

DS 2 (4 heures)

Thermodynamique, Physique statistique

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Les résultats doivent être encadrés, la calculatrice est autorisée.

Les exercices sont complètement indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 : Capacité thermique des solides

Afin de pouvoir calculer la capacité thermique d'un solide, on utilise le modèle d'Einstein (établi en 1907). Dans le cas unidimensionnel, les atomes sont alignés selon un axe (par exemple Ox) et effectuent de petits mouvements de vibration autour de leurs positions d'équilibre respectives. Chaque atome se comporte comme un oscillateur harmonique de pulsation propre ω . En théorie quantique (voir en fin d'année), l'énergie d'un oscillateur harmonique est quantifiée et les différents niveaux d'énergie ont pour expression :

$$\varepsilon_k = \hbar\omega \left(k + \frac{1}{2} \right), \quad k \in \mathbb{N}$$

Le solide considéré ici est en équilibre thermique avec un thermostat à la température T .

Q.1 Exprimer la probabilité p_k pour qu'un atome soit dans l'état d'énergie ε_k .

Q.2 Montrer que l'énergie moyenne d'un atome est :

$$\bar{e} = \frac{\hbar\omega}{2} \coth \left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right)$$

($\coth$ est la cotangente hyperbolique). On donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\alpha n} = \frac{1}{4 \sinh^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \quad \text{pour } \alpha > 0$$

Q.3 Évaluer la capacité thermique molaire $C_{v,m}$ du solide.

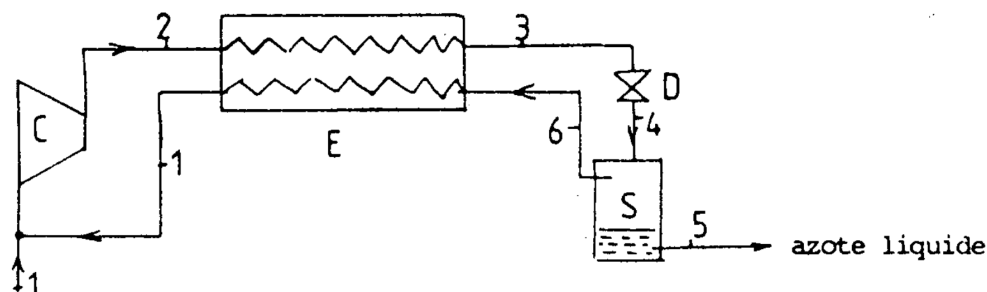
Q.4 Quelle est la limite de $C_{v,m}$ à haute température ? Quelle loi retrouve-t-on ?

Q.5 Quelle est la limite de $C_{v,m}$ à basse température ? Commenter.

Q.6 Tracer l'allure de $C_{v,m}$ en fonction de T .

Exercice 2 : Procédé Linde-Hampson pour la liquéfaction du diazote

La figure ci-dessous représente le schéma de principe du procédé LINDE-HAMPSON utilisé pour produire de l'azote liquide.



- L'azote entre dans le compresseur C dans l'état 1 ($P_1 = 1,0$ bar et $T_1 = 290$ K) pour y subir une compression isotherme qui l'amène à l'état 2 ($P_2 = 100$ bar et $T_2 = T_1 = 290$ K)
- Il est alors refroidi à pression constante ($P_3 = P_2$) dans l'échangeur E jusqu'à T_3
- Il est ensuite détendu jusqu'à la pression atmosphérique ($P_4 = P_5 = P_6 = P_1 = 1,0$ bar) dans le détendeur D . L'azote sortant du détendeur D est un mélange de gaz et de liquide.
- Le liquide est extrait au niveau du séparateur S , qui renvoie la vapeur sèche saturante (état 6) dans l'échangeur thermique E . C'est ce fluide froid 6 – 1 qui permet de refroidir le fluide chaud 2 – 3.

On note D_m le débit massique dans le circuit 2 – 3 – 4, D'_m le débit massique dans le circuit 6 – 1 et D_ℓ le débit massique d'azote liquide qui sort du séparateur S en 5. L'étude de ce procédé de liquéfaction est effectuée en utilisant les propriétés thermodynamiques réelles lues sur le diagramme enthalpique fourni en annexe, à rendre avec la copie.

Dans tout le problème, on néglige les variations d'énergie cinétique macroscopique et d'énergie potentielle de pesanteur. L'installation fonctionne en régime stationnaire.

Préliminaires

- Q.1** Considérons une machine en régime stationnaire. Quand elle est traversée par un fluide, celui-ci y échange le travail utile w_u avec les parties mobiles de la machine et la chaleur q . On note h_e et h_s les valeurs de l'enthalpie massique du fluide à l'entrée et à la sortie de la machine. Par quelle relation entre ces grandeurs se traduit le premier principe ?
- Q.2** En notant s_e et s_s les valeurs de l'entropie massique du fluide à l'entrée et à la sortie de la machine, par quelle relation se traduit le second principe ?

Sur le diagramme fourni en annexe :

- Q.3** Identifier la grandeur conservée le long de la courbe C_1 . En justifiant votre réponse, déterminer l'allure de l'asymptote de cette courbe à basse pression.
- Q.4** Identifier la grandeur conservée le long de la courbe C_2 . Justifier qualitativement le sens de variation de cette courbe.
- Q.5** Identifier et nommer les états possibles du diazote sur la courbe C_3 .
- Q.6** Identifier la grandeur conservée le long de la courbe C_4 . On considère la transformation amenant le diazote de l'état représenté par le point M_1 à celui représenté par le point M_2 suivant le segment $[M_1 M_2]$. Décrire l'état du diazote en M .

Compresseur

La compression de l'azote s'y effectue de façon isotherme et réversible de l'état 1 jusqu'à l'état 2. Pour ce faire, les parois du compresseur sont en contact avec un thermostat qui en maintient la température constante. Celle-ci sera prise égale à celle de l'azote comprimé, soit $T_1 = 290 \text{ K}$.

Q.7 Placer les points 1 et 2 sur le diagramme de l'azote et déterminer leurs enthalpies et entropies massiques

Q.8 Calculer le transfert thermique fourni par le thermostat par kilogramme d'azote comprimé.

Q.9 Calculer le travail utile massique $w_{u,C}$ reçu par l'azote dans le compresseur.

Pour les questions suivantes, on admettra que le détendeur D , le séparateur S et l'échangeur E sont parfaitement calorifugés et ne contiennent aucune pièce mécanique mobile.

Détendeur

Q.10 Déterminer, en la justifiant, la nature de la transformation dans le détendeur D .

Q.11 En déduire, en utilisant le diagramme, que la température T_3 dans l'état 3 doit être inférieure à une valeur $T_{3,max}$ pour que le fluide dans l'état 4 puisse être un mélange de liquide et de gaz. Toujours avec le diagramme, estimer la valeur de $T_{3,max}$.

Séparateur

Celui-ci comporte une entrée et deux sorties. En 5, on extrait l'azote liquide saturant et en 6 la vapeur d'azote sèche saturante.

Q.12 Placer les points 5 et 6 sur le diagramme et déterminer leurs enthalpies et entropies massiques.

Q.13 On note y la fraction massique d'azote liquide en 4 et x la fraction massique d'azote gazeux en 4. Quelle est la relation entre x et y ?

Q.14 En appliquant un bilan enthalpique au séparateur (qui est parfaitement calorifugé et ne contient aucune partie mobile), montrer que l'on obtient la relation : $h_4 = yh_5 + (1 - y)h_6$.

Échangeur thermique

On rappelle que le débit massique d'azote dans le circuit 2 – 3 – 4 est noté D_m et celui dans le circuit 6 – 1 est noté D'_m . On note Φ la puissance échangée entre les circuits 2 – 3 et 6 – 1.

Q.15 Exprimer le débit massique D'_m en fonction de y et de D_m .

Q.16 Exprimer les transferts thermiques massiques q et q' reçus par le fluide respectivement dans les circuits 2 – 3 et 6 – 1. En déduire que $D_m(h_3 - h_2) + D'_m(h_1 - h_6) = 0$.

Q.17 Déduire des deux questions précédentes une relation entre h_1 , h_2 , h_3 , h_6 et y .

Q.18 Montrer alors que : $y = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_5}$. Faire l'application numérique.

Q.19 Calculer les valeurs de h_3 et h_4 et placer les points 3 et 4 sur le diagramme.

Q.20 Calculer le travail $w'_{u,C}$ fourni au niveau du compresseur par kilogramme d'azote liquide produit.

Exercice 3 : Le combustible nucléaire (d'après CCP MP I 2012)

Le combustible de certains type de centrales nucléaires est constitué de petites sphères multicouches appelées particules TRISO (voir figure suivante). Le cœur, constitué de matériau fissile, est entouré de plusieurs couches successives ayant pour rôles d'assurer la protection du noyau et le confinement des produits de fission. Le cœur de la particule est constitué de carbure d'uranium UC et la couche de céramique est faite de carbure de zirconium ZrC.



Le tableau suivant récapitule les propriétés et dimensions des différentes couches (les rayons sont donnés en micromètres et les conductivités thermiques en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) :

Couche	Position	Rayon extérieur	Conductivité thermique λ
Carbure d'uranium (UC)	$r < r_1$	$r_1 = 250$	12
Carbone poreux	$r_1 < r < r_2$	$r_2 = 345$	0,5
Carbone pyrolytique (PyC) dense	$r_2 < r < r_3$	$r_3 = 385$	4
Carbure de zirconium (ZrC)	$r_3 < r < r_4$	$r_4 = 420$	20
Carbone pyrolytique (PyC) dense	$r_4 < r < r_5$	$r_5 = 460$	4

La puissance par unité de volume produite sous forme d'énergie thermique dans le matériau fissile UC sera notée σ_Q . La conductivité thermique de la couche numérotée i sera notée λ_i (i allant de 1 à 5).

Q.1 Donner la loi de Fourier en indiquant les unités des différentes grandeurs.

Q.2 L'équation de la chaleur pour le centre de la particule en tenant compte du terme de production s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}_Q + \sigma_Q$$

Que traduit cette équation ? Interpréter physiquement les différents termes.

Q.3 En régime stationnaire, à quoi se réduit cette équation ?

On se place en régime stationnaire dans la suite de cet exercice. On donne l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques d'un champ scalaire $\psi(r, \theta, \phi)$:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}$$

Q.4 Déterminer $T(r)$ pour $r < r_1$. On notera T_0 la température en $r = 0$.

Q.5 Calculer numériquement la variation de température entre les abscisses $r = 0$ et $r = r_1$ si la puissance volumique σ_Q vaut $5,0 \times 10^9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$.

Afin de calculer la température dans les différentes couches de la particule TRISO, nous allons utiliser le concept de résistance thermique.

Q.6 Donner la définition de la résistance thermique R_{th} d'un matériau soumis à un écart de température $T_1 - T_2$ (avec $T_1 > T_2$) impliquant un flux thermique Φ_{th} .

Q.7 Déterminer le flux thermique en coordonnées sphériques et le mettre sous la forme :

$$\Phi_{th} = B \frac{dT}{d\left(\frac{1}{r}\right)}$$

où la constante B est à exprimer en fonction des données du problème. On rappelle que le gradient d'un champ scalaire $\psi(r, \theta, \phi)$ s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$$

Q.8 Exprimer la résistance thermique $R_{th,12}$ d'une coque comprise entre un rayon r_1 et r_2 (avec $r_1 < r_2$).

Q.9 Calculer numériquement les résistances thermiques des 4 coques $R_{th,12}$, $R_{th,23}$, $R_{th,34}$, $R_{th,45}$.

Q.10 En déduire les températures aux interfaces T_1 , T_2 , T_3 et T_4 si la température extérieure T_5 vaut 1300 K.

La centrale nucléaire a une puissance thermique $P_{th} = 600$ MW et une puissance électrique $P_e = 300$ MW. On considère que les particules TRISO sont disposées dans le réacteur suivant un empilement cubique simple (particules aux sommets de la maille cubique). On rappelle que la puissance volumique dégagée par le combustible nucléaire est $\sigma_Q = 5,0 \times 10^9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$.

Q.11 Déterminer le nombre de particules TRISO nécessaires au fonctionnement du réacteur. Quel volume en m^3 cela représente-t-il ? Pour cette question, toute démarche de recherche, même incomplète, sera prise en compte.

• • • FIN • • •