Correction du DM 2

Exercice 1 : Étude d'un calorimètre

Q.1 On prend pour système tout le contenu du calorimètre. Comme ce contenu est composé de phases condensées idéale, donc de volume constant, il n'y a pas de travail des forces de pression. Comme les parois extérieures du système sont adiabatiques, le premier principe donne : $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_{cal} = 0$. On a donc :

$$m_1 c_{eau}(\Theta_f - \Theta_1) + m_2 c_{eau}(\Theta_f - \Theta_2) + C(\Theta_f - \Theta_1) = 0$$

d'où :

$$C = -c_{eau}\left(m_2 \frac{\Theta_f - \Theta_2}{\Theta_f - \Theta_1} + m_1\right) = \mu c_{eau}$$

L'application numérique donne $\mu = 22{,}5\,\mathrm{g}$.

Q.2 On applique le premier principe au contenu du calorimètre (sans la résistance) entre les instants t et $t + dt$:

$$dU = (m_0 c_0 + C)\mathrm{d}\Theta = \delta W_{el} = RI^2 \mathrm{d}t$$

donc :

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t} = \frac{RI^2}{m_0 c_0 + C}$$

Q.3 Cette équation s'intègre facilement en $\Theta(t) = \Theta(0) + \dfrac{RI^2}{m_0 c_0 + C} t$. D'après les données de l'énoncé, on a donc :

$$c_0 = \frac{1}{m_0}\left(\frac{RI^2 \tau}{\Delta\Theta} - \mu c_{eau}\right)$$

L'application numérique donne : $c_0 = 0{,}41\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$.

Q.4 Le premier principe appliqué au contenu du calorimètre (sans la résistance) entre les instants t et $t + dt$ donne maintenant :

$$dU = (m_0 c_0 + C)\mathrm{d}\Theta = \delta W_{el} - \delta Q = RI^2 \mathrm{d}t - K\left(\Theta(t) - \Theta_a\right)\mathrm{d}t$$

(ce transfert thermique est effectivement perdu par le système si sa température est supérieure à celle de l'air autour). L'équation différentielle devient donc :

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t} + \frac{K}{m_0 c_0 + C}\left(\Theta - \Theta_a\right) = \frac{RI^2}{m_0 c_0 + C}$$

Q.5 On peut poser $\tau_c = \dfrac{m_0 c_0 + C}{K}$ le temps caractéristique d'évolution du système. Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$\Theta(t) - \Theta_a = \frac{RI^2}{K} + Ae^{-t/\tau_c}$$

la constante A étant déterminée par les conditions initiale : $A = -\dfrac{RI^2}{K}$. Il vient finalement :

$$\Theta(t) = \Theta_a + \frac{RI^2}{K}\left(1 - e^{-t/\tau_c}\right)$$

La température limite est $\Theta_\infty = \Theta_a + \dfrac{RI^2}{K} \simeq 40{,}4\,°\mathrm{C}$.

Exercice 2 : Moteur thermique

Q.1 L'équation d'état du gaz parfait donne $V_1 = \dfrac{RT_1}{P_1} \simeq 25\,\mathrm{L}$.

La transformation $1-2$ est adiabatique réversible donc, d'après la loi de Laplace : $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ soit $T_2 = T_1\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \simeq 754\,\mathrm{K}$, puis $P_2 = 25\,\mathrm{bar}$ avec la loi des gaz parfaits.

La transformation $2-3$ est isochore donc $V_3 = V_2$ et $P_3 = \dfrac{RT_3}{V_3} = 39{,}7\,\mathrm{bar}$.

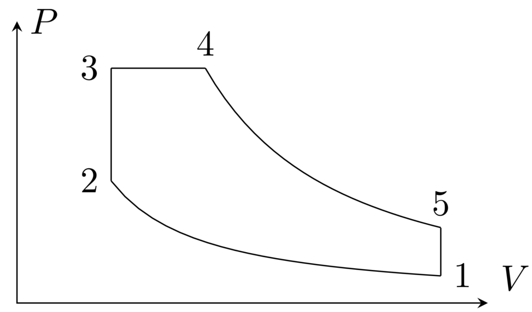
La transformation $3-4$ est isobare donc $P_4 = P_3$ d'où $V_4 = \dfrac{RT_4}{P_4} = 3{,}1\,\mathrm{L}$.

La transformation $4-5$ est adiabatique réversible avec $V_5 = V_1$ d'où : $T_5 = T_4\left(\dfrac{V_4}{V_5}\right)^{\gamma-1} \simeq 655\,\mathrm{K}$ puis $P_5 = \dfrac{RT_5}{V_5} = 2{,}18\,\mathrm{bar}$.

On en déduit finalement :

Grandeur	1	2	3	4	5
T (en K)	300	754	1190	1500	655
P (en bar)	$1,0$	25	40	40	$2,2$
V (en L)	25	$2,5$	$2,5$	$3,1$	25

Q.2 Voici l'allure du cycle :



Q.3 Les transferts thermiques sont effectivement recus lors des transformations isochore $2-3$ et isobare $3-4$. On a $Q_{23} = U_3 - U_2 = C_v(T_3 - T_2)$ et $Q_{34} = H_4 - H_3 = C_p(T_4 - T_3)$. Ainsi,

$$Q_1 = Q_{23} + Q_{34} = \frac{R}{\gamma - 1}(T_3 - T_2) + \frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_4 - T_3) \simeq 18{,}1\,\mathrm{kJ}$$

Les transferts thermiques sont effectivement cédés par le système lors de l'isochore $5-1$, donc

$$Q_2 = C_v(T_1 - T_5) = \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_5) \simeq -7{,}4\,\mathrm{kJ}$$

Q.4 Par définition du rendement du moteur, $r = -\frac{W}{Q_1}$. Le premier principe de la thermodynamique appliqué au moteur sur un cycle donne : $\Delta U = W + Q_1 + Q_2 = 0$, ce qui entraîne :

$$r = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} \simeq 0,6$$

Pour un moteur ditherme réversible, le rendement de Carnot s'écrit : $r_c = 1 - \frac{T_1}{T_4} \simeq 0,8$. On a donc $r < r_c$. La différence ne provient pas ici de l'irréversibilité du moteur étudié mais du fait qu'il ne soit pas ditherme.

Exercice 3 : Évolution de la température dans un mur

Q.1 Refaire la démonstration du cours ! On obtient : $\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$.

Q.2 a) En utilisant la notation complexe, on obtient : $\frac{\partial \left(\underline{\Theta} e^{i\omega t}\right)}{\partial t} = i\omega \underline{\Theta} e^{i\omega t}$ et $\frac{\partial^2 \left(\underline{\Theta} e^{i\omega t}\right)}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 \underline{\Theta}}{\mathrm{d}x^2} e^{i\omega t}$, soit l'équation différentielle :

$$\rho c i\omega \underline{\Theta} e^{i\omega t} - \lambda \frac{\mathrm{d}^2 \underline{\Theta}}{\mathrm{d}x^2} e^{i\omega t} = 0$$

que l'on peut réécrire :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \underline{\Theta}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{i\omega}{D} \underline{\Theta} = 0$$

b) Il s'agit d'une équation différentielle complexe du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique est : $r^2 - \frac{i\omega}{D} = 0$, de racines complexes $r_\pm = \pm\sqrt{\frac{i\omega}{D}} = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}} = \pm\frac{1+i}{\delta}$.

La solution générale est donc bien de la forme proposée avec $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$. δ s'exprime en mètre et représente la longueur caractéristique d'atténuation des oscillations.

c) La fonction complexe $\underline{\Theta}$ représente l'amplitude complexe des oscillations de température. Comme le mur est considéré infini, il faut que $\underline{B}$ soit nul pour éviter que la température ne diverge. La condition limite s'écrit alors $\underline{\Theta}(0) = \underline{A} = \Delta T$. On reprend les notations réelles, pour obtenir :

$$\theta(x,t) = Re\left[\Delta T \exp\left(-(1+i)\frac{x}{\delta}\right) e^{i\omega t}\right] = \Delta T \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

Q.3 L'amplitude α des oscillations à la profondeur x vaut $\alpha = \Delta T \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$, ce qui s'exprime encore :

$$\ln \alpha = \ln \Delta T - \frac{x}{\delta}$$

Une regression linéaire sur les différentes valeurs données conduit à un coefficient directeur $-\frac{1}{\delta} = -1,15681$. Pour des oscillations journalières, la période temporelle est de 1 jour = 86 400 s, ce qui donne une pulsation $\omega = 7{,}27 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. On en déduit donc que :

$$D = \frac{\omega \delta^2}{2} = 2{,}7 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$$