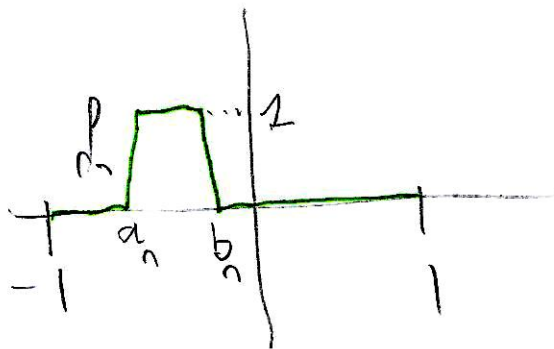


ct-ex cot et 7 C.S.
cot

①

on montre que $\text{val}(\{ \ln \cos n \}) = [-1, 1]$
(exo).



$$\begin{cases} \alpha_n = \ln(\cos n) \\ a_n = \min(\alpha_n, \alpha_{n+1}) \\ b_n = \max(\alpha_n, \alpha_{n+1}) \end{cases}$$

$$0 \leq N_1(f_n) \leq b_n - a_n \leq \ln(n+1) - \ln n \sim \frac{1}{n}$$

$$N_2(f_n) \leq \dots$$

donc $(f_n) \subset C, \cap$ et $C \cap Q / [-1, 1]$ r.m. 0

et $(f_n(x)) \rightarrow 0 \forall x \in [-1, 1]$

$(\forall N \exists n \geq N \mid a_n + \varepsilon < x < b_n - \varepsilon)$

dc $f_n(x) = 1$ et $f_{n+1}(x) = 0$

Si on pose $f_{n+1} - f_n = u_n$ et $f_0 = \exp$

$$f_n = \sum_{p=0}^{n-1} u_p + \exp \text{ donc}$$

$$\exp = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

pour N_1 et N_2

donc $(\sum u_n(x)) \rightarrow \exp$ donc $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ n'existe pas!

① bis

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \geq n \text{ et } \exists q \geq n$$



$$f_p(n) = 1 \quad \& \quad f_q(n) = 0$$

exercice 1

①

1) La fonction nulle de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}$ est continue, paire et 2π -périodique donc appartient à E

Soit $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est $C^0/\text{in } (\pi, \pi)$, clairement paire et 2π -périodique, donc $\lambda f + g \in E$

d'où E est un $\mathbb{R}$ -EV comme SEV de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2) $(\cdot | \cdot)$ est clairement symétrique bilinéaire et positive.

Soit $f \in E$ $(f | f) = 0$, par le th. de l'annule,

$\forall n \in [0, \pi) f(n) = 0$ et donc $\forall n \in [-\pi, 0]$;

$f(n) = \underset{\text{paire}}{f(-n)} = 0$ d'où f nulle sur $[-\pi, \pi]$.

Par périodicité : $\forall n \in \mathbb{R} : f(n) = 0$ soit $f = 0$

d'où : $(\cdot | \cdot)$ est un PS sur E

3) $\forall 0 \leq n < p$ $\omega(n) \cos(pt) = \frac{1}{2} (\omega(n+p)t + \omega(n-p)t)$,

donc $\int_0^\pi \omega(n)t \cos(pt) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\omega(n+p)t + \omega(n-p)t) dt$

comme $0 \leq n < p$, $n-p \neq 0$ et $n+p \geq 1$ donc $\neq 0$

$$\text{d'où } (c_n | c_p) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+p)t}{n+p} + \frac{\sin(n-p)t}{n-p} \right]_0^\pi = 0 \quad (2)$$

d'où $\left| (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \right.$ famille orthogonale

4) c'est la linéarisation :

$$(e^{it} + e^{-it})^k = \underbrace{e^{ikt} + k e^{i(k-2)t} + \dots + \dots + e^{-ikt}}$$

$\forall k \quad (t \mapsto \cos^k t) \in \text{Vect}(c_0, \dots, c_k)$ p.v.s C.L.

5) Analyse: $|f(t) - \sum_{k=0}^n \lambda_k \cos^k t| \leq \epsilon$

$|f(t) - p(\cos t)| \leq \epsilon$ avec la 4)

on revient à S.W. avec $\begin{cases} u = \cos t \in [-1, 1] \\ t \in [0, \pi] \end{cases}$
 $\hookrightarrow t = \arccos u$

$\rightarrow |f(\arccos u) - p(u)| \leq \epsilon$

Synthèse polynôme $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$u \mapsto f(\arccos u)$

$g \in C^0([-1, 1])$ (TG), $\exists p \in \mathbb{R}[X] \setminus \|g - p\|_{\infty, [-1, 1]} < \epsilon$

Donc $\forall u \in [-1, 1] : |f(\arccos u) - p(u)| \leq \varepsilon$ ③

d'où $\forall t \in [0, \pi] : |f(\underbrace{\arccos(\cos t)}_{\substack{= \\ t}}) - p(\cos t)| \leq \varepsilon$

par parité et 2π -périodicité, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} : |f(t) - p(\cos t)| \leq \varepsilon$$

Avec le 4°) $\exists \mathcal{P} : t \mapsto \sum \lambda_k \cos kt \setminus$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad p(\cos t) = \mathcal{P}(t)$$

d'où le résultat qui s'appelle S. W. T.



6) Posons $e_n = \frac{c_n}{\|c_n\|}$ ($c_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$)

④

On a $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ famille o.t.n.

Montrons qu'elle est totale

Posons $F = \text{vect}(\{e_n, n \in \mathbb{N}\})$, on a $F = \text{vect}(\{c_n, n \in \mathbb{N}\})$

Le théorème de S.W. trigonométrique^{5°)} assure que : $\forall \varepsilon > 0$,

$$\forall f \in E, \exists p \in F \mid \|f - p\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \varepsilon$$

$$\text{On } \|f - p\|_2^2 = \int_0^\pi (f - p)^2 \leq \pi \|f - p\|_{\infty, [0, \pi]}^2 \leq \pi \varepsilon^2$$

En prenant, au départ $\|f - p\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}$, on a

$$\|f - p\|_2 \leq \varepsilon$$

On a donc $\forall f \in E, \forall \varepsilon > 0 \exists p \in F \mid \|f - p\|_2 \leq \varepsilon$

ce qui veut dire F dense ds E (pour $\|_2$)

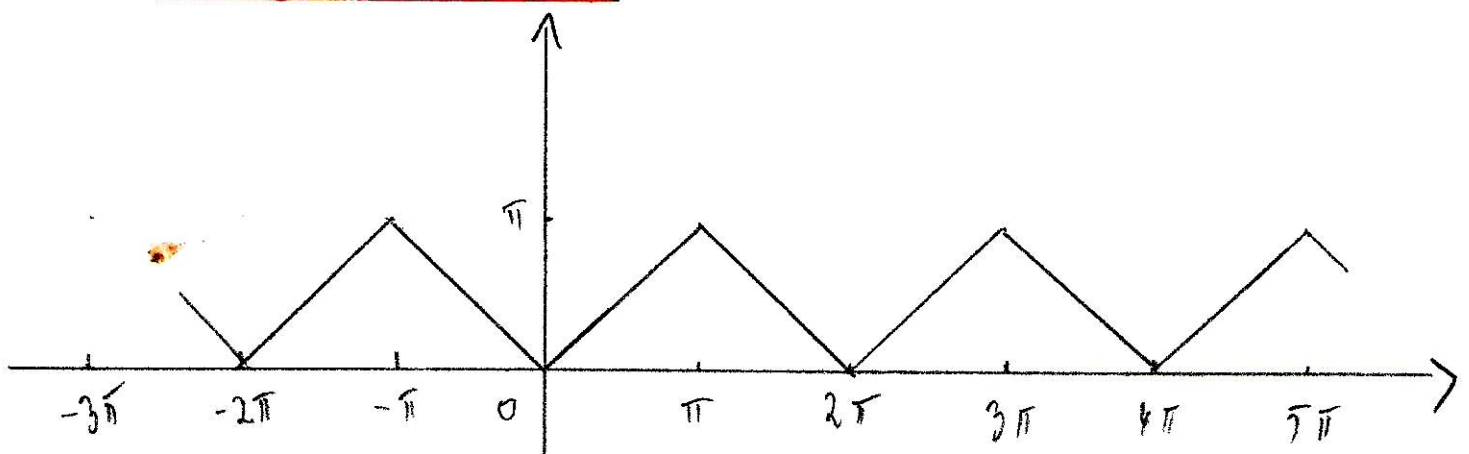
2°: $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ famille OTN totale de E

⑤

7) a) $f(20) = f(20 - 2\pi) = f(20 - 4\pi) = f(20 - 6\pi)$

et $20 - 6\pi \simeq 1,15 \dots$ donc $20 - 6\pi \in [-\pi, \pi]$, d'où

$$f(20) = 20 - 6\pi$$



Le cours assure que $f = \sum_{n=0}^{\infty} (f|e_n) e_n$

Donc on a: $f = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} u \cos(nu) du \right) \frac{e_n}{\|e_n\|}$

* $\|e_0\|^2 = \int_0^{\pi} 1^2 dt = \pi$ donc $\|e_0\| = \sqrt{\pi}$

* $\|e_n\|^2 = \int_0^{\pi} \cos^2 n t dt = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2nt + 1}{2} dt = \frac{\pi}{2}, \quad \|e_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
 $\forall n \geq 1$

$$* \int_0^\pi u \cos u \, du = \frac{\pi^2}{2}$$

↙ nul en π et en 0

(6)

$$* \int_0^\pi u \cos n u \, du = \underset{\text{ipp}}{\left[u \frac{\sin n u}{n} \right]_0^\pi} - \int_0^\pi \frac{\sin n u}{n} \, du$$

$$= \left[\frac{\cos n u}{n^2} \right]_0^\pi = \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{2}{(2p+1)^2} & \text{si } n=2p+1 \end{cases}$$

Cgs :

$$f = \frac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{\pi (2p+1)^2} c_{2p+1}$$

égalité ds $(E, \|\cdot\|_2)$

Montrons que $\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{\pi (2p+1)^2} \cos(2p+1)t$

Posons $\left| \begin{array}{l} u_p(t) = \frac{4}{\pi (2p+1)^2} \cos(2p+1)t \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$ et $u_0(t) = \frac{\pi}{2}$

on a $\forall n \geq 1, \forall t \in \mathbb{R} \quad |u_p(t)| \leq \frac{4}{\pi (2p+1)^2} = \alpha_p$

Comme $\alpha_p = O\left(\frac{1}{p^2}\right)$, $\frac{1}{p^2} \geq 0$ et $(\sum \alpha_p) < \infty$, $(\sum \alpha_p) < \infty$ par TC

donc $\underline{(\sum u_p)} \subset C.N. / \mathbb{R}$, d'où $\underline{(\sum u_p)} \subset C.S. / \mathbb{R}$.

Comme u_p est C^0 sur $\mathbb{R}$, par théorème de continuité, la fonction g définie par :

$$g(t) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p(t) \text{ est } C^0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

D'autre part, comme u_p est 2π -périodique et paire, g est aussi 2π -périodique et paire.

On a donc $g \in E$.

Posons $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

- On sait que (S_n) cvg vers f pour $\|_2$
- On sait que (S_n) C.V. vers g sur $\mathbb{R}$ car $(\sum u_p) \text{ C.V. } /_{\mathbb{R}}$
- Comme S_n et g sont dans E , on peut écrire :

$$\|S_n - g\|_2 = 0, \quad 0 \leq \|S_n - g\|_2 \leq \sqrt{n} \|S_n - g\|_{\infty, [0, \pi]}.$$

$\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow$
 $\quad \quad \delta \quad \quad n \rightarrow \infty$

Donc (S_n) cvg vers g aussi pour $\|_2$.

Par unicité de la limite de l'esp. $(E, \|_2)$, on a :

$f = g$ d'où (S_n) c.v. sur $\mathbb{R}$ vers f ⑧

C_9 : on a $\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)^2} \cos(2p+1)t$

Pour l'approximation uniforme sur $\mathbb{R} \approx 10^{-1}$ p.n.,

posons $R_n(t) = f(t) - \sum_{p=0}^n u_p(t)$, on a ;

$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1 : |R_n(t)| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{4/\pi}{(2p+1)^2} \quad \text{tout est ok Abs,}$

on peut utiliser la comparaison Σ - $\int$: $|R_n(t)| \leq \int_n^{\infty} \frac{4/\pi}{(2t+1)^2} dt$

ou utiliser la somme télescopique : $\frac{1}{(2p+1)^2} \leq \frac{1}{(2p+1)(2p-1)}$

Comme $\frac{1}{(2p+1)(2p-1)} = \frac{1/2}{2p-1} - \frac{1/2}{2p+1}$, on a ;

$\forall t \in \mathbb{R} : |R_n(t)| \leq \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2(n+1)-1} - 0 \right) = \frac{2}{\pi(2n+1)} = \varepsilon_n$

on $\varepsilon_n \leq 10^{-1} \Leftrightarrow n \geq \left(\frac{20}{\pi} - 1 \right) \frac{1}{2} \approx 2,68$, on

peut conclure ;

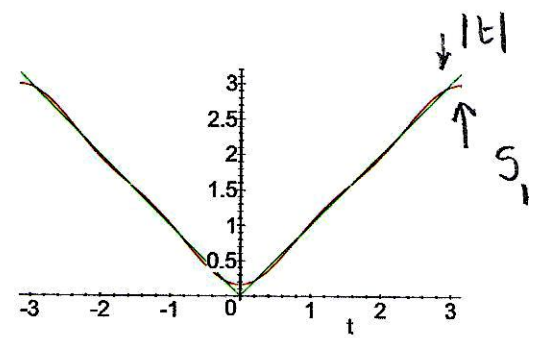
$\forall t \in \mathbb{R} : |f(t) - S_3(t)| \leq 10^{-1}$ et $S_3(t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^3 \frac{4 \cos(2p+1)t}{\pi(2p+1)^2}$

5

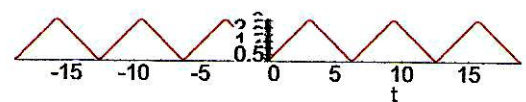
```
[ >
[ >
[ > S:=(n,t)->Pi/2-sum(4/Pi/(2*p+1)^2*cos((2*p+1)*t),p=0..n);
[ > plot({abs(t),S(1,t)},t=-Pi..Pi,scaling=constrained);
```

$$S:=(n,t) \rightarrow \frac{1}{2}\pi - \left(\sum_{p=0}^n \left(4 \frac{\cos((2p+1)t)}{\pi(2p+1)^2} \right) \right)$$

On définit
 $S_n(t)$



```
[ > plot({S(3,t)},t=-6*Pi..6*Pi,scaling=constrained);
```



tracé de
 S_3

```
[ >
[ > t:=1.2015;
[ > n:=5;evalf(S(n,t));
[ > n:=6;evalf(S(n,t));
[ > n:=7;evalf(S(n,t));
```

t:=1.2015

n:=5
1.196980650

n:=6
1.204485152

n:=7
1.200653859

= $S_n(t)$ avec $n=5$
 $t=1.2015$

idem

(10)

```
> n:=8;evalf(S(n,t));
```

```
n:=8
1.200676538
```

```
> n:=10;evalf(S(n,t));
```

```
n:=10
1.200164517
```

```
> n:=20;evalf(S(n,t));
```

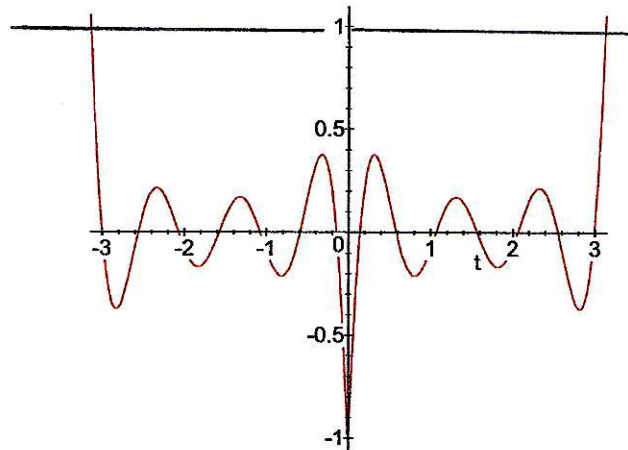
```
n:=20
1.201431174
```

```
> n:=100;evalf(S(n,t),25);
```

```
n:=100
1.201511959695480684178709
```

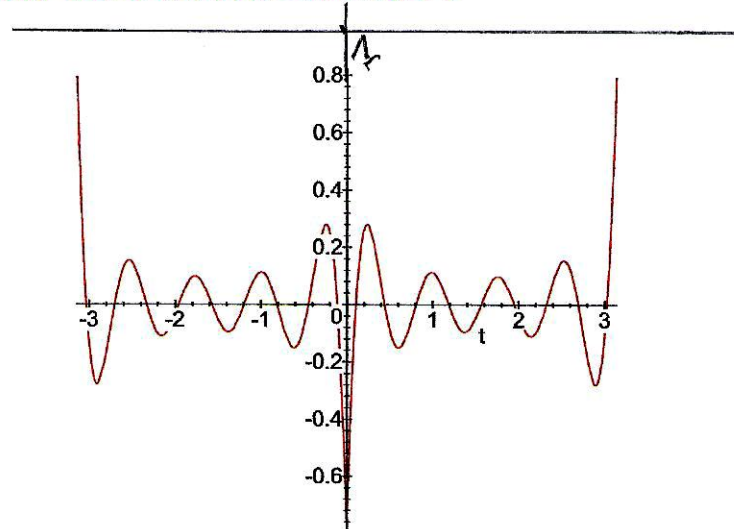
```
>
```

```
> plot({10*(abs(t)-S(2,t))},t=-Pi..Pi);
```



$|S_n(t) - |t|| \times 10$
 avec $n=2$;
 ça dépasse 1

```
> plot({10*(abs(t)-S(3,t))},t=-Pi..Pi);
```



idem.
 avec $n=3$;
 ça dépasse
 plus 1!

```
>
```


b) (Rappel) si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite OTN de E

(11)

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall f \in E \quad f = \underbrace{\sum_{n=0}^N (f|e_n) e_n}_{\in F_N} + \underbrace{h_N}_{\in F_N^\perp}, \quad F_N = \text{vect}(e_0, \dots, e_N)$$

$$\text{d'où (Pyth.)} \quad \left\| \sum_{n=0}^N (f|e_n) e_n \right\|^2 + \|h_N\|^2 = \|f\|^2 = \left\| f - \sum_{n=0}^N (f|e_n) e_n \right\|^2$$

$\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$

$$\text{cgs} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (f|e_n)^2 = \|f\|^2 \quad (\text{c'est la formule de Parseval})$$

Appliquons le à f d'ici :

$$\|f\|^2 = \int_0^\pi t^2 dt = \frac{\pi^3}{3}$$

$$(f|e_0)^2 = \frac{1}{\|e_0\|^2} (f|c_0)^2 = \frac{1}{\pi} \times \left(\frac{\pi^2}{2}\right)^2 \text{ cf page (4)}$$

$$\text{on a} \quad (f|e_n)^2 = \frac{1}{\|e_n\|^2} (f|c_n)^2 = \frac{2}{\pi} \times \left(\frac{-2}{(2p+1)^2}\right)^2 \quad \left. \begin{array}{l} p=0 \\ n=2p+1 \end{array} \right\} \quad p=1/2$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\pi^3}{4} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{4}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^3}{3}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$$

$$* \forall N \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^4} \quad (12)$$

tout est en tout est en $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ d'où $q \rightarrow \infty$:

$$\zeta(4) = \frac{1}{2^4} \zeta(4) + \frac{\pi^4}{96} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}}$$

* On prend $t=0$ dans l'expression de $i)$ (page 6) :

$$f(0) = \theta = \frac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{\pi (2p+1)^2}$$

$$\text{d'où} \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et comme ci-dessus}$$

$$\boxed{\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Remarque : en intégrant la rel. de la page 6 puis

$$\text{Passerai...} \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} \dots$$