionnant les forces élémentaires sur tous les éléments infinitésimaux entre M et N
- ② La norme de cette force est proportionnelle à l'intensité du courant et à la norme du champ magnétique. La force change de sens si le courant change de sens, ou si le champ magnétique change de sens.
- ③ La puissance de la force de Laplace n'est pas nécessairement nulle (à l'inverse de la force de Lorentz) : cette force peut apporter ou prendre de l'énergie à un conducteur parcouru par un courant électrique en mouvement dans un champ magnétique.

b. Cas d'une spire en rotation

Une spire de conducteur caractérisée par son moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ et plongée dans un champ magnétique extérieur uniforme \vec{B} subit le **couple de Laplace** :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

Si la spire est en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ dans un référentiel \mathcal{R} , la puissance de l'action mécanique de Laplace dans ce référentiel est :

$$\mathcal{P}_L = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{\Omega}$$

Remarques :

- ① L'expression de ce couple s'obtient en considérant une spire rectangulaire et en calculant le moment de la force de Laplace sur chaque tronçon de spire.
- ② Ce couple change de sens si le courant i change de sens ou si le champ magnétique change de sens. Il tend à aligner le vecteur surface de la spire avec le champ magnétique.
- ③ Par analogie entre les spires et les aimants, le couple magnétique exercé par un champ magnétique extérieur \vec{B} sur un aimant de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ tend à aligner le vecteur $\vec{\mathcal{M}}$ sur le vecteur \vec{B} .

3 - Lois de l'induction

Soit une spire plane de forme quelconque placée dans un champ magnétique uniforme \vec{B} . On suppose qu'un sens positif conventionnel pour le courant circulant dans la spire a été choisi. Par définition, le **flux magnétique** traversant la spire est :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

avec \vec{S} le vecteur surface de la spire. Le flux magnétique est une grandeur algébrique : son signe dépend du choix d'orientation de la spire et il est changé en son opposé si le champ magnétique change de sens. Il est positif si les vecteurs \vec{B} et \vec{S} sont dans le même sens.

Remarques :

- ① Le flux magnétique à travers une bobine est égal à la somme des flux magnétiques à travers chacune de ses spires.
- ② Un flux magnétique s'exprime en Weber, de symbole Wb avec $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$

Loi de Faraday :

Une variation du flux magnétique Φ à travers un circuit provoque l'apparition d'un courant induit dans celui-ci. Ce courant induit est égal à celui que produit un générateur fictif dont la force électromotrice e , appelée force électromotrice induite (f.é.m. induite), est donnée par la formule :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Remarques :

- ① La f.é.m. induite e est comptée positive dans le sens conventionnel positif du courant (convention générateur).
- ② La condition pour voir un phénomène d'induction dans un circuit est que le champ magnétique «traversant le circuit» varie dans le temps. Cette variation peut avoir deux causes :
 - le circuit est plongé dans un champ magnétique variable,
 - le circuit se déplace dans un champ magnétique.
- ③ Dans le cas d'un conducteur en mouvement dans un champ magnétique, la loi de Faraday est valable si :
 - le conducteur constitue un circuit à travers lequel le flux magnétique est défini à chaque instant,
 - le conducteur coupe des lignes de champ magnétique dans son mouvement.

Loi de Lenz :

C'est une loi empirique qualitative qui indique que les phénomènes d'induction s'opposent, par leurs effets, aux causes qui leur ont donné naissance.

4 - Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps

★ **Auto-induction** : Un circuit filiforme parcouru par un courant d'intensité i crée un champ magnétique \vec{B} . Ce champ magnétique traverse le circuit qui lui a donné naissance et crée donc un flux magnétique à travers ce circuit, appelé flux propre et noté Φ_p .

Le **flux propre** à travers un circuit est le flux du champ magnétique qu'il crée lui-même, il s'écrit :

$$\Phi_p = L i$$

où i est l'intensité du courant dans le circuit et L le coefficient d'auto-induction ou inductance propre.

Remarques :

- ① L'unité d'inductance est le henry, noté H.
- ② Une auto-inductance est toujours positive.
- ③ Si l'intensité du courant traversant le circuit varie dans le temps, le flux propre varie et il apparaît donc une force électromotrice auto-induite, notée $e_p(t) = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -L\frac{di}{dt}$ (si L ne dépend pas du temps).
- ④ Pour tenir compte de ce phénomène d'auto-induction, on ajoute soit un générateur de f.e.m égale à e_p (convention générateur) soit une inductance avec une tension à ses bornes $u_L = -e_p$ (convention récepteur).



- ⑤ Ces résultats sont cohérents avec la loi de modération de Lenz. Supposons, par exemple, qu'un générateur impose une intensité croissante dans le circuit : $\frac{di}{dt} > 0$. Dans ce cas, $e_p(t) < 0$ et d'après le schéma électrique précédent, cette f.é.m. induite négative s'oppose à l'augmentation du courant.
- ⑥ **Méthode** : pour effectuer un bilan de puissance sur les systèmes électriques, on applique la loi des mailles que l'on multiplie par $i(t)$. L'énergie magnétique stockée dans un circuit d'auto-inductance L et parcourue par un courant d'intensité i s'écrit $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$.

★ **Induction mutuelle** : Un premier circuit (circuit 1) parcouru par un courant d'intensité i_1 crée un champ magnétique \vec{B}_1 . Un deuxième circuit (circuit 2) est disposé dans le champ \vec{B}_1 , dont il intercepte des lignes de champ de sorte que le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ de \vec{B}_1 à travers le circuit 2 soit non nul. De même, si le circuit 2 est parcouru par un courant i_2 , il crée un champ magnétique \vec{B}_2 qui a un flux non nul $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ à travers le circuit 1.

Les flux magnétiques envoyés réciproquement l'un à travers l'autre des deux circuits sont donnés par les formules :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{1 \rightarrow 2}i_1 \quad \text{et} \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{2 \rightarrow 1}i_2$$

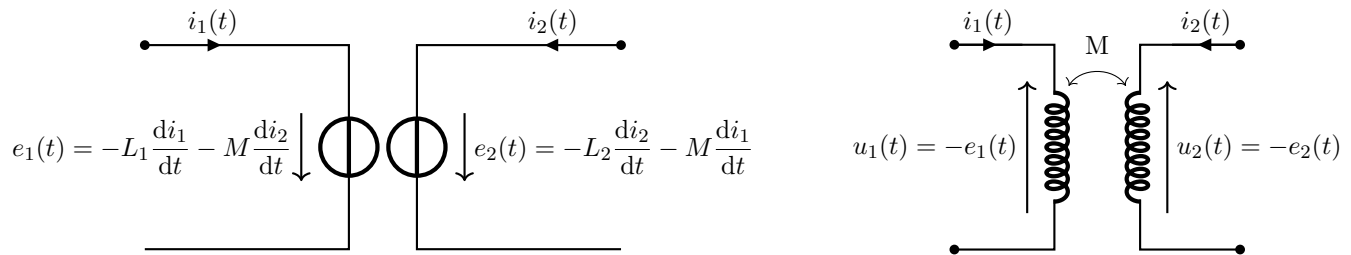
où $M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = M$ est le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux circuits. Ce coefficient s'exprime en henry (H).

Remarques :

- ① Le signe de l'inductance mutuelle est arbitraire, il dépend des orientations des deux circuits.
- ② Si deux circuits 1 et 2 sont couplés par mutuelle induction (le coefficient de mutuelle induction est non nul), dès qu'il existe un courant variable dans au moins un des deux circuits, il y a des f.é.m. induites dans les deux circuits. Ces f.e.m sont, pour chaque circuit, la résultante de la variation du flux propre et du flux envoyé par l'autre circuit. Pour le circuit 1 par exemple :

$$e_1(t) = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d(\Phi_{1,p} + \Phi_{2 \rightarrow 1})}{dt} = -L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$

- ③ Pour tenir compte de ce phénomène d'induction mutuelle, on ajoute soit des générateurs de f.e.m égale à e_1 ou e_2 (convention générateur) soit des inductances avec des tensions à leurs bornes $u_1 = -e_1$ ou $u_2 = -e_2$ (convention récepteur).



- ④ Ce phénomène d'induction mutuelle est à la base du principe de fonctionnement des transformateurs électriques et du chauffage par induction.

5 - Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Il n'y a pas de résultat général à connaître dans cette partie puisque tout dépend des conventions d'orientation. En revanche, il faut connaître la méthode de résolution de ce type de système :

Lorsqu'un système électrique et un système mécanique sont couplés par un phénomène d'induction, on parle de **système électromécanique**. La méthode de résolution est la suivante :

1. analyse qualitative des phénomènes et exploitation de la loi de Lenz ;
2. définition des conventions d'algébrisation : choix d'un repère d'espace et d'un sens conventionnel positif pour le courant dans le circuit ;
3. identification des inconnues : en général coordonnée spatiale (ou vitesse) et intensité dans le circuit ;
4. calcul de la f.é.m. induite dans le circuit par la loi de Faraday et écriture de la loi des mailles pour obtenir l'équation électrique ;
5. calcul de l'action de Laplace sur le conducteur mobile et application d'une loi mécanique (loi de la quantité de mouvement ou loi du moment cinétique) pour obtenir l'équation mécanique ;
6. résolution du système différentiel à deux fonctions inconnues formé par les équations électrique et mécanique ;
7. bilan d'énergie : multiplier l'équation électrique par $i(t)$ et l'équation mécanique par $v(t)$.

Remarque : Ce type d'induction est utilisé pour décrire l'expérience des rails de Laplace (moteurs ou récepteurs), le haut parleur électrodynamique, le freinage par induction, les alternateurs et toutes les machines à courant continu (moteurs) et revêt donc une grande importance pratique.