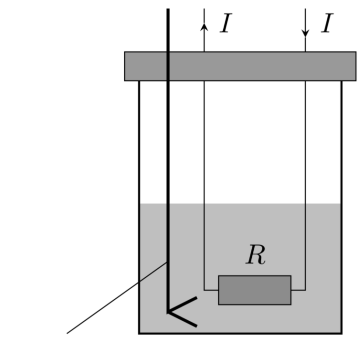
DM 2
Thermodynamique, transferts thermiques

Exercice 1 : Étude d'un calorimètre

Un calorimètre est constitué d'une enceinte dans laquelle sont placés des accessoires comme un agitateur (A) et une résistance électrique R reliée à un circuit extérieur, permettant d'y faire circuler un courant électrique. On désigne par C la capacité thermique totale de ces accessoires. L'agitateur permet d'homogénéiser la température Θ (en °C) du contenu de l'enceinte.



Toutes les phases condensées sont supposées idéales. On néglige la capacité thermique de l'air enfermé dans le calorimètre devant celle de l'eau et des accessoires. On donne la capacité thermique massique de l'eau liquide, supposée constante :

$$c_{eau} = 4{,}18 \times 10^3\,\mathrm{J \cdot kg \cdot K^{-1}}$$

Le calorimètre contient initialement une masse $m_1 = 95\,\mathrm{g}$ d'eau liquide et le dispositif est en équilibre thermique à la température $\Theta_1 = 20\,°\mathrm{C}$. On suppose dans un premier temps que le calorimètre est parfait, c'est à dire que ses parois sont adiabatiques. Aucun courant ne circule dans la résistance. Après avoir ajouté une masse $m_2 = 71\,\mathrm{g}$ d'eau à la température $\Theta_2 = 50\,°\mathrm{C}$, on constate que la température finale du dispositif se stabilise à $\Theta_f = 31{,}3\,°\mathrm{C}$.

Q.1 À l'aide du premier principe, déterminer C en fonction m_1, m_2, Θ_1, Θ_2, Θ_f et c_{eau}. En déduire la valeur en eau μ du calorimètre, définie par $C = \mu c_{eau}$. Faire l'application numérique.

Le calorimètre est entièrement vidé de l'eau qu'il contient et on y introduit une masse $m_0 = 83\,\mathrm{g}$ d'éthanol de capacité thermique massique c_0. À partir de $t = 0$, on fait circuler un courant électrique d'intensité $I = 1{,}40\,\mathrm{A}$ constante dans la résistance $R = 5{,}0\,\Omega$ dont la valeur est indépendante de la température.

Q.2 Faire un bilan énergétique pendant l'intervalle de temps dt et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $\Theta(t)$.

Q.3 On constate que la température s'est élevée de $9{,}2\,°\mathrm{C}$ au bout de $\tau = 120\,\mathrm{s}$. En déduire la capacité thermique massique c_0 de l'éthanol.

En fait, le calorimètre n'est pas parfait et il faut tenir compte des "fuites thermiques". Entre les instants t et $t + dt$, le contenu du calorimètre échange avec le milieu extérieur une chaleur δQ pouvant s'écrire :

$$\delta Q = K\left(\Theta(t) - \Theta_a\right)\mathrm{d}t$$

où $K = 0{,}48\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot s^{-1}}$ est une constante, Θ la température dans l'enceinte à l'instant t et Θ_a la température de l'atmosphère extérieure, supposée constante. On suppose qu'à $t = 0$, $\Theta(0) = \Theta_1 = \Theta_a = 20\,°\mathrm{C}$.

Q.4 Comment est modifiée l'équation différentielle de la **Q.2** ?

Q.5 En déduire $\Theta(t)$ et en donner une représentation schématique en fonction du temps. Quelle est la température limite atteinte par le contenu de l'enceinte ? Faire l'application numérique.

Exercice 2 : Moteur thermique

Une mole d'air décrit un cycle moteur $1-2-3-4-5-1$ totalement réversible. Dans l'état 1, $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ et $P_1 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$. Le cycle est le suivant :

$1 \longrightarrow 2$: compression adiabatique avec $V_2 = V_1/10$

$2 \longrightarrow 3$: échauffement isochore avec $T_3 = 1190\,\mathrm{K}$

$3 \longrightarrow 4$: échauffement isobare avec $T_4 = 1500\,\mathrm{K}$

$4 \longrightarrow 5$: détente adiabatique

$5 \longrightarrow 1$: refroidissement isochore

On suppose que l'air est un gaz parfait d'exposant adiabatique $\gamma = 1,4$ constant. On donne la constante des gaz parfait : $R = 8{,}31\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$.

Q.1 Recopier et compléter, en justifiant, le tableau suivant (indiquer sur la copie les formules littérales pour ces grandeurs).

Grandeur	1	2	3	4	5
T (en K)	300		1190	1500	
P (en bar)	$1,0$				
V (en L)					

Q.2 Représenter ce cycle dans un diagramme de Clapeyron.

On appelle Q_1 la chaleur reçue par le gaz au cours d'un cycle ($Q_1 > 0$) et Q_2 la chaleur cédée par ce gaz au cours d'un cycle ($Q_2 < 0$).

Q.3 Déterminer Q_1 et Q_2. Faire le calcul littéral puis donner les valeurs numériques.

Q.4 Quel est le rendement r de ce moteur ? Faire l'application numérique. Comparer au rendement d'un moteur ditherme réversible fonctionnant entre deux sources de chaleur de température T_1 et T_4.

Exercice 3 : Évolution de la température dans un mur

On considère un mur de très grande épaisseur qu'on assimilera à un milieu semi-infini occupant le demi-espace $x > 0$. Ce mur est constitué d'un matériau de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c. On introduit la diffusivité thermique D de ce matériau, définie par :

$$D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

On ne considère que la seule variable d'espace x et on suppose qu'en $x = 0$, la température est de la forme $T(0,t) = T_0 + \Delta T\cos(\omega t)$. On note $T(x,t)$ la température à une profondeur x dans le mur et $\vec{j}(x,t)$ la densité de courant thermique associée.

Q.1 À l'aide d'un bilan énergétique sur une tranche élémentaire de section S et située entre x et $x + \mathrm{d}x$, déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$.

Q.2 On pose $\theta(x,t) = Re\left[\underline{\Theta}(x)e^{i\omega t}\right]$ où $\underline{\Theta}(x)$ est une fonction complexe de la variable réelle x, que l'on cherche à déterminer.

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\Theta}(x)$.

b) Montrer que la solution générale est :

$$\underline{\Theta}(x) = \underline{A}\exp\left((1+i)\frac{x}{\delta}\right) + \underline{B}\exp\left((1+i)\frac{x}{\delta}\right)$$

où δ est une constante à déterminer en fonction de ω et D et où $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont deux constantes complexes. Quelle est la dimension de δ ?

c) Compte tenu des conditions aux limites, déterminer les constantes A et B et en déduire la température $\theta(x,t)$ à l'intérieur du mur.

On applique le modèle précédent à l'étude de l'évolution journalière de la température dans le mur. On a relevé les amplitudes des oscillations de températures à différentes profondeurs :

Profondeur (cm)	0	12	20	30
Amplitude (°C)	$14,0$	$12,2$	$11,1$	$9,9$

Q.3 En déduire la valeur numérique du coefficient de diffusion thermique D du mur.