# RÉVISION MPSI ..........

# .......... POUR LE COURS DE MP

Ce polycopié est constitué d'un grand nombre de notions vu en Terminale et en MPSI et absolument indispensable aux concours : les examinateurs prennent mal de ne pas connaitre le théorème de Cayley-Hamilton (programme de MP) ; par contre ils prennent très très très mal de ne pas connaitre le DL de $\ln(1+x)$ en zéro et encore plus mal de ne pas connaitre la formule d'addition $\cos(a+b)$.

Ce polycopié ne saurait en aucun cas remplacer le riche (et célèbre !) cours de votre professeur de MPSI. Notamment, il n'y a aucune démonstration (qui sont pourtant à savoir) ni toutes les définitions, propriétés dessins et autres.

C'est à vous pour chaque chapitre de ce polycopié, selon le degré de mémorisation (ou d'oubli), d'aller revoir avec plus ou moins de temps, votre cours de MPSI sur le sujet.

## LETTRES GRECS

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ : alpha | $\beta$ : bêta | $\gamma$ : gamma | $\delta$ : delta | $\varepsilon$ : epsilon |
| $\zeta$ : dzêta | $\eta$ : êta | $\theta$ : thêta | $\iota$ : iota | $\kappa$ : kappa |
| $\lambda$ : lambda | $\mu$ : mu | $\nu$ : nu | $\xi$ : xi | $o$ : omicron |
| $\pi$ : pi | $\rho$ : rhô | $\sigma$ : sigma | $\tau$ : tau | $\varphi$ : phi |
| $\chi$ : ki | $\psi$ : psi | $\omega$ : oméga | | |

**MAJUSCULES**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Gamma$ : Gamma | $\Lambda$ : Lambda | $\Sigma$ : Sigma | $\Psi$ : Psi | $\Delta$ : Delta |
| $\Omega$ : Oméga | $\Pi$ : Pi | $\Phi$ : Phi | | |

## TRIGONOMÉTRIE

1. **Formule fondamentale** :

$$\boxed{\cos^2 x \ + \ \sin^2 x = \qquad\qquad}$$

2.

| | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | | | | | | | |
| cos | | | | | | | |
| tan | | | | | | | |

3. **Parité - Périodicité - Symétries**

(a) $\cos(-x) =$ $\sin(-x) =$ $\tan(-x) =$

(b) $\cos(x+2\pi) =$ $\sin(x+2\pi) =$ $\tan(x+\pi) =$

(c) $\cos(x+\pi) =$ $\sin(x+\pi) =$

(d) $\cos(x+\frac{\pi}{2}) =$ $\sin(x+\frac{\pi}{2}) =$

(e) $\boxed{\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \qquad \sin(\frac{\pi}{2}-x) =}$

4. **Formules d'Euler**

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{\quad - \quad}{\qquad}}$$

**Formules d'Euler généralisées**

$e^{ia}+e^{ib} = 2\cos(\frac{a-b}{2})e^{i\frac{a+b}{2}}$ et $e^{ia}-e^{ib} =$

5. **Formules d'addition** (Elles sont basées sur la formule $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$)

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(a+b) = \\ \sin(a+b) = \\ \tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{\qquad} \end{array}}$$

On en déduit :
$\cos(a-b) =$ et $\sin(a-b) =$

6. **Formules du double-angle**

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \\ \sin(2a) = 2\sin a\cos a \end{array}}$$

On en déduit la linéarisation de $\cos^2 a$ et de $\sin^2 a$ :

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2} \text{ et de } \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

On en déduit aussi :

$$1+\cos t = (\sqrt{2}\cos\frac{t}{2})^2 \qquad \text{et} \qquad 1-\cos t = (\sqrt{2}\sin\frac{t}{2})^2$$

7. **Formules de transformation** (On les retrouvent à l'aide des formules d'addition)

$\cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$ $\sin a\sin b =$

$\sin a\cos b =$

$\cos p + \cos q =$ $\cos p - \cos q =$

$\sin p + \sin q =$ $\sin p - \sin q =$

8. **Formules de paramétrisation** : Si $\boxed{t = \tan\frac{\theta}{2}}$ alors on a :

$$\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}\ ,\quad \cos\theta = \frac{}{}\ ,\quad \sin\theta = \frac{}{}\ ,\quad d\theta = \frac{2dt}{}$$

## POLYNÔMES

**Définition :** Un polynôme est une expression $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ avec $a_i \in \mathbb{K}$.

$X$ est appelé :

**Ensemble** des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ :

**Définition** de $P+Q$, $\lambda P$ et $PQ$.
Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ , $Q = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
$P + Q =$

$\lambda P =$

$PQ =$

**degré** de $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$
$d^0P = \deg P =$ $\qquad\qquad$ $d^0 0 =$

Polynôme **unitaire** :
$d^0(PQ) =$ $\qquad\qquad$ $d^0(P+Q) \leqslant$ $\qquad\qquad$ $d^0(\lambda P) =$

Ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ noté :

**Structure** de $(\mathbb{K}_n[X], \ ,\ )$ : $\qquad\qquad$ $\dim \mathbb{K}_n[X] =$

**Fonction polynômiale** associée à $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ :

**Equation algèbrique** :

**Division euclidienne** de $A$ par $B \neq 0$ : $\forall (A,B) \in \mathbb{K}^2$ , $B \neq 0$ :
**algorithme** de cette division :

**Définition** : Soient $A$ et $B$ deux polynômes. On dit que B divise A si
**Notation** :
**Remarque** : On dit également que A est un diviseur de B ou que B est un multiple de A. L'ensemble des diviseurs de B sera noté .
Les polynômes A et B sont dits associés si
Le reste de la division de $P$ par $(X - \alpha)$ est :
$\alpha \in \mathbb{K}$ est **racine** de $P$ si :
Conséquence : **Factorisation** de $P$ :

$\alpha \in \mathbb{K}$ est **racine d'ordre $s \in \mathbb{N}^*$** de $P$ si :

**Divisibilité** de $A$ par $B$ :

**Notation** :

Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ $p$ éléments de $\mathbb{K}$ 2 à 2 distincts. On a :

$\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ $p$ racines de $P$ **si et seulement si**

**Théorème** : Soit $P$, un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, tel que $\deg P \leqslant n$. Si $P$ admet au moins $n+1$ racines 2 à 2 distinctes (en particulier s'il en admet une infinité) alors $P =$

**Polynôme dérivé** de $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ :

$(P+Q)' =$

$(\lambda P)' =$

$(PQ)' =$

Dérivée **successive** de $P$ : $P^{(n+1)} =$ $\qquad\qquad =$ $\qquad\qquad P^{(0)} =$

Formule de **Leibniz** : $(PQ)^{(n)} =$

Formule de **Taylor** en $a \in \mathbb{K}$ : si $d^oP = n$ alors :

$P(X) =$

**Remarque** : On peut la retrouver grâce à la formule de Taylor-$\cdots$

**Caractérisation** des racines d'ordre $s \geqslant 1$ de $P$ :

$\alpha \in \mathbb{K}$ est **racine d'ordre $s \in \mathbb{N}^*$** de $P$ **si et seulement si**

$P$ est un polynôme **scindé** dans $\mathbb{K}$ si :

**Conséquence** : Si $P$ est scindé dans $\mathbb{K}$ alors $P =$

**Relations coefficients-racines** :

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_1X + a_0 = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n)$.

$$\begin{cases} \sigma_1 = & = \\ \sigma_2 = & = \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_p = & = \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_n = & = \end{cases}$$

**Exemples** $P = aX^2 + bX + c = a(X-\alpha)(X-\beta)$ avec $a \neq 0$.

$\alpha + \beta =$ $\qquad\qquad \alpha\beta =$

$P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ avec $a \neq 0$.

Donner les 3 relations coefficients-racines :

Théorème de **d'Alembert-Gauss** :

**Définition** d'un **polynôme irréductible** $P$ :

**Les Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont** :

1.

**Lien factorisation** entre $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha$ une racine de $P$ avec $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors $P$ se factorise **dans $\mathbb{R}[X]$** par :
$P =$

**Les Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont** :

1.
2.

**Tous** les autres polynômes de $\mathbb{R}[X]$ sont donc **NON irréductibles** (exemple : $P = X^4 + 1$)
**Factorisation** en produit de facteurs irréductibles :

Dans $\mathbb{C}[X]$, $P =$

Dans $\mathbb{R}[X]$, $P =$

**Remarque** : Pour factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ on peut commencer par factoriser dans $\mathbb{C}[X]$.
**"Méga-astuce"** pour factoriser les polynômes bi-carrés du quatrième degré tel que $P = X^4 + X^2 + 9$.
On écrit
$$\begin{aligned} P &= X^4 + X^2 + 9 \\ &= [X^4 + 9] + X^2 \\ &= [X^4 + 3^2 + 6X^2 - 6X^2] + X^2 \\ &= [X^4 + 3^2 + 6X^2] - 6X^2 + X^2 \\ &= [X^2 + 3]^2 - 5X^2 \\ &= [X^2 + 3]^2 - [\sqrt{5}X]^2 \\ &= (X^2 + 3 + \sqrt{5}X)(X^2 + 3 - \sqrt{5}X) = (X^2 + \sqrt{5}X + 3)(X^2 - \sqrt{5}X + 3) \end{aligned}$$

**Exemples**

1. Dans $\mathbb{C}[X]$, $X^n - 1 =$
2. Dans $\mathbb{R}[X]$ (en passant dans $\mathbb{C}[X]$), $X^6 - 1 =$
3. Dans $\mathbb{R}[X]$,(sans passer dans $\mathbb{C}[X]$), $X^6 - 1 =$
4. Dans $\mathbb{R}[X]$, $X^4 + 2X^2 + 4 =$

**Polynôme interpolateur de LAGRANGE** : Soient $(a_1, \cdots, a_n)$ $n$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et soient $(b_1, \cdots, b_n)$ $n$ éléments quelconques de $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique polynôme $L$ de $\mathbb{K}[X]$ tel que $d^oL \leqslant n-1$ et $\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ L(a_i) = b_i$

$L =$

Donner à l'aide de $L$ tous les polynômes $P$ de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ P(a_i) = b_i$

$P =$

**Remarque** : Hermite a généralisé "Lagrange" en montrant (par exemple) que si $(a_1, \cdots, a_n)$ sont $n$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et si $(b_1, \cdots, b_n), (b'_1, \cdots, b'_n), (b''_1, \cdots, b''_n)$, sont $3n$ éléments quelconques de $\mathbb{K}$, alors il existe des polynômes $H$ tels que

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} : \ H(a_i) = b_i,\ H'(a_i) = b'_i \text{ et } H''(a_i) = b''_i.$$

# RELATIONS BINAIRES , RELATION D'ÉQUIVALENCE , RELATION D'ORDRE

1. **Relation binaire :**
   **Définition :** Soit $E$ un ensemble non vide. On appelle **relation binaire** notée $\mathcal{R}$ sur $E$, la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $E \times E$.
   **Notation :** Si $(x, y) \in \mathcal{G}$, on note alors $x\mathcal{R}y$.
2. **"Qualité" d'une relation binaire :**
   Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$ (non vide).
   (a) $\mathcal{R}$ est dit réflexive si : $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$.
   (b) $\mathcal{R}$ est dit symétrique si : $\forall (x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \;\Rightarrow$
   (c) $\mathcal{R}$ est dit antisymétrique si : $\forall (x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow$
   (d) $\mathcal{R}$ est dit transitive si : $\forall (x, y, z) \in E^3$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \;\Rightarrow$
3. **Relation d'équivalence :**
   (a) **Définition :** $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.
   (b) **Classe d'équivalence :** Soit $a$ un élément de $E$. On appelle **classe d'équivalence** de $a$ pour $\mathcal{R}$ : l'ensemble des éléments de $E$ qui sont en relation avec $a$, on la note $cl(a)$. On a donc : $cl(a) = \{x \in E \;/\; x\mathcal{R}a\}$.
   **Remarque** : $cl(a) = cl(b) \iff a\mathcal{R}b$.
   **Définition** : On appelle ensemble quotient de la relation $\mathcal{R}$ dans $E$, l'ensemble noté
   $$E/\mathcal{R} = \{\text{classes d'équivalence de } \mathcal{R}\ \}.$$
   (c) **Partition (version ensembliste) :** On appelle partition d'un ensemble $E$, non vide, tout ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ ($\mathcal{F}$ est donc un ensemble de sous-ensemble de $E$) tel que :
   i. $\forall X \in \mathcal{F}$, $X \neq \emptyset$
   ii. $\forall (X, Y) \in \mathcal{F}^2$, $X \neq Y \;\Rightarrow X \cap Y = \emptyset$
   iii. $\displaystyle\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X = E$.
   (d) **Partition (version familiale) :** On appelle partition d'un ensemble $E$, non vide, toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensemble de $E$ tels que :
   i. $\forall i \in I$, $A_i \neq \emptyset$
   ii. $\forall (i, j) \in I^2$, $i \neq j \;\Rightarrow A_i \cap Aj = \emptyset$
   iii. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = E$.
   **Théorème :** Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur $E$ forment une partition de $E$.
4. **Relation d'ordre :**
   (a) **Définition :** Soit $\preceq$ une relation binaire sur un ensemble $E$, non vide. On dit que $\preceq$ est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
   On dit que cette relation d'ordre est **totale** si tous les éléments de $E$ sont comparables (c'est-à-dire $\forall (x, y) \in E$, $x \preceq y$ ou $y \preceq x$). Si la relation n'est pas totale on dit qu'elle est **partielle** (c'est-à-dire $\exists (x, y) \in E$, $x \not\preceq y$ et $y \not\preceq x$).
   (b) **Exemples :** Pour chacun des exemples suivant dire si l'ordre est total ou partiel.
   i. $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ ,$\mathbb{Q}$ , $\mathbb{R}$ avec l'ordre usuel : $\leqslant$
   ii. $\mathcal{P}(X)$ (ensemble des sous-ensembles de $X$) avec l'inclusion $\subset$
   iii. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On définit la realtion d'ordre $\leqslant$ sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par :
   $$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2 \; f \leqslant g \text{ si } \forall x \in I,\; f(x) \leqslant g(x).$$

(c) **Majorant-Minorant :** Soit $E$ un ensemble munit d'un ordre $\preceq$. Soit $A$ un sous-ensemble, non vide, de $E$.
On dit que $M$ est un majorant de $A$ si : $\forall x \in A,\ x \preceq M$. On dit que $A$ est majoré s'il possède un majorant : $\exists M \in E\ /\ \forall x \in A,\ x \preceq M$.
On dit que $m$ est un minorant de $A$ si : $\forall x \in A,\ x \succeq m$. On dit que $A$ est minoré s'il possède un minorant : $\exists m \in E\ /\ \forall x \in A,\ x \succeq m$.

(d) **Plus grand/ plus petit élément :** Soit $E$ un ensemble munit d'un ordre $\preceq$. Soit $A$ un sous-ensemble, non vide, de $E$.
On dit que $A$ possède un plus grand élément si : $\exists M \in \underline{A}\ /\ \forall x \in A,\ x \preceq M$.
On dit que $A$ possède un plus petit élément si : $\exists m \in \underline{A}\ /\ \forall x \in A,\ x \succeq m$.
Remarque : $A$ possède un plus grand élément s'il existe un majorant de $A$ qui appartienne à $A$.

(e) **Borne supérieure/ inférieure :**

i. Définition : Soit $E$ un ensemble munit d'un ordre $\preceq$. Soit $A$ un sous-ensemble, non vide, de $E$.
On dit que $A$ possède une borne supérieure si : $A$ est majorée et si l'ensemble des majorants de $A$ possède un plus petit élément $\alpha$. On note $\alpha = \sup_{\preceq} A$ ou $\alpha = \sup A$. On dit alors que $\alpha$ est le plus petit des majorants de $A$.

On dit que $A$ possède une borne inférieure si : $A$ est minorée et si l'ensemble des minorants de $A$ possède un plus grand élément $\beta$. On note $\beta = \inf_{\preceq} A$ ou $\beta = \ inf A$. On dit alors que $\beta$ est le plus grand des minorants de $A$.

ii. Cas de $\mathbb{R}$ :
Théorème fondamental : Tous sous-ensemble, non vide et majoré, de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, tous sous-ensemble, non vide et minoré, de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.
Caractérisation : Soit $A$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A\ :\ x \leqslant \alpha\ (\alpha \text{ majore } A) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } \ a > \alpha - \varepsilon \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A\ :\ x \geqslant \beta\ (\beta \text{ minore } A) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } \ a < \beta + \varepsilon \end{cases}$$

Propriété 1 :
Si $\sup A$ appartient à $A$, $\sup A$ est donc le plus grand élément de $A$. Idem pour $\inf A$.
Notation : Si $\sup A$ appartient à $A$, $\sup A$ est alors noté **Max$A$**. Idem si $\inf A$ appartient à $A$, $\inf A$ est alors noté **min$A$**.

**Caractérisation séquentielle (avec les suites)**

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A\ x \leqslant \alpha\ (\alpha \text{ majore } A) \\ \exists (a_n) \text{ suite d'éléments de } A \text{ tel que } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A\ x \geqslant \beta\ (\beta \text{ minore } A) \\ \exists (a_n) \text{ suite d'éléments de } A \text{ tel que } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \beta \end{cases}$$

**Démonstration** : Le faire en exercice en s'aidant d'un petit dessin.
**Méthode** pour montrer que $\alpha$ est la borne supérieure de $A$. On montre en premier que $\alpha$ majore $A$. Si $\alpha \in A$ alors $\sup A = \text{Max}A = \alpha$.
Si $\alpha \notin A$ alors il faut soit utiliser les "epsilons" : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A\ /\ a > \alpha - \varepsilon$
soit les suites : $\exists (a_n)$ suite d'éléments de $A$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$.
**Exercice** : Soient $A$ et $B$ deux ensemble non vides et bornés de $\mathbb{R}$. On suppose que
$\forall x \in A$ et $\forall y \in B : x \leqslant y$.
Montrer que $\sup A \leqslant \inf B$.

# I. $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Q}$

1. **"Définition" de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$**
   $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$ et $\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$.
   Propriété caractéristique de $\mathbb{N}$ :
   (a) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément (c'est-à dire :

   $\forall A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$,

   Remarque : Si $a = minA \geqslant 1$ alors $a - 1 \notin A$.

   **Conséquence** :
   (b) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément (c'est-à dire :

   $\forall A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$,

   Remarque : Si $a = MaxA$ alors $a + 1 \notin A$.

2. **Division euclidienne**
   **Théorème** : $\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $\exists! (q, r) \in \mathbb{N}^2 \ / \ a = bq + r$ et .
   **Remarques** : $q$ est le plus grand entier $n$ tel que $nb \leqslant a$. On a aussi $q = \lfloor \quad \rfloor$.
3. **Récurrence**
   Lemme : Soit $A \subset \mathbb{N}$ tel que :
   (a) $0 \in A$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N} : n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A$.
   Alors $A =$ .
   démonstration : (Par l'absurde). Supposons que $A \neq \mathbb{N}$. Posons $B = \mathcal{C}_{\mathbb{N}} A = \mathbb{N} \backslash A$. On a $B \neq \emptyset$ et donc possède un plus petit élément : $n_0$. Comme $0 \in A$, $0 \notin B$ et donc $n_0 \neq 0$. On en déduit que $n_0 \geqslant 1$. Considérons $p = n_0 - 1$. On a $p \notin B$ (car strictement plus petit que $n_0$), donc $p \in A$. La deuxième hypothèse sur $A$ donne : $p + 1 = n_0 \in A$ : Absurde car $n_0 \in B$ et $A \cap B = \emptyset$.

   Raisonnement par récurrence : Soit $H_n$ une assertion dépendant de $n$ (exemple : $H_n$ :"la n-ième fleur est plus grande que $2^n$"). Pour montrer que $H_n$ est vraie pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}$, on peut raisonner par récurrence : On montre que $H_0$ est vraie (c'est **l'amorce**) et pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}$ on montre que si $H_n$ est vraie alors $H_{n+1}$ est également vraie (c'est **l'hérédité**).
   Remarque : Si pour montrer $H_{n+1}$ on a besoin de $H_n$, $H_{n-1}$..., on fait alors une récurrence "avec prédécesseurs". On rédige : Supposons que $H_p$ soit vraie jusqu'au rang $n$.
   Exemple : Soit $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ , $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ , $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in \mathbb{N}$. (Attention à l'amorce !)
4. **Ensembles finis, cardinaux, cardinaux remarquables**
   (a) Définition : On dit qu'un ensemble $E$ est fini s'il existe un entier $n$ et une bijection de $E$ sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. On note alors Card$E = n$ (convention : Card$\emptyset = 0$). Toute partie $E'$ de $E$, fini, est finie et Card$E' \leqslant$ Card$E$, avec égalité si et seulement si $E' = E$.
   Etant donnés deux ensembles finis $E$ et $F$ de même cardinal, et une application $f$ de $E$ dans $F$, $f$ est bijective si et seulement si $f$ est injective ou surjective.

   (b) Opération sur les ensembles finis : Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis.

i. Si $E \cap F = \emptyset$ alors : $\mathrm{Card}(E \cup F) =$ .

ii. $\mathrm{Card}(E \cup F) =$ .

iii. $\mathrm{Card}(E \times F) =$ .

iv. $\mathrm{Card}\mathcal{P}(E) =$ . ($\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de $E$)

v. On note $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de $E$ dans $F$. $\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E,F)) =$ .

(c) Arrangements : Soient deux ensembles finis $E$ et $F$ tels que $\mathrm{Card}E = p$ et $\mathrm{Card}F = n$. L'ensemble des applications injectives de $E$ dans $F$ est un ensemble fini. On note $A_n^p$ son cardinal. Sa valeur est :

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \text{———}$$

Arrangements : On appelle arrangement de $p$ éléments d'un ensemble $E$ de $n$ éléments, tout $p-uplet$ (l'ordre compte) d'éléments deux à deux distincts de $E$. Le nombre de ces arrangements est $A_n^p$.

(d) Permutations : On appelle permutation de $n$ éléments toute bijection de l'ensemble de ces $n$ éléments sur lui-même. Le nombre de permutations de $n$ éléments est $n!$.

(e) Coefficient binomial : $\binom{n}{p}$ :

i. Définition : On appelle $\binom{n}{p}$ le nombre de parties (sous-ensemble) à $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments.

ii. Calcul :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

iii. Remarque : On le note parfois $C_n^p = \dbinom{n}{p}$.

$\dbinom{n}{0} =$ $\qquad \dbinom{n}{n} =$ $\qquad \dbinom{n}{1} =$ $\qquad \dbinom{n}{2} =$ $\qquad \dbinom{n}{3} =$

iv. Formules :

$\dbinom{n}{n-p} =$

$\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} =$

$\dbinom{n}{p} = \text{—}\dbinom{n-1}{p-1}$

**Formule de Pascal** :

v. Formule du binôme de Newton :

$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \qquad\qquad = \sum_{k=0}^{n} \qquad\qquad .}$$

5. **"Définition" de $\mathbb{Q}$**

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} / \ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} - \{0\}\}$

Écriture d'un rationnel : $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\exists!(p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\}) \ / \ r = \frac{p}{q}$.

Propriété de $\mathbb{Q}$ : $(\mathbb{Q}, +, \times, \leqslant)$ est un corps totalement ordonné.

Remarque :

(a) Un nombre est rationnel si et seulement si son écriture décimale est périodique (ex : $12,2373\underline{73}7\cdots$).

(b) $\mathbb{Q}$ est un corps totalement ordonné qui contient des "trous" (par exemple une suite peut être croissante et majorée <u>sans</u> être convergente ou un ensemble peut être non vide et majoré sans avoir de borne supérieure ; ces lacunes conduiront à $\mathbb{R}$).

II. <u>$\mathbb{R}$</u>

1. **<u>"Définition" de $\mathbb{R}$</u>**

On admet qu'il existe un unique ensemble noté : $\mathbb{R}$ tel que :

(a) $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ est un corps totalement ordonné.

(b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

(c) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

(d) Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

<u>Détail</u>

(a) Dès que l'on a dans un problème : Soit "$x \neq 0, \cdots$" alors on est sûr qu'il faudra considérer $\dfrac{1}{x}$ (qui existe car $\mathbb{R}$ est un corps).

<u>Les seules règles qui manipulent l'ordre et les opérations sont :</u>

i. $\forall (x,y,a) \in \mathbb{R}^3,\ x \leqslant y \Longrightarrow x + a \leqslant y + a.$

ii. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \Longrightarrow -y \leqslant -x.$

iii. $\forall (x,y,a) \in \mathbb{R}^3,\ x \leqslant y\ et\ \underline{a \geqslant 0} \Longrightarrow xa \leqslant ya.$

iv. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x \leqslant y\ \Longrightarrow \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}.$

<u>Attention aux soustractions et aux divisions qui provoquent des "CATA" avec $\leqslant$</u>

(b) L'inclusion réciproque est fausse (ex : $\sqrt{2},\ \pi,\ e$).

(c) <u>Caractérisation :</u> Soit $A$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall x \in A\ :\ x \leqslant \alpha\ (\alpha \text{ majore } A) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } \ a > \alpha - \varepsilon \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall x \in A\ :\ x \geqslant \beta\ (\beta \text{ minore } A) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } \ a < \beta + \varepsilon \end{cases}$$

<u>Propriété :</u>

Si $\sup A$ appartient à $A$, $\sup A$ est donc le plus grand élément de $A$. Idem pour $\inf A$.

<u>Notation :</u> Si $\sup A$ appartient à $A$, $\sup A$ est alors noté **<u>Max$A$</u>**. Idem si $\inf A$ appartient à $A$, $\inf A$ est alors noté **<u>min$A$</u>**.

**<u>Caractérisation séquentielle (avec les suites)</u>**

$$\alpha = \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall x \in A\ x \leqslant \alpha\ (\alpha \text{ majore } A) \\ \exists (a_n) \text{ suite d'éléments de } A \text{ tel que } \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \alpha \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall x \in A\ x \geqslant \beta\ (\beta \text{ minore } A) \\ \exists (a_n) \text{ suite d'éléments de } A \text{ tel que } \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \beta \end{cases}$$

**<u>Démonstration</u>** : Le faire en exercice en s'aidant d'un petit dessin.

**Méthode** pour montrer que $\alpha$ est la borne supérieure de $A$. On montre en premier que $\alpha$ majore $A$. Si $\alpha \in A$ alors $\sup A = \mathrm{Max} A = \alpha$.
Si $\alpha \notin A$ alors il faut soit utiliser les "epsilons" : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \ / \ a > \alpha - \varepsilon$
soit les suites : $\exists (a_n)$ suite d'éléments de $A$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$.

Exemple : $A = [0, 1[$ et $A = \{\frac{1}{n} \ / \ n \geqslant 1\}$ (déterminer inf, sup, Max, min).

2. **Valeur absolue, encadrement**
Définition : $| x | = Max\{x, -x\}$.
Propriétés : (a) $| x | \geqslant 0$. (b) $| -x | =$ (c) $| x | = 0 \Longleftrightarrow$
(d) $| xy | =$
(e) $| x + y | \leqslant$ Conséquence : $| \sum_{i=1}^{n} x_i | \leqslant$
(f) $| x - y | \geqslant$
Encadrement :
(a) $| x | \leqslant \alpha \Longleftrightarrow \quad \leqslant x \leqslant$
(b) $| x - a | \leqslant \alpha \Longleftrightarrow$
(c) $| x - a | \leqslant \alpha \Longrightarrow | x | \leqslant$
(d) $I_n + \dfrac{1}{n+1} \leqslant S_n < I_{n+1}$. Donner un encadrement de $I_n$ :

3. **Partie entière**
Définition : $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists !\ n \in \mathbb{Z} \ / \ n \leqslant x < n + 1$.
Notation : $n = \lfloor x \rfloor = E(x)$. Exemples : $\lfloor \pi \rfloor =$ , $\lfloor -\pi \rfloor =$ .
Caractérisation :

$$n = \lfloor x \rfloor \iff \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \leqslant x < n + 1 \end{cases}$$

Exercice : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ , $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

4. **Densité**
Définition : $A \subset \mathbb{R}$ est dit dense dans $\mathbb{R}$ si : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x < y, \exists a \in A$ tel que $x < a < y$.
Exemples : $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ , $\mathbb{D}$.
Remarque : La densité de $A$ exprime que l'on peut toujours "glisser" un élément de $A$ entre deux réels quelconques.

5. **Sommation**
(a) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i =$
(b) $\sum\limits_{1 \leqslant i < n} x_i =$
(c) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+1} =$
(d) $\sum\limits_{i+j=n} x_i y_j =$
(e) $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i =$

(f) $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_{i,j} =$

(g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a =$

(h) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a =$

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_{i,j} =$

(j) $\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} =$

## NOMBRES COMPLEXES-GÉOMÉTRIE

### I Définitions - ÉcritureS

1. **Définition-Structure**

   $\mathbb{C} = \{a+ib$ tels que $\}$. Si $z = a+ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $a =$ et $b =$

   **Remarque** : Soient $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ , avec $a, b, a', b'$ : réels, on a

   $z = z' \iff$

   **Théorème** : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un . $(\mathbb{C}, +, \times, \cdot)$ est une

   Soient $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ , avec $a, b, a', b'$ : réels.

   $z+z' =$ , $zz' =$ , $-z =$ et si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} =$

2. **Module-Argument**

   Soit $z = a+ib$ avec $a, b$ : réels. $\bar{z} =$ et $|z| =$ $=$

   **Définition** : On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1\}$. On a $(\mathbb{U}, \times)$ qui est un

   **Théorème-définition** : $\forall z \in \mathbb{C}^*$ , $\exists! \rho > 0$ et $\exists \theta$ (unique à $2\pi$-près) tels que

   $\boxed{z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$ (écriture d'un nombre complexe)

   On a : $\rho =$ et $\theta$ est appelé et noté

   **Théorème** :Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ , avec $\rho, \rho' > 0$ et $\theta, \theta'$ : réels.

   On a $z = z' \iff \Bigg\{$

   **Formules** :

   $\rho e^{i\theta}.\rho' e^{i\theta'} =$ .

   Soit $n \in \mathbb{Z}$ , $(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n =$ (formule de

   **Passage cartésien-trigonométrique** :

   Soit $z = \rho e^{i\theta}$. On a alors $z =$ $+i$

   Soit $z = a+ib \neq 0$ avec $a, b$ : réels. On a alors $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho =$ $=$ et $\theta$ défini par

   $$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\quad}{\quad} \\[2ex] \sin\theta = \dfrac{\quad}{\quad} \end{cases}$$

   **Conséquence** : Posons $\alpha_0 = \arccos(\quad)$ , on a :

**Exemple** : Donner l'écriture trigonométrique de $z = -4 - 3i$

3. **Interprétation géométrique**

II **Pratiques des nombres complexes**

1. **Formules d'EULER**
   $\cos\theta =$ et $\sin\theta =$
   $e^{i\theta} + e^{-i\theta} =$ $e^{i\theta} - e^{-i\theta} =$
   $1 + e^{i\theta} =$ $1 - e^{i\theta} =$
   $e^{i\alpha} + e^{i\beta} =$ $e^{i\alpha} - e^{i\beta} =$ : **Formules d'Euler généralisées**

   **Application** : Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin kx$.

2. **Linéarisation-Dé-linéarisation**
   (a) **Linéarisation** : C'est écrire un polynôme en cos et sin comme combinaison linéaire des "$\cos kx$" et "$\sin kx$". On utilise les formules d'Euler , on développe et on regroupe les termes deux par deux.
   **exemple** : $\cos^7 x =$

   $\cos^2 x \sin^3 x =$

   (b) **Dé-linéarisation** : c'est le contraire de la linéarisation. On utilise la formule de Moivre : $\cos kx = \text{Re}(\cos x + i\sin x)^k$ et $\sin kx = \text{Im}(\cos x + i\sin x)^k$.
   **Exemple** : $\cos 8x =$

3. **Racine n-ième de l'unité**
   **Définition** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de l'unité tout complexe racine de :
   Soit $k \in \mathbb{Z}$, on note $\omega_k =$ on a $\omega_0 =$ , $\omega_n =$ et $\omega_k = \omega_1$ .
   **Proposition** : $\omega_k = \omega_{k'} \iff$ **Conséquence** : $\omega_k =$
   **Définition** : On appelle $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité. $\mathbb{U}_n =$
   **Proposition** : La somme des racines n-ième de l'unité vaut . C'est-à-dire :

**Interprétation géométrique** : L'ensemble des points d'affixes les racines n-ième de l'unité forme un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique :
**Exemple** : Donner les racines n-ième de l'unité et tracer le polygone correspondant pour $n = 2, 3, 4, 5$ et 6
(pour $n = 5$ on calculera $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ à l'aide de la formule $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$).

**Utilisation des racines n-ième de l'unité**
$*$ Résolution de l'équation $\boxed{z^n = a}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$. Posons a= d'où les solutions sont :

$*$ Factorisations : $\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=}}$ et $X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X^2 + X + 1 =$

4. **Racine carré-Équation de second degré**
Soit $Z_0 = a + ib \in \mathbb{C}$. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 = Z_0$.
On a $z^2 = Z_0 \Longleftrightarrow \left\{ \right.$
D'où les solutions sont : $z =$ et $z =$
**Exemple** : Déterminer les racines carrées de $-33 - 56i$.

**Conséquence** : Soit $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$. Les solutions de cette équation sont : $z =$ et $z =$ avec $\delta^2 =$

**Exemple** : Factoriser le polynôme : $iz^2 + (-1 + i)z + 7 + 4i =$

5. **Géométrie des nombres complexes**
Soit $A$ d'affixe $a \in \mathbb{C}$, $B$ d'affixe $b$ et $C$ d'affixe $c$.
Alors l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est , $AB =$ , $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) =$

$(A, B, C)$ alignés si et seulement si $z = \frac{\quad}{\quad} \in$ $\Longleftrightarrow z =$
**Similitudes directes** :
On appelle similitude directe de centre $\Omega$ de rapport $\lambda > 0$ et d'angle $\theta$, l'application $s$ du plan dans le plan qui à tout point $M$ associe le point $M'$ tel que : $\left\{ \begin{array}{l} \Omega M' = \lambda \Omega M \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{array} \right.$

**Dessin** :

**Proposition** : $s$ est une similitude directe de centre $\Omega$ de rapport $\lambda > 0$ et d'angle $\theta$ **si et seulement si** il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ $(a \neq 1)$ tels que $s$ associe à tout point $M$ d'affixe $z$ le point $M'$ d'affixe $az + b$.
**De plus** :
le centre $\Omega$ a pour affixe :
le rapport $\lambda =$
l'angle $\theta =$
**Remarque** : Soit $s : z \mapsto az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On a
∗ $s$ est une translation **ssi**
∗ $s$ est une homothétie **ssi**
∗ $s$ est une symétrie **ssi**
∗ $s$ est une rotation **ssi**

6. **Exponentielle complexe**
**Définition** : Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ , on note $e^z =$
**Proposition** : $|e^z| =$ $\arg(e^z) =$ $\mathrm{Re}(e^z) =$ $\mathrm{Im}(e^z) =$
**Définitions** : Soit $z \in \mathbb{C}$.

$\cos z =$

$\sin z =$

$\tan z =$

$\operatorname{cotan} z =$

$\mathrm{ch} z =$

$\mathrm{sh} z =$

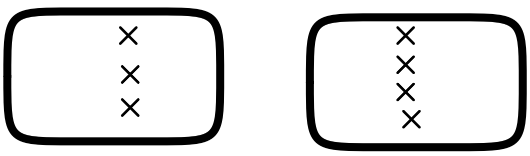
$\mathrm{th} z =$

$\cos^2 z + \sin^2 z =$

$\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z =$

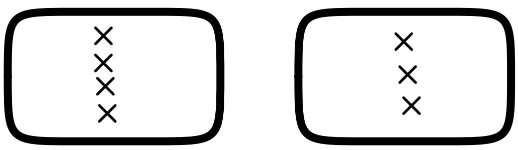
1. **Soit $E$ un ensemble non vide.**
   Compléter :
   $\mathcal{P}(E) =$
   $E \backslash A = \overline{A} = \complement_E^A =$
   $A \backslash B =$
2. **Pour montrer que 2 ensembles sont égaux**, on utilise : **A=B** $\Longleftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$
   **Remarque** : si $A$ et $B$ sont des ensembles finis, on peut aussi utiliser le cardinal :
   $A = B \Longleftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \begin{cases} B \subset A \\ \end{cases}$
3. **Vocabulaire** :
   Soit $f : E \longmapsto F$ et $A \subset E$ et $B \subset F$.
   Le graphe de $f$ c'est
   La restriction de $f$ à $A$ notée $f/A$ c'est
   La fonction $\mathbf{1}_A$ c'est
4. **Pour montrer que 2 applications sont égales** : Soient 2 applications $f$ et $g$ ayant même ensemble de départ $E$ et même ensemble d'arrivée $F$.
   Par définition, $f = g \Longleftrightarrow$
   On commence la démonstration par : "Soit $x \in E$ alors $f(x) = ...$ $... = g(x)$".
5. **Soient $E$ et $F$ 2 ensembles et soit une application $f : E \longrightarrow F$.**
   **Définition 1** :$f$ est injective si tout élément de $F$ a au plus un antécédent.
   **Caractérisation 1** : $\boxed{f \text{ est injective} \Longleftrightarrow [\forall (x,x') \in E^2, f(x) = f(x') \Longrightarrow \qquad ]}$
   **Définition 2** : $f$ est surjective si tout élément de $F$ a au moins un antécédent.
   **Caractérisation 2** : $\boxed{f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow [\forall y \in F, \qquad ]}$

   Dessin n°1

   $f$ est injective (non surjective)

   Dessin n°2

   $f$ est surjective (non injective)

   **Définition 3** : image directe et image indirecte
   Soit $A \subset E$, alors $\boxed{f(A) = \{y \qquad \}} = \{f(x)/x \in A\}$ (image directe)
   Soit $B \subset F$, alors $\boxed{f^{-1}(B) = \{x \qquad \}}$ (image réciproque).
6. N'oubliez pas vos parenthèses : $n + 1! = n + 1 \neq (n+1)!$.
7. Si $n \in \mathbb{N}^*, 0^n = 0$, mais par convention : $0^0 = 1$.
   **exemple** : $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} 0^k =$
8. **Définition en probabilités** :
   au moins : $\geqslant$ (supérieur ou égal) au plus : $\leqslant$ (inférieur ou égal)
   moins de : $<$ plus de : $>$
   **exercice 5** : L'élève le plus grand de la classe mesure : $t =$
   Combien y a-t-il d'élèves dans la classe qui mesure plus de $t$ ?
   Combien y a-t-il d'élèves dans la classe qui mesure au moins $t$ ?

9. **Cardinal d'un ensemble fini**

**Définition** : Soit $E$ un ensemble non vide. On dit que $E$ est fini s'il existe un entier $n$ et une de $E$ dans $[\![1,n]\!](=\{1,2,\ldots,n\})$ : $n$ est appelé le cardinal de $E$.

On note alors Card$E=n$. Autre notation : $|E|$ ou $\#E$.

**Convention** : Card$\emptyset$ =

**Propriétés** :

a) Soit $E$ un ensemble fini, et $A$ une partie de $E$ ( :$A\subset E$), alors $A$ est un ensemble fini et Card$A\leqslant$ Card$E$.

b) Soient 2 ensembles finis $E$ et $F$ de même cardinal, et une application $f$ de $E$ dans $F$, alors [$f$ est bijective] [$f$ est injective] [$f$ est surjective].

Opération sur les ensembles finis : Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis.

(a) Si $E\cap F=\emptyset$ (on dit que $E$ et $F$ sont disjoints) alors : Card$(E\cup F)$ =Card$E$ Card$F$.
Généralisation : si $A_1,A_2,...,A_p$ sont des parties de $E$, 2 à 2 disjointes, alors
Card$(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_p)$ =Card$A_1$ Card$A_2$ $\cdots$ Card$A_p$.

(b) $\boxed{\text{Card}(E\cup F)=\quad}$

(c) **Définition** : $E\times F=$

$\boxed{|E\times F|=\quad}$

Généralisation : si $E_1,E_2,...,E_p$ sont des ensembles finis, alors
$|E_1\times E_2\times...\times E_p|=$

10. **p-listes** :

Soit $E$ un ensemble fini, et $p\in\mathbb{N}^*$.

**Définition** : Une $p$-liste de $E$ (ou un $p$-uplet) est un élément de $E^p$

**Théorème 1** :

Si Card$E=n$, le nombre de $p$-listes de $E$ est
**conséquence** : Si on note $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de $E$ dans $F$, alors
$$\text{Card}(\mathcal{F}(E,F))=(\text{Card}\quad)^{\text{Card}\quad}.$$

**Autre notation** : $\mathcal{F}(E,F)$ est aussi notée $F^E$.

**Corollaire** : Si $E$ est un ensemble fini, alors $|\mathcal{P}(E)|=$

**Démonstration** : On utilise les fonctions.

**Théorème 2** :

Si Card$E=n$, et $p\leqslant n$ le nombre de $p$-listes d'éléments distincts de $E$ est
(On note parfois ce nombre $A_n^p$ et on parle d'arrangements de $E$).
**conséquence** :
Le nombre d'applications injectives de $X_p$ à $p$ éléments dans $Y_n$ à $n$ éléments est

A savoir : pour $n\geqslant 1$, $A_n^p=n(n-1)\cdots($

**Permutations** : On appelle permutation de $n$ éléments toute bijection de l'ensemble de ces $n$ éléments sur lui-même. Le nombre de permutations de $n$ éléments est .

11. **Combinaisons** :

(a) **Théorème 3** :

Si Card$E=n$, le nombre de parties à $p$ éléments (distincts) de $E$ est noté $\binom{n}{p}$.
(On appelle ce nombre coefficient binomial)
Si $p\leqslant n$, $\binom{n}{p}=$ et si $p>n$, $\binom{n}{p}=$

(b) **Calcul** :

$\binom{n}{0} =$ $\binom{n}{n} =$ $\binom{n}{1} =$ $\binom{n}{2} =$ $\binom{n}{3} =$

(c) **Formules** :

$\binom{n}{n-p} =$ $\binom{n}{p} = \text{—}\binom{n-1}{p-1}$

| Formule de Pascal : $\binom{n}{p} =$ |
|---|

Formule du binôme de Newton :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^{\,2}\ , \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \qquad = \sum_{k=0}^{n} \qquad .$$

Formule de Vandermonde :

$$\forall (a,b,n) \in \mathbb{N}^3 \quad : \quad \binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$

12. **Applications**

(a) Si $X_p$ a $p$ éléments et $Y_n$ $n$ éléments, alors le nombre des applications strictement croissantes de $X_p$ dans $Y_n$ est

(b) Si $X_p$ a $p$ éléments et $Y_n$ $n$ éléments, alors le nombre des applications croissantes de $X_p$ dans $Y_n$ est

(c) Soit $S = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tel que $x_1 + \cdots + x_p = n\}$. Alors $|S| =$
En déduire le nombre de façons de ranger $k$ boules indiscernables dans $b$ boites discernables :

13. **Ordre et répétition**

Dans les 3 cas, précisez s'il y a un ordre et s'il y a (ou non) répétition des éléments :

| |
|---|
| Le nombre de $p$-listes $(x_1, x_2, ..., x_p)$ d'un ensemble à $n$ éléments est $n^p$ : |
| Le nombre de $p$-listes $(x_1, x_2, ..., x_p)$ d'éléments distincts d'un ensemble à $n$ éléments est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ : |
| Le nombre de parties $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ à $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments est $\binom{n}{p}$ : |

## LogiquE

1. **Assertion** : c'est une phrase (généralement mathématique) vraie ou fausse.

**Axiome** : c'est une phrase qui est décrété vraie ; il fait partie d'un groupe d'axiomes appelé théorie axiomatique. La plus connue, et celle avec laquelle on travaille tous les jours s'appelle la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (ZF).

**Théorème** : c'est une assertion vraie que l'on démontre par déduction logique grâce aux axiomes.

**Proposition** : c'est un petit théorème.

**Lemme** : c'est un tout petit théorème !

**Conjecture** : c'est une assertion qu'une personne dit être vraie mais non encore démontrée. Tout théorème a d'abord été une conjecture.

**Exemples** : Dire si ces phrases sont des assertions (et leur valeur), des axiomes, des théorèmes, des propositions, des lemmes, des conjectures.

$(1 = 2)$

$(x > 2)$
(la $10^{1000000000000000000000000000000000000000}$-ième décimale de $\pi$ est un 7).
( la 20-ième décimale de $\pi$ est un 6).
( la 3-ième décimale de $\pi$ est un 9).
(le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des carrés des autres côtés)
($\forall x$ , $\exists y$ tel que $\forall z$ : $[z \in y \Longleftrightarrow z \subset x]$)
(3)

2. Énoncer clairement la négation des assertions suivantes :
   (a) Tout triangle possède un angle droit.
   (b) Dans toutes les prisons, tous les détenus détestent tous les gardiens.
   (c) Pour tout entier $n$ il existe un entier $p$ tel que pour tout entier $q$ la relation $q < p$ implique la relation $q < n + 1$
3. Est-ce vrai est-ce faux ? ?
   $(1 = 2) \Longrightarrow (2 = 3)$
   $(1 = 2) \Longrightarrow (2 = 2)$
   $(1 = 1) \Longrightarrow (2 = 3)$
4. Montrer que ( $p \Longrightarrow q$ ) est identique à ( non($p$) ou $q$ )
5. Soit le Théorème : Si $f$ est croissante et majorée sur $]a, b[$ alors elle admet une limite finie en $b$.
   Questions :
   (a) $f$ est croissante et majorée sur $]a, b[$ est une condition .....pour qu' elle admette une limite finie en $b$.
   (b) Pour que $f$ admette une limite finie en $b$ il .... que $f$ soit croissante et majorée sur $]a, b[$.
6. Pour intégrer une bonne Grande école il ... suffit d'/ faut ... être bon dans les matières scientifiques.
7. Donner une condition nécessaire (et non suffisante) pour qu'un réel $x$ soit entre 0 et 1.
   Donner une condition suffisante (et non nécessaire) pour qu'un réel $x$ soit entre 0 et 1.
8. Compléter les phrases suivantes par le mot **nécessaire** ou **suffisant**
   Pour gagner au loto il est .... de jouer.
   Pour ne pas perdre au loto il est .... de ne pas jouer.
   Pour qu'il n'y ait pas de nuages il est .... qu'il ne pleuve pas.
   Pour qu'un réel soit positif il est .... qu'il soit le carré d'un autre réel.
   Pour qu'une suite soit majorée il est .... qu'elle soit convergente.
   Pour qu'une suite soit convergente il est .... qu'elle soit croissante et majorée.
9. Que penser de quelqu'un qui vous dis : "Je mens." ?
10. Donner un voeu irréalisable.
11. Les cannibales d'une tribu se préparent à manger un missionnaire. Désirant lui prouver une dernière fois leur respect de la dignité et de la liberté humaine, les cannibales proposent au missionnaire de décider lui-même de son sort en faisant une courte déclaration : si celle-ci est vraie, le missionnaire sera rôti, et il sera bouilli dans le cas contraire. Que doit dire le missionnaire pour sauver sa vie ?
12. Que penser de la phrase : "La phrase que vous lisez contient huit mots." ?
13. Faites l'exercice 14.
14. Ne faites pas l'exercice 13.

# LES STRUCTURES ALGÉBRIQUES

## I. Loi de composition interne

1. **Loi de composition interne :** Soit $G$ un ensemble non vide.
   **Définition :** On appelle loi de composition interne (L.C.I.) toute application $*$ :
   $$\begin{array}{rcl} * : G\times G & \longrightarrow & G \\ (x,y) & \longmapsto & x*y \end{array}$$
   **Notation des L.C.I. :** $*, +, \times, \circ, \top, \perp$ etc...
2. **"Qualités" des L.C.I. :**
   Soit $G$ un ensemble muni d'une L.C.I., notée $*$
   (a) **Associativité :** $\boxed{\forall (x,y,z)\in G^3 : (x*y)*z = x*(y*z)}$

   (b) **Commutativité :** $\boxed{\forall (x,y)\in G^2 : x*y = y*x}$

   (c) **Elément neutre :** $\boxed{\exists e\in G, \forall x\in G : x*e = e*x = x}$

   **Remarque :** l'élément neutre est noté $0$ ou $0_G$ pour une loi $+$, $1$ ou $1_G$ pour une loi $\times$, $Id_G$ pour une loi $\circ$.

   (d) **Elément symétrique (ou inversible) :** Soit $e$ un élément neutre pour $*$. On dit que $x$ possède un symétrique (ou un inverse) pour $*$ si :
   $\boxed{\exists x'\in G \text{ tel que } x*x' = x'*x = e}$
   **Notation :** $-x$ pour une loi $+$, $x^{-1}$ ou $\dfrac{1}{x}$ pour une loi $\times$, $f^{-1}$ pour une loi $\circ$ et $x^{-1}$ pour une loi $*$.

## II. Groupes

1. **Groupe - Groupe abélien :**
   Soit $G$ un ensemble non vide, muni d'une L.C.I notée $*$.
   Définition 1 : On dit que $(G,*)$ est un groupe si :
   (a) $*$ est associative.
   (b) $G$ possède un élément neutre (noté $e$).
   (c) Tout élément $x$ de $G$ possède un élément symétrique $x^{-1}$ pour $*$.
   Définition 2 : On dit que $(G,*)$ est un groupe commutatif ou abèlien si :
   $(G,*)$ est un groupe et la loi $*$ est commutative.

   Exercice : Traduire a) b) c) avec des quantificateurs :
   a) :
   b) :
   c) :
   Exemples : Rayer les "intrus" : $(\mathbb{N},+)$ ; $(\mathbb{N},\times)$ ; $(\mathbb{Z},+)$ ; $(\mathbb{Z}^*,\times)$ ; $(\mathbb{Q},+)$ ; $(\mathbb{Q}^*,+)$ ; $(\mathbb{Q}^*,\times)$ ; $(\mathbb{R},\times)$ ; $(\mathbb{C},+)$ ; $(\mathbb{R}^n,+)$ ; $(\mathbb{C}^n,\times)$ ; $(\mathbb{K}[X],+)$ ; $(\mathbb{K}(X),+)$ ; $(\mathbb{D}^*,\times)$ ; $(\mathcal{L}(E),+)$ ; $(\mathcal{L}(E),\circ)$ ; $(GL(E),+)$ ; $(GL(E),\circ)$ ; $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+)$ ; $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+)$ ; $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},\times)$ ; $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},\circ)$ ; $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+)$.
2. **Sous-groupes :**
   Soit $(G,*)$ un groupe et soit $H\subset G$.

   Définition : On dit que $H$ est un sous-groupe de $(G,*)$ si :

(a) $H$ est non vide (on montre en général que $e_G \in H$).

(b) $H$ est stable pour la loi $*$ : $\forall (x,y) \in H^2 : x * y \in H$.

(c) $H$ est stable pour le symétrique : $\forall x \in H : x^{-1} \in H$.

Théorème Fondamental : Si $H$ est un sous-groupe de $(G,*)$ alors $(H,*)$ est lui-même un groupe.

Conséquence : Pour montrer qu'un "Truc" $H$ est un groupe avec une loi $*$, on démontre que c'est un sous-groupe d'un groupe connut $(G,*)$.

Exemples :

(a) Montrer que l'ensemble des suites complexes qui convergent vers 0 est un groupe avec $+$.

(b) Donner 5 exemples de sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

3. **Morphismes de Groupes :**

Soit $(G,*)$ et $(G',\perp)$ 2 groupes et soit $f : G \to G'$.

Définition : On dit que $f$ est un morphisme de groupes si : $\forall (x,y) \in G^2\ f(x*y) = f(x) \perp f(y)$.

Propriétés : $f(e_G) = e_{G'}$ et $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

Définitions :

$f$ est dit isomorphisme si :

$f$ est dit endomorphisme si :

$f$ est dit automorphisme si :

Définitions :

Noyau de $f$ : $\mathrm{Ker} f = \{x \in G \ / \ f(x) = e_{G'}\}$ (Sous-groupe de $(G,*)$).

Image de $f$ : $\mathrm{Im} f = \{y \in G' \ / \ \exists x \in G,\ y = f(x)\}$ (Sous-groupe de $(G',\perp)$).

Exemples :

(a) Donner un morphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ :

(b) Donner un morphisme de $(\mathbb{R}^2,+)$ vers $(\mathbb{R}^3,+)$ :

(c) Donner un morphisme $f$ de $(\mathbb{Z},+)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$ tel que $f(3) = i$ :

Remarques ou commentaires sur les groupes :

$(x*y)^{-1} =$

....

## III. Anneaux

1. **Définition :** Soit A un ensemble non vide muni de 2 L.C.I. notées $+$ et $*$ (dans la pratique $* = \times$ ou $* = \circ$).

On dit que $(A,+,*)$ est un anneau si :

(a) $(A,+)$ est un groupe abèlien.

(b) $*$ est associative et $A$ possède un élément neutre pour la loi $*$ (noté $e$).

(c) **$*$ est distributive par rapport à $+$ :**

$\forall (x,y,z) \in A^3 : (x+y)*z = x*z + y*z$ et $z*(x+y) = z*x + z*y$.

Si de plus $*$ est commutative alors l'anneau est dit commutatif.

Exemples : $(\mathbb{Z},+,\times)$ ; $(\mathbb{Q},+,\times)$ ; $(\mathbb{R},+,\times)$ ; $(\mathbb{C},+,\times)$ ; $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ ; $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,\times)$ ; $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+,\times)$.

2. **Propriétés :**
   (a) $\forall x \in A : x * 0 = 0 * x = 0$ (0 : élément absorbant).
   (b) $\forall (x,y) \in A^2 : -(x*y) = (-x)*y = x*(-y)$.
   (c) $\forall (x,y,z,t) \in A^4 : (x+y)*(z+t) = x*z + x*t + y*z + y*t$.

   **Attention :** On peut avoir $x * y = 0$ avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$. (Exemple : dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

3. **Eléments inversibles :** Soit $(A, +, *)$ un anneau et $a$ un élément de $A$. On dit que $a$ est un élément inversible de $A$, s'il existe un élément $b$ de $A$ tel que $a * b = b * a = e$ ($e$ : élement neutre pour $*$).
   Notation : $a^{-1}$.

   Définition : On appelle groupe des éléments inversibles de $A$, noté : $A^*$, l'ensemble des éléments inversibles de $(A, +, *)$.
   Ecrire avec des quantificateurs :

   $A^* = \{a \in A$ tel que :

   **Proposition :** $(A^*, *)$ est un groupe.
   En effet $e \in A$, si $x$ et $y$ sont dans $A^*$, alors $x * y$ et $x^{-1}$ aussi ($(x*y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$).

   **Exemples :** Déterminer
   $\mathbb{Z}^* = \{$
   $\mathbb{R}^* = \{$
   $\mathcal{L}(E)^* = \{$

4. **Newton :** Notation : Soit $(A, +, *)$ un anneau et $a$ élément de $A$, on note :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \;:\; na = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\ fois}$ , $(-n)a = -(na)$ et $0a = 0$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \;:\; a^n = \underbrace{a * a * \cdots * a}_{n\ fois}$ , $a^0 = e$ et si $a$ est inversible $a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$.
   Théorème : $\forall (a,b) \in A^2$ , $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si $a * b = b * a$, alors :
   $$\boxed{(a+b)^n \;=\; a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots\cdots + b^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.}$$
   Remarque : Ne pas oublier de verifier que $\underline{a * b = b * a}$. Dans le cas contraire, on développe par distributivité, exemple : $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + a*b + b*a$.

5. **Morphisme d'anneaux :**
   Soit $(A, +, *)$ et $(B, +, \perp)$ deux anneaux et soit $f$ une application de $A$ dans $B$.
   Définition : On dit que $f$ est un morphisme d'anneau de $A$ dans $B$ si :
   (a) $\forall (x,y) \in A^2 \; f(x+y) = f(x) + f(y)$
   (b) $\forall (x,y) \in A^2 \; f(x*y) = f(x) \perp f(y)$
   (c) $f(e_A) = e_B$.

## IV. Corps

1. **Définition :** Soit K un ensemble non vide munit de 2 L.C.I. notées $+$ et $\times$.
   On dit que $(K, +, \times)$ est un corps si :
   (a) $(K, +, \times)$ est un anneau commutatif.
   (b) Tout les éléments non nul de $K$ sont inversibles (c'est à dire :
   $\forall a \in K - \{0\}$ , $\exists b \in K$ tel que $a \times b = e$ ($e$ : élement neutre pour $\times$).
2. **Exemples :** $(\mathbb{Q}, +, \times)$ $(\mathbb{R}, +, \times)$ $(\mathbb{C}, +, \times)$

## RANG D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

**Définition** : Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E^p$ ($E$ $\mathbb{K}$-ev) on définit :

$$\boxed{\mathbf{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \mathbf{dim}(\ \mathbf{vect}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\ ).}$$

### A. Propriétés du rang

**Prop. 1** *$rg(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant \dim E$.*

**Prop. 2** *$rg(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant p$.*
*Corollaire : $rg(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant M$ .. $(p, \dim E)$*

**Prop. 3** $\boxed{\boldsymbol{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = p \iff (x_1, x_2, \ldots, x_p) \text{ est une famille} \qquad\qquad\qquad}$

**Prop. 4** *Pour toute permutation $\sigma$ de $[\![1, n]\!]$ : $\boldsymbol{rg}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \boldsymbol{rg}($*

**Prop. 5** *Pour tout $\lambda \neq 0$ : $\boldsymbol{rg}(x_1, x_2, \ldots, \ \lambda\mathbf{x_i}\ , \ldots, x_p) = \boldsymbol{rg}($*

**Prop. 6** *$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ , $\forall i \neq j$ : $\boldsymbol{rg}(x_1, x_2, \ldots, \ \mathbf{x_i} + \lambda\mathbf{x_j}\ , \ldots, x_p) = \boldsymbol{rg}($*

Corollaire : $\mathbf{rg}(x_1, x_2, \ldots, \ \mathbf{x_i}\ , \ldots, x_p) = \mathbf{rg}\left(x_1, x_2, \ldots, \ \mathbf{x_i} + \sum_{\mathbf{j} \neq \mathbf{i}} \lambda_{\mathbf{j}}\mathbf{x_j}\ , \ldots, x_p\right)$

**Prop. 7** *$\boldsymbol{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p, 0) = \boldsymbol{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$*

**Prop. 8** *Le rang est invariant si l'on change de base.*

**Prop. 9** *$\forall(\alpha_1 \ldots \alpha_q) \in (\mathbb{K}^*)^q$ : $\boldsymbol{rg}\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \vdots\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \alpha_q\\ \vdots\end{pmatrix}\right) = q$.*

*Démonstration : On montre que ces $q$ vecteurs forment une famille libre et on utilise Prop. 3*

**Remarque pratique importante** : Si $\mathbf{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = q$, alors il existe $q$ vecteurs de la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ qui forment une base de $\text{vect}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ (**Théorème de la base incomplète**).

**B. Détermination pratique :** On dispose le tableau des coefficients (sans parenthèses). On utilise la méthode du pivot de Gauss en faisant apparaitre des zéros (grâce à **prop.**2), éventuellement on effectue des permutations de colonnes et de lignes pour arriver à un système :

$$\mathbf{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \mathbf{rg}\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ * & \alpha_2 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \alpha_q & 0 & \ldots & 0 \\ * & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ * & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{avec } \underline{\underline{(\alpha_1 \ldots \alpha_q) \in (\mathbb{K}^*)^q}}$$

$$\text{Et donc } \boxed{\mathbf{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \qquad\qquad}$$

**Exemple** : $\mathbf{rg}\left(u\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, v\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, w\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right) = \mathbf{rg}\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix} = \mathbf{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 3 & -6 & 0\end{pmatrix} =$

# MATRICES

**Notations** : On notera $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. $\boxed{\text{Définitions}}$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

   (a) On appelle matrice de type $(n, p)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ :

   $$A = \left( \qquad \qquad \qquad \right)$$

   On la notera également : $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

   (b) Si $n = p$ on dit que la matrice est

   (c) On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrice de type $n, p$. et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrice carrées de type $n, n$.

   (d) Si $n = 1$ on dit que $A$ est une matrice...

   (e) Si $p = 1$ on dit que $A$ est une matrice...

   (f) $I_n =$

   (g) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On dit que :

      i. A est **triangulaire supérieure** si : $\qquad A = \left( \qquad \qquad \right)$

      ii. A est **triangulaire inférieure** si : $\qquad A = \left( \qquad \qquad \right)$

      iii. A est **diagonale** si : $\qquad A = \left( \qquad \qquad \right)$

      iv. A est **symétrique** si :

      v. A est **antisymétrique** si :

   (h) Soit $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant l \leqslant p$.

   On appelle **matrice élémentaire** $\qquad E_{k,l} =$

2. $\boxed{\text{Opérations sur les matrices}}$

   (a) **$+$ et $\cdot$**

   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

   On définit $A + B =$ $\qquad\qquad\qquad$ et $\lambda A =$

   (b) $\times$

   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ .

   On définit la matrice $A \times B = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ par $c_{i,j} = \sum_{\alpha=1}$

   **Exemples** : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ , $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \end{pmatrix}$.

$AX =$ $\qquad$ $XB =$ $\qquad$ $BX =$ $\qquad$ $AB =$

**Résultat important** :
Soit $(k,l,k',l') \in [1,n]^4$. On a , dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
Si $l \neq k'$ : $E_{k,l}E_{k',l'} =$ $\qquad$ et si $l = k'$ : $E_{k,l}E_{k',l'} =$

(c) **Transposée**
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$. On définit la matrice transposée ${}^tA =$

**Propriétés** :
${}^tA \in$ $\qquad$ ${}^t(A+B) =$ $\qquad$ ${}^t(\lambda A) =$ $\qquad$ ${}^t(AB) =$ $\qquad$ ${}^t({}^t(A)) =$

3. Structures

(a) **Théorème 1**

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\qquad$ de dimension

De plus $\qquad$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (appelée base canonique).

**Conséquence** : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ on a l'écriture vectorielle : $A = \sum$ $\qquad$ .

(b) **Théorème 2**

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\cdot,\times)$ est une $\qquad$ de dimension

De plus $\qquad$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (appelée base canonique).
$I_n$ est

**Remarque 1** : On a Newton c'est-à-dire si $\underline{AB = BA}$ alors $(A+B)^N =$

**Remarque 1** : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $AB =$

Conséquence :

**Définition** :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on dit que $A$ est inversible si
Dans ce cas $\quad$ est unique et on note $A^{-1} =$

**Définition** : L'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$ et est appelé le groupe linéaire.

On a $\boxed{(GL_n(\mathbb{K}),\quad) \text{ est un } \qquad\qquad}$

(c) Soit $T_n^+$ (resp. $T_n^-$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures), soit $D_n$ l'ensemble des matrices diagonales, soit $S_n$ (resp. $A_n$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) le tout dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

i. $T_n^+$ est un(e) $\qquad$ de dimension...
ii. $T_n^-$ est un $\qquad$ de dimension...
iii. $D_n$ est un $\qquad$ de dimension...
iv. $S_n$ est un $\qquad$ de dimension...
v. $A_n$ est un $\qquad$ de dimension...

vi. $S_n$ et $A_n$ sont...

4. $\boxed{\text{Matrice d'une application linéaire, d'un endomorphisme}}$

(a) **Matrice d'une application linéaire**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de $E$.

Soit $F$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{C} = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ une base de $F$.

Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$.

On appelle matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ : $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

On a donc les relations pour tout indice .. :

$f(\overrightarrow{e}\ ) = \sum$

**Réciproquement** : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de $E$, soit $F$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{C} = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ une base de $F$.
Alors il existe une unique application linéaire $f$ telle que $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A$.
Si $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$ rapportés à leurs bases canoniques on dit que $f$ est l'application linéaire **canoniquement associé** à $A$.

**Conséquence** :
$\varphi : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $f \mapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est un

(b) **Matrice d'un endomorphisme**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de $E$.

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ dans $E$.

On appelle matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ : $M_{\mathcal{B}}(f) = \qquad\qquad = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

(c) **Écriture matricielle de $y = f(x)$**

**Proposition** : Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de $E$.

Soit $F$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{C} = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ une base de $F$.

Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ et soit $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Soit $x \in E$ de matrice colonne $X$ dans la base $\mathcal{B}$.

Alors le vecteur $f(x)$ a pour matrice : $\boxed{\qquad\qquad}$

**Exemple** : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et $f$ canoniquement associée.

Définir $f$ analytiquement : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) =$

(d) **Produit**

**Proposition** : Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathcal{B}$, soit $F$ un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathcal{C}$ et soit $G$ un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathcal{D}$. Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ et $g$ une application linéaire de $F$ dans $G$.
Alors $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) =$
Car le produit matriciel a été défini pour cela !

**Corollaire** : $\Psi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f \mapsto M_{\mathcal{B}}(f)$ est un

(e) **Matrices de passage**

**Définition** : Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \dots, \overrightarrow{e_n}')$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-ev $E$.

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}') = \left( \qquad \right)$

**Proposition** : $Pass(\mathcal{B},\mathcal{B}') \in$ et $Pass(\mathcal{B}',\mathcal{B}) =$

(f) **Formules de changement de bases pour un vecteur**

**Théorème** : Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $E$ et soit $\mathcal{B}_2$ une "nouvelle" base de $E$. Soit $x \in E$ de matrice colonne $X_1$ dans la base $\mathcal{B}_1$ et de matrice colonne $X_2$ dans la base $\mathcal{B}_2$. Soit $P = Pass(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.

On a la relation $\boxed{\qquad}$ et donc $\boxed{\qquad}$

(g) **Formules de changement de bases pour un endomorphisme**

**Théorème** : Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $E$ et soit $\mathcal{B}_2$ une "nouvelle" base de $E$. Soit $f$ un endomorphisme de $E$. Soit $P = Pass(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$. Posons $A = M_{\mathcal{B}_1}(f)$ et $D = M_{\mathcal{B}_2}(f)$

On a la relation entre $A$ et $D$ : $\boxed{\qquad}$ et donc $\boxed{\qquad}$

5. **Éléments inversibles- calcul de l'inverse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**

**Problèmes** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comment "voir" si $A$ est inversible et si oui comment calculer l'inverse de $A$ ?

**Théorème** :

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , $E$ un ev rapporté à une base $\mathcal{B}$ et $f : E \to E$ telle que $M_{\mathcal{B}}(f) = A$
> $A$ est inversible $\iff f$ est $\iff \mathrm{rg}(f) =$
>
> De plus $A^{-1} =$

**Exemple** : Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ rapporté à $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et $f : E \to E, P(X) \mapsto P(X+1)$.

On pose $A = M_{\mathcal{B}}(f)$. On a $A^{-1} = \left( \qquad \right)$

**Définition** : On appelle rang d'une matrice $A$ quelconque noté $\mathrm{rg}(A)$ le rang des

**Conséquence** : $A$ est inversible $\iff$

**Remarque trés importante** : En général $AB \neq BA$ mais par contre si $AB = I_n$ alors on a automatiquement $BA = I_n$ et donc $A^{-1} =$

**Calcul pratique de l'inverse** :

On résout le système d'inconnue $X$ et de paramètre $Y$ :

$$AX = Y \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n = y_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = b_{1,1}y_1 + \cdots + b_{1,n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n,1}y_1 + \cdots + b_{n,n}y_n \end{cases} \text{ d'où } A^{-1} = \left( \qquad \right)$$

**Cas particuliers importants** :

(a) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible ssi et $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} =$

(b) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est inversible ssi et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} =$

(c) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est inversible ssi et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} =$

(d) $({}^tA)^{-1} =$

## SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Soit à résoudre le système : $\mathcal{S} \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$

**Remarque** : Les $a_{i,j}$ et les $b_i$ sont fixés dans le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les $x_j$ sont les inconnues du systèmes $\mathcal{S}$.

**Définition** : Deux systèmes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont dits équivalents s'ils ont mêmes ensembles de solutions.

**Notation** : $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}'$.

1. **Interprétation matricielle**

   Résoudre $\mathcal{S}$ revient à chercher la matrice colonne : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ telle que $\boxed{AX = B}$ avec $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

   **Définition** : On appelle rang du système $\mathcal{S}$ le rang de la matrice $A$.

   **Notation** : $\mathrm{rg}(\mathcal{S})$.

2. **Interprétation vectorielle**

   Soit $E$ un $\mathbb{K}$-EV de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

   Soit $\overrightarrow{u_1} \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$ , $\overrightarrow{u_2} \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix}$ , ..., $\overrightarrow{u_p} \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ écrits dans la base $\mathcal{B}$.

   Résoudre le système $\mathcal{S}$ revient à chercher un p-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$ : $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que : $\boxed{x_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + x_p\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{v}}$.

   **Remarque** : $\mathrm{rg}(\mathcal{S}) = \mathrm{rg}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$.

   **Discussion** : Le système possède une solution **SSI** $\overrightarrow{v} \in \mathrm{vect}(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p)$.

   **Résolution** : Posons $r = \mathrm{rg}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$. Quitte à permuter les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}$ (cela revient à permuter les inconnues $x_1, \ldots, x_p$) on peut supposer que $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_r})$ est une base de $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$.

   **Premier cas** : $\overrightarrow{v} \notin \mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$.

   Le système $\mathcal{S}$ n'admet aucune solution.

   **Deuxième cas** : $\overrightarrow{v} \in \mathrm{vect}(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p)$.

   Donc $\exists!(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\overrightarrow{v} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \cdots, \alpha_r\overrightarrow{u_r}$. Comme $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_r)$ est une base de $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ il existe des scalaires $\lambda_{i,j}$ tels que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_{r+1}} = \lambda_{r+1,1}\overrightarrow{u_1} + \cdots + \lambda_{r+1,r}\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_{r+2}} = \lambda_{r+2,1}\overrightarrow{u_1} + \cdots + \lambda_{r+2,r}\overrightarrow{u_r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overrightarrow{u_p} = \lambda_{p,1}\overrightarrow{u_1} + \cdots + \lambda_{p,r}\overrightarrow{u_r} \end{cases}$$

Le système $\mathcal{S}$ est donc équivalent à l'équation : $x_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + x_p\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{v}$ donc équivalent au système : $\begin{cases} x_1 + \lambda_{r+1,1}x_{r+1} + \cdots + \lambda_{p,1}x_p = \alpha_1 \\ x_2 + \lambda_{r+1,2}x_{r+1} + \cdots + \lambda_{p,2}x_p = \alpha_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r + \lambda_{r+1,r}x_{r+1} + \cdots + \lambda_{p,r}x_p = \alpha_r \end{cases}$

(on égalise les coordonnées dans la base $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_r)$ de vect$(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p)$)

**Conséquence** : Une solution du système $\mathcal{S}$ est obtenue en donnant à $x_{r+1}, \ldots, x_p$ des valeurs quelconques, les $x_1, \ldots, x_r$ prenant alors les valeurs uniques :

$x_i = -\lambda_{r+1,i}x_{r+1} - \cdots - \lambda_{p,i}x_p + \alpha_i$.

**Conclusion** :

$*$ Pour qu'il y ait une solution unique il **faut** que $r = p$.

$*$ Si $r = n$ alors le système possède au moins une solution (car vect$(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p) = E$)

$*$ Si $r = p = n$ alors le système possède une unique solution.

3. **Interprétation linéaire**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-EV de dimension p rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.
Soit $F$ un $\mathbb{K}$-EV de dimension n rapporté à une base $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ l'unique application linéaire associée à la matrice $A$ du système $\mathcal{S}$ ($A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$)

Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur de $F$ défini par $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ écrit dans la base $\mathcal{C}$.

Résoudre $\mathcal{S}$ revient à chercher un vecteur $\overrightarrow{x}$ tel que $\boxed{f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{v}}$.

**Discussion** : Le système possède une solution **SSI** $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im} f$.

**Résolution** :

**Premier cas** : $\overrightarrow{v} \notin \mathrm{Im} f$.

Le système $\mathcal{S}$ n'admet aucune solution.

**Deuxième cas** : $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im} f$.

Soit $\overrightarrow{v_0} \in E$ tel que $\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{v_0})$. On a alors :

$f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{v} \iff f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{v_0}) \iff f(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{v_0}) = 0 \iff \overrightarrow{x} - \overrightarrow{v_0} \in \ker f \iff \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{v_0} + \ker f$

**Conséquence** : L'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{x}$ solutions a une structure de **sous-espace affine (S.E.A.)**.

**Conclusion** :

Posons $r = \mathrm{rg} f$.

$*$ Si $r = p$ , le système possède au **plus** une solution (car $\ker f = \{0\}$)

$*$ Si $r = n$ , le système possède au **moins** une solution (car $\mathrm{Im} f = F$)

$*$ Si $r = p = n$ , le système possède une **unique** solution (car $f$ est bijective). De plus la solution est $f^{-1}(\overrightarrow{v})$.

4. **Résolution d'un système $\mathcal{S}$**

**Définition** : On appelle système de **Cramer** tout système de n équations à n inconnues de rang n.

**Conséquence** : La matrice $A$ du système $\mathcal{S}$ est inversible, le système admet donc une **unique solution**. Sous forme matricielle : $\boxed{\mathcal{S} \iff AX = B \iff X = A^{-1}B}$.

5. **Méthode pratique "PIVOT DE GAUSS" de résolution d'un système $\mathcal{S}$**

**Théorème** : On ne change pas l'ensemble des solutions d'un système $\mathcal{S}$ en effectuant les opérations (dites élémentaires) suivantes :

$*$ Échange de 2 lignes.
**Notation** : $L_i \leftrightarrow L_j$
$*$ Remplacement d'une ligne $L_i$ par cette ligne $L_i$ additionnée de $\lambda$ fois une autre ligne $L_j$.
**Notation** : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
$*$ Remplacement d'une ligne $L_i$ par cette ligne $L_i$ multipliée par $\boxed{\lambda \neq 0}$.
**Notation** : $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
**Remarque** : On peut également échanger l'ordre des inconnues (par exemple : $3x_1 + x_2 + 7x_3 = 5$ devient $x_2 + 3x_1 + 7x_3 = 5$)
**Algorithme de Gauss** : Par permutation des lignes et éventuellement des inconnues on amène un coefficient non nul : $\underline{\alpha_1}$ devant l'inconnue "en haut et à gauche" : ce coefficient non nul est appelé "pivot". A l'aide de ce pivot par des opérations du type $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_1$ on fait apparaitre des 0 **sous** ce pivot :

$$\mathcal{S} \iff \left\{\begin{array}{l} \underline{\alpha_1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \underline{\alpha_1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ 0x_1 + a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{2,p}x_p = b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0x_1 + a'_{n,2}x_2 + \cdots + a'_{n,p}x_p = b'_n \end{array}\right.$$

Puis on réitère ce procédé jusqu'en "bas". D'où on obtient :

$$\mathcal{S} \iff \left\{\begin{array}{rl} \underline{\alpha_1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1,p}x_p = b_1 & \\ \underline{\alpha_2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a'_{2,p}x_p = b'_2 & \\ \ddots\qquad\qquad & \\ \underline{\alpha_r}x_r + \cdots\cdots + a'_{r,p}x_p = b'_r & \quad \text{Avec } \forall \in [1, r] : \alpha_i \neq 0. \\ 0 = b'_{r+1} & \\ \vdots\ \ & \\ 0 = b'_n & \end{array}\right.$$

**Discussion** :

(a) Si l'un des $b'_i$ avec $i \geqslant r+1$ est non nul, alors le système $\mathcal{S}$ n'admet aucune solution.
(b) Si $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \cdots = b'_n = 0$ et $r = p$, alors le système $\mathcal{S}$ admet une unique solution que l'on détermine par le "bas" : On calcul $x_p$ puis $x_{p-1}\dots$ jusqu'à $x_1$.
(c) Si $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \cdots = b'_n = 0$ et $r < p$, alors on pose $\lambda_{r+1} = x_{r+1}$, $\lambda_{r+2} = x_{r+2}\dots$, $\lambda_n = x_n$ qui "deviennent" des paramètres (pouvant prendre des valeurs quelconques dans $\mathbb{K}$) et on exprime , à l'aide du système obtenu, $x_1, x_2, \dots, x_r$ en fonctions de ces paramètres $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n$.

**Exemple** : $\mathcal{S}\left\{\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x+2y-2z=7 \\ 2x+3y-z=10 \end{array}\right.$

On a $\mathcal{S} \iff \left\{\begin{array}{rl} x+y+z=3 & \\ y-3z=4 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ y-3z=4 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x+y+z=3 & \\ y-3z=4 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 0=0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$

On pose $\lambda = z$. On a alors $\mathcal{S} \iff \left\{\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ y-3z=4 \\ z=\lambda \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-4\lambda-1 \\ y=3\lambda+4 \\ z=\lambda \end{array}\right.$

**Conclusion** : L'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$ est $S = \{(-4\lambda - 1, 3\lambda + 4, \lambda) \text{tel que } \lambda \in \mathbb{K}\}$.
**Remarque** : L'ensemble des solutions a bien une structure de S.E.A. : $S$ est la droite affine de $\mathbb{K}^3$ passant par le point $\Omega(-1, 4, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-4, 3, 1)$.
**Disposition des calculs "néo-classique"** :

$$\mathcal{S} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -2 & | & 7 \\ 2 & 3 & -1 & | & 10 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -3 & | & 4 \\ 0 & 1 & -3 & | & 4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \text{ etc....}$$

6. **Résolution d'un système $\mathcal{S}$ avec les déterminants (Formules de Cramer)**

Soit à résoudre le système de **Cramer** (voir le 4.) : $\mathcal{S} \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$

On pose

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \text{ et pour } i \in [1,n] : \Delta_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On alors l'unique solution $(x_1, \dots, x_n)$ du système $\mathcal{S}$ donné par les formules dites de Cramer :

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} \ , x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots , x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.}$$

**Exercice** : Problème des bœufs de Newton.
75 bœufs ont broutés en 12 jours l'herbe d'un pré de 60 ares ; 81 bœufs ont broutés en 15 jours celle d'un pré de 72 ares. Combien de bœufs un pré de 96 ares pourra t-il nourrir pendant 18 jours ? On suppose constantes la ration quotidienne de chaque animal, la quantité d'herbe existant initialement par are et la quantité d'herbe qui pousse par are quotidiennement.

# GROUPE SYMÉTRIQUE

1. **Définitions**

On appelle **groupe symétrique**, l'ensemble des bijections de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans $\{1, 2, \dots, n\}$.
Notation : $\mathcal{S}_n$.
On a donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_n = \Big\{\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\} \text{ tel que } \sigma \text{ soit bijective}\Big\}}.$$

**Vocabulaire** : Les éléments de $\mathcal{S}_n$ (des applications bijectives) sont appelés des **permutations** de $[\![1, n]\!]$ et notés :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Le produit de composition $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{S}_n$.
Exemple de manipulation :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$

2. **Structure- cardinal**

**Théorème** : $(\mathcal{S}_n, \circ)$ est un groupe de cardinal .
De plus dès que $n \geqslant 3$, $(\mathcal{S}_n, \circ)$ n'est pas commutatif.
**Remarque** : $\circ$ représente la composition des applications.

3. **Cycle, Transpositions**

Soit $(a_1, \dots, a_p) \in \{1, 2, \dots, n\}^p$, 2 à 2 distincts (donc $p \leqslant n$).
On appelle **Cycle** de longueur $p$ et de **support** $(a_1, \dots, a_p)$, l'unique permutation $s$ vérifiant :

(a) $s(a_1) = a_2, \quad s(a_2) = a_3, \ldots, s(a_{p-1}) = a_p$ et $s(a_p) = a_1$.

(b) $s(x) = x$ pour tous les autres entiers de $\{1, 2, \ldots, n\} - \{a_1, \ldots, a_p\}$.

**Notation** : On note ce cycle : $s = (a_1, \ldots, a_p)$ .

On appelle **Transposition** tout cycle de longueur 2 :
$s = (a\ b)$ (c'est-à-dire : $s(a) = b$ et $s(b) = a$ et $s(x) = x$ pour $x \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{a, b\}$).

**Théorèmes de décomposition** :

**Théorème 1** : Toute permutation se décompose en produit (de composition) de cycles de supports disjoints 2 à 2. De plus ces cycles commutent 2 à 2 et cette décomposition est unique (aux permutations de cycles près). **Démonstration** :

**Théorème 2** : Toute permutation se décompose en produit (de composition) de transpositions (mais cette décomposition n'est pas unique). **Démonstration** :

**Exemple** : Décomposer $\sigma_0$ en produit de cycles puis en produit de transpositions, avec :

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 5 & 3 & 8 & 14 & 7 & 9 & 1 & 2 & 12 & 6 & 13 & 10 & 11 & 18 & 15 & 16 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

4. **Signature (+ ou −)**

**Théorème-définition** :

Il existe une unique application $\varepsilon : \mathcal{S}_n \longrightarrow \{-1, 1\}$ telle que :

(a) $\forall(\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2 : \varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma')$ (morphisme de groupes)

(b) Si $\sigma$ est une transposition alors $\varepsilon(\sigma) = -1$

**Proposition** : Si $\sigma$ est un cycle de longueur $p$, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p+1}$.

**Exemple** : Calculer la signature de $\sigma_0$ ci dessus, $\varepsilon(\sigma_0) =$

**Groupe Alterné** : On appelle groupe alterné, le sous groupe de $\mathcal{S}_n$ constitué des permutations de signature $+1$.

**Notation** : $\mathcal{A}_n$. On a donc $\mathcal{A}_n = \{\sigma \in \mathcal{S}_n / \varepsilon(\sigma) = +1\}$.

**Remarque** : $\text{card}(\mathcal{A}_n) = \dfrac{n!}{2}$.

5. **Forme n-linéaire alternée**

Soit $E$ un $K - ev$ de dimension $n$.
Soit $f$ une application de $E^n$ dans $\mathbb{K}$.

(a) On dit que $f$ est $\boxed{n\text{-linéaire}}$ si l'expression de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est linéaire par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots$ et $x_n$.
C'est-à-dire : $\forall(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, l'application :
$t \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{t}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ est **linéaire**.

(b) On dit que $f$ est $\boxed{\text{alternée}}$ si
$\forall(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ tel que s'il existe $i \neq j$ avec $x_i = x_j$ alors on a $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

(c) On dit que $f$ est $\boxed{\text{antisymétrique}}$ si $\forall(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$ :

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

**Théorème** : Si $f$ est $n$-linéaire alors $f$ est alternée **SSI** $f$ est antisymétrique.

**Exemples** : Soit $f$ une forme $n$-linéaire et alternée. Soient $u, v, x, y, z, u', v', x_i$ des vecteurs de $E$ et $a, b, c, d$ des éléments de $\mathbb{K}$. Développer :

(a) $f(u+v,y,z)=$

(b) $f(u+v,u'+v',z)=$

(c) $f(x_4,x_3,x_2,x_1)=$

(d) Soit $(u,v)$ une base de $E$ ($E$ de dimension 2). $f(au+bv,cu+dv)=$

(e) Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de $E$ ($E$ de dimension $n$).

Si $x_1=\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}e_i$ , ... , $x_j=\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i$ , ...et $x_n=\sum_{i=1}^{n} a_{i,n}e_i$.

Alors on "éclate" $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ en une Méga-somme :

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}e_i,\dots,\sum_{i=1}^{n} a_{i,n}e_i)=f(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}e_{i_1},\dots,\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}e_{i_n})$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}f(e_{i_1},\sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2}e_{i_2},\dots,\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}e_{i_n})$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}\sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2}f(e_{i_1},e_{i_2},\dots,\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}e_{i_n})=\cdots$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}\sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}f(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1}a_{i_2,2}\cdots a_{i_n,n}f(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})$$ on a donc une somme de termes.

Ensuite $f(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})$ est nul à chaque fois que dans le $n$-uplet $(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})$ il y a deux indices (au moins) qui sont égaux. Autrement dit il y a exactement autant de $n$-uplet $(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})$ où les éléments sont 2 à 2 distincts que de $n$-uplet $(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\dots,e_{\sigma(n)})$ avec $\sigma\in\mathcal{S}_n$.

Donc $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}f(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\dots,e_{\sigma(n)})$

D'autre part par anti-symétrie : $f(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\dots,e_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)f(e_1,e_2,\dots,e_n)$. En conséquence :

$$\boxed{f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\left[\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}\right]f(e_1,e_2,\dots,e_n)}.$$

**Définition** :

$$\boxed{det_{\mathcal{B}}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}}$$

s'appelle le **déterminant** de $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ dans la base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$.

## POINTS A SAVOIR SUR LES MATRICES ET LES DÉTERMINANTS

1. **Matrices par blocs , déterminant d'une matrice triangulaire par blocs**

$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}=$$

2. **Matrices équivalentes et rang - matrice $J_r$**
   **Définition** : $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ sont équivalentes si :

   **Définition** : $J_r(n,p) = \qquad\qquad \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

   **Proposition** : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est équivalente à $J_r(n,p)$ SSI

   **Corolaire** : $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ sont équivalentes SSI :

3. **Caractérisation du rang par matrices extraites**

4. **Matrices semblables**
   **Définition** : $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ sont semblables si :

5. **Trace d'une matrice , d'un endomorphisme , d'un projecteur**

6. **Opérations élémentaires sur les matrices (6)**

7. **Déterminant d'une famille de vecteurs, d'une matrice et d'un endomorphisme**

8. **Développement selon une ligne ou une colonne**
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,
   Développement selon la i-ème ligne : $\det A =$

   Développement selon la j-ème colonne : $\det A =$
9. **Cofacteurs - comatrice**
   **Définition** : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on appelle matrice des cofacteurs de $A$ :
   $\mathrm{com}(A) =$

   **relation fondamentale** :
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , ${}^t com(A)A = A\,{}^t com(A) =$

10. **Déterminant de Vandermonde**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

11. **Transvections par blocs. Invariance du déterminant.**

# PRODUITS SCALAIRES

## I. Définitions

Soit $E$ un $\mathbb{R}-ev$ et soit $f$ une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.
On dit que $f$ est un produit scalaire sur $E$ si $f$ vérifie :

1. $f$ est symétrique : $\boxed{\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2 : \ f(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}) = \qquad\qquad}$
2. $f$ est bilinéaire : $\boxed{\begin{array}{l} \forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}', \overrightarrow{y}, \lambda) \in E^3 \times \mathbb{R} : f(\lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x}', \overrightarrow{y}) = \qquad\qquad\qquad \\ \forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{y}', \lambda) \in E^3 \times \mathbb{R} : f(\overrightarrow{x}, \lambda\overrightarrow{y} + \overrightarrow{y}') = \end{array}}$

   Remarque : La deuxième ligne se déduit de la première grâce à la symétrie.
3. $f$ est définie positive : $\boxed{\forall x \in E : \ f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) \geqslant 0 \text{ et } f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0 \Rightarrow \qquad\qquad}$

**Notation :** $f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ se note $(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})$ ou $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >$ ou $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.

**Inégalité de Cauchy-Schwarz :** $\boxed{\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2 : (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})^2 \leqslant \qquad\qquad\qquad}$.

**Espace pré-hilbertien réel, Espace euclidien :**
On appelle **Espace pré-hilbertien réel** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
On appelle **Espace euclidien** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et muni d'un produit scalaire.

**Norme et distance associée à un produit scalaire :**
Soit $E$ un espace pré-hilbertien réel muni d'un produit scalaire noté $(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})$.
On appelle norme euclidienne d'un vecteur $x \in E$ (associée à ce produit scalaire) le réel :
$\boxed{\|\overrightarrow{x}\|_2 = \sqrt{(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{x})}}$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité la norme est simplement notée : $\|\overrightarrow{x}\|$.

On appelle distance euclidienne de 2 vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de $E$ associée à ce produit scalaire le réel :
$\boxed{d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}\|_2}$

**Théorème :** $\overrightarrow{x} \mapsto \|\overrightarrow{x}\|_2$ est une norme sur $E$. C'est-à-dire :

1. $\forall\overrightarrow{x} \in E : \|\overrightarrow{x}\|_2 \qquad\qquad$ .
2. $\forall\overrightarrow{x} \in E : \|\overrightarrow{x}\|_2 = 0 \Rightarrow \qquad\qquad$ .
3. $\forall(\overrightarrow{x}, \lambda) \in E \times \mathbb{R} : \|\lambda\overrightarrow{x}\|_2 = \qquad\qquad$ .
4. $\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2 : \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|_2 \leqslant \qquad\qquad$ (inégalité $\qquad\qquad$ ).

**Vecteur unitaire :** $\overrightarrow{x} \in E \ / \ \|\overrightarrow{x}\|_2 = 1$.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, $\dfrac{\overrightarrow{u}}{\qquad}$ et $-\dfrac{\overrightarrow{u}}{\qquad}$ sont **les** vecteurs unitaires de vect$(\overrightarrow{u})$.

Remarque : L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit aussi : $\boxed{|(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})| \leqslant \qquad\qquad\qquad}$

**Exemples fondamentaux :**

1. $E = \mathbb{R}^n$ $\forall\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\forall\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$
   $\boxed{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}$ (appelé produit scalaire $\qquad\qquad$ de $\mathbb{R}^n$).

2. $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ -ev des applications continues sur $[a,b]$).

   $\forall (f,g) \in E^2$ $\boxed{(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.}$

**Relation entre produit scalaire et norme :** (On notera $\|\overrightarrow{x}\|$ la norme euclidienne de $\overrightarrow{x}$)
$\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$ :
$\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 =$ , $\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2 =$

$\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 + \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2 = 2(\qquad)$

$$(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) = \frac{\qquad}{2} \text{ et } (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) = \frac{\qquad}{4}$$

**Remarque** : Les deux dernières égalités sont appelées **identités de polarisation**. Elles servent à écrire le produit scalaire uniquement à l'aide de normes.

**Orthogonalité :** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire $(|)$.

1. **Vecteurs orthogonaux** : Soit $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ dans $E$, on dit que $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ sont orthogonaux et l'on note $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y}$ si .
2. **Sous espaces orthogonaux** : Soit $F$ et $G$ 2 sev de $E$. On dit que $F$ et $G$ sont orthogonaux si : $\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F \times G$ : (c'est-à-dire $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y}$).
3. **Famille orthogonale** : Soit $(\overrightarrow{x_i})_{i \in I}$ une famille de vecteurs de $E$ avec $I \neq \emptyset$. On dit que cette famille est orthogonale si : $\forall (i,j) \in I^2$ , $i \neq j \Rightarrow$ (i.e. $\overrightarrow{x_i}$ $\overrightarrow{x_j}$)
4. **Famille orthonormale** : Soit $(\overrightarrow{x_i})_{i \in I}$ une famille de vecteurs de $E$. On dit que cette famille est orthonormale si : $\forall (i,j) \in I^2$ , $i \neq j \Rightarrow$ et .
5. **Théorème de Pythagore** : $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 =$
6. **"Avantage" d'une base orthogonale** : Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une base orthogonale de $E$. Si on pose pour tout $i \in [1,n]$ $\lambda_i = \|\overrightarrow{e_i}\|^2 = (\overrightarrow{e_i}|\overrightarrow{e_i})$, on a alors
   Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, Pour tout $\overrightarrow{y} \in E$ de coordonnées $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$ :
   $\|\overrightarrow{x}\|^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ et $(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) =$ .
7. **"Avantage" d'une base orthonormale** : Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une base orthonormale de $E$.
   Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, Pour tout $\overrightarrow{y} \in E$ de coordonnées $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$ :

   $$\boxed{\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\qquad\qquad} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) = \qquad .}$$

**Orthogonal d'un Sous-espace :** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire $(|)$ et soit $F$ un sev de $E$. On appelle orthogonal de $F$ le sous-espace noté $F^\perp$ :

$$\boxed{F^\perp = \{x \in E \ / \ \forall a \in F \ , \ (x|a) = 0\}.}$$

**Proposition :** $F^\perp$ est un $SEV$ de $E$ et $F \cap F^\perp =$ .

**Écriture matricielle du produit scalaire :**
Soit $f$ un produit scalaire, noté $(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})$, sur $E$ et soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une base de $E$.
On appelle **matrice du produit scalaire** $f$ dans la base $\mathcal{B}$, notée $M_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice
$\boxed{A = (a_{i,j}) \text{ où } a_{i,j} = (e_i|e_j)}$
**Remarque :** Comme $f$ est symétrique, $M_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique (${}^tA = A$).
Si $\mathcal{B}$ est **orthogonale** alors $M_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale et si $\mathcal{B}$ est **OTN** alors $M_{\mathcal{B}}(f) = I_n$.

**Écriture matricielle :** Posons $A = M_{\mathcal{B}}(f)$. Soit $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ 2 vecteurs de $E$ et soit $X$ et $Y$ leurs matrices colonnes dans la base $\mathcal{B}$.

On a : $\boxed{(x|y) = {}^tXAY}$ , **conséquence** : si $\mathcal{B}$ est **OTN** alors $\boxed{(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) = \qquad\qquad}$.

**GROUPES : début**

# I. Généralités

## 1°) Définitions

### a) Définition 1

Soit $G$ un ensemble non vide. On appelle **loi de composition interne** sur $G$ toute application de $G \times G$ dans $G$.

On la note en général : $*$ , $+$ , $\cdot$ , $\times$ , $\circ$ ...

**Remarque** : Lorsque la loi est notée $\cdot$ , le produit $x \cdot y$ est noté $xy$.

### b) Définition 2

Soit $G$ un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $\cdot$ sur $G$.

On dit que $(G, \cdot)$ est un **groupe** si

> i) La loi $\cdot$ est associative : $\forall (x, y, z) \in G^3$, $(xy)z = x(yz)$
> ii) $G$ admet un élément neutre pour la loi $\cdot$ : $\exists e \in G$ tel que $\forall x \in G$, $xe = ex = x$.
> iii) Tout élément de $G$ admet un symétrique pour la loi $\cdot$ :
> $\forall x \in G$, $\exists x' \in G$ tel que $xx' = x'x = e$.

**Remarque 1** : S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la loi on dira simplement que $G$ est un groupe au lieu de $(G, \cdot)$.

**Remarque 2** : L'élément neutre est noté généralement $e$ ou $e_G$ ou $1_G$ ou 1 ou pour une loi multiplicative et $0_G$ ou 0 pour une loi additive.

**Remarque 3** : Le symétrique est appelé inverse pour une loi multiplicative et noté $x^{-1}$ et opposé pour une loi additive et noté $-x$ .

**Exercice** : Donner 5 (ou plus !) exemples de groupes et 3 exemples d'ensembles munis d'une loi de composition qui ne sont pas des groupes.

**Proposition 1** : L'inverse de $xy$ dans le groupe $(G, \cdot)$ est $y^{-1}x^{-1}$.

**Proposition 2** : Dans un groupe tout élément est **simplifiable**. C'est-à-dire que si $(G, \cdot)$ est un groupe alors :

$$\boxed{\forall a \in G,\ \forall (x, y) \in G^2 : \qquad ax = ay \Longrightarrow x = y \qquad \text{et} \qquad xa = ya \Longrightarrow x = y.}$$

### c) Définition 3

On dit que le groupe $(G, \cdot)$ est **commutatif** (ou abélien) si la loi $\cdot$ est commutative :

$$\forall (x, y) \in G^2,\ xy = yx$$

### d) Règles de calcul :

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Soit $x \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Le produit $x \cdot x \cdot \dots \cdot x$ ($n$ exemplaires de $x$) est noté $x^n$.

$x^0$ est par convention noté $e$

Le produit $x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot \dots \cdot x^{-1}$ ($n$ exemplaires de $x^{-1}$) est noté $x^{-n}$.

**Proposition** : $\forall x \in G$ et $\forall (n, p) \in \mathbb{Z}^2$ : $x^n x^p = x^{n+p}$ et $(x^n)^p = x^{np}$.

**Remarque** : Si la loi est additive, $x^n$ est alors noté $nx$.

2°) **Sous-Groupe**

**Définition** : $H$ est un **sous-groupe** de $(G,\cdot)$ si $H$ est stable pour la loi $\cdot$ et si $(H,\cdot)$ est lui même un groupe.

**Théorème** : Soit $(G,\cdot)$ un groupe et soit $H\subset G$. On a :

$$\boxed{H \text{ est un sous groupe de } (G,\cdot) \qquad \boxed{\text{SSI}} \qquad \begin{cases} H\neq\emptyset & (e_G\in H)\\ \forall(x,y)\in H^2 \ : \ xy\in H \text{ et } x^{-1}\in H\end{cases}}$$

**Remarque** : On peut contracter $\forall(x,y)\in H^2 : xy\in H$ et $x^{-1}\in H$ en $\forall(x,y)\in H^2$ : $xy^{-1}\in H$

**Corollaire** : Pour montrer **qu'un ensemble $E$ est un groupe** il suffit de prouver qu'il est inclus dans un groupe connu $G$ et de montrer que c'est un sous groupe de $G$.

3°) **Morphisme de groupe**

**Définition** : L'application $f$ de $(G,\cdot)$ dans $(G',\cdot)$ est un **morphisme de groupe** si

$$\forall(x,y)\in G^2\ f(xy)=f(x)f(y)$$

**Proposition 1** : Si $f$ est un morphisme de $G$ dans $G'$ alors

$$f(e_G)=e_{G'} \text{ et pour tout } x \text{ dans } G,\ f(x^{-1})=f(x)^{-1}$$

**Proposition 2** : La composée de morphismes est un morphisme et la réciproque d'un morphisme bijectif est un morphisme (bijectif).

**Définition** : Un morphisme bijectif est appelé isomorphisme et si de surcroit $G=G'$ alors ce morphisme est appelé automorphisme.

**Définition** : Soit $f$ un morphisme de groupe de $(G,\cdot)$ dans $(G',\cdot)$.
On appelle **noyau** de $f$ le sous-ensemble de $G$ noté $\ker f=\{x\in G\ ,\ f(x)=e_{G'}\}$.
On appelle **image** de $f$ le sous-ensemble de $G'$ noté $\operatorname{im} f=\{y\in G' \text{ tel que } \exists x\in G \text{ et } y=f(x)\}$

**Proposition 1** : Si $f$ un morphisme de $(G,\cdot)$ dans $(G',\cdot)$ alors on a :

$$\boxed{\ker f \text{ est un sous-groupe de } G \qquad \text{et} \qquad \operatorname{im} f \text{ est un sous-groupe de } G'.}$$

**Proposition 2** : Si $f$ un morphisme de $(G,\cdot)$ dans $(G',\cdot)$ alors on a :

$$\boxed{f \text{ est injective SSI } \ker f=\{e_G\}. \qquad \text{et} \qquad f \text{ est surjective SSI } \operatorname{im} f=G'.}$$

# GEOMETRIE AFFINE EUCLIDIENNE

## I Notions affines euclidiennes

1. Définitions

(a) Dans tout ce polycopié, $\mathcal{A}$ désignera l'espace vectoriel euclidien (avec le Produit Scalaire canonique) $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ "vu" d'une façon affine, c'est-à-dire que ses éléments seront vus comme des points ou des vecteurs (selon le contexte).
Les droites et plans affines de $\mathcal{A}$ seront notés $\mathcal{D},\mathcal{D}',\Delta,\mathcal{P},\mathcal{P}'$...et leurs directions vectorielles $\vec{D},\vec{D'},\vec{\Delta},\vec{P},\vec{P'}$...

(b) **Distance** : Soit $(A,B)\in\mathcal{A}^2$, $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=d(A,B)$.
**Propriétés** : $AB=0 \iff A=B$, $AB=BA$,
$AC\leqslant AB+BC$ (inégalité triangulaire).

(c) **Orthogonalité** :
Le produit scalaire sera noté : $(\vec{u}|\vec{v})$ ou $\vec{u}\cdot\vec{v}$ (Rappel : $\vec{u}\perp\vec{v} \iff (\vec{u}|\vec{v})=0$).
**Dans le plan** :
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites perpendiculaires et l'on note $\mathcal{D}\perp\mathcal{D}'$ si $\overrightarrow{D}\perp\overrightarrow{D'}$.

**Dans l'espace** :
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites perpendiculaires et l'on note $\mathcal{D}\perp\mathcal{D}'$ si $\overrightarrow{D}\perp\overrightarrow{D'}$.
La droite $\mathcal{D}$ et et le plan $\mathcal{P}$ sont dits perpendiculaires et l'on note $\mathcal{D}\perp\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{D}=\overrightarrow{P}^{\perp}$.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont dits perpendiculaires et l'on note $\mathcal{P}\perp\mathcal{P}'$ si $\overrightarrow{P}^{\perp}\subset\overrightarrow{P'}$.

(d) **Repère orthonormé** : On appelle repère orthonormé (OTN) : $(O,\mathcal{B})$, la donnée d'un point $O$ de $\mathcal{A}$ et d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. On dit que ce repère est direct (OTND), si de plus la base $\mathcal{B}$ est directe.

2. **Distances de 2 sous espaces affines**
**Définition** : On appelle projection (affine) orthogonale toute projection affine sur un s.e.a. $\mathcal{F}$ parallèlement à $\vec{F}^{\perp}$. C'est-à-dire que à tout point $M$ on associe le point $M'$ défini par $M'\in\mathcal{F}$ et $\overrightarrow{MM'}\in\overrightarrow{F}^{\perp}$.
**Définition** : Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ 2 s.e.a. On appelle distance de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$ :
$d(\mathcal{F},\mathcal{F}')=\inf\{d(M,M'),\ M\in\mathcal{F} \text{ et } M'\in\mathcal{F}'\}$.
Si $\mathcal{F}=\{A\}$, on note $d(\mathcal{F},\mathcal{F}')=d(A,\mathcal{F}')$.
**Dans le plan** : Soit $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère OTN.
**Proposition : Distance point-droite**

$*$ Soit $\mathcal{D}/ax+by+c=0$ et $A\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$. Alors $d(A,\mathcal{D})=\dfrac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
$*$ Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, 2 droites.
Si $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'\neq\emptyset$, $d(\mathcal{D},\mathcal{D}')=0$
Sinon $\mathcal{D}\parallel\mathcal{D}'$ et $d(\mathcal{D},\mathcal{D}')=d(A,\mathcal{D}')$ pour tout point $A$ de $\mathcal{D}$.

**Démonstration** :
$*$ Soit $H$ le point projeté orthogonal de $A$ sur $\mathcal{D}$. D'après le théorème de Pythagore, pour tout point $M$ de $\mathcal{D}$ on a : $AM^2=AH^2+HM^2\geqslant AH^2$. Donc $AM\geqslant AH$ avec égalité ssi $HM=0$ donc ssi $M=H$. Donc $d(A,\mathcal{D})=AH$.
Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$, $\vec{v}\perp\vec{\mathcal{D}}$. Posons $H\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{AH}\perp\vec{\mathcal{D}}$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AH}=\lambda\vec{v}$.
Calculons de 2 manières le produit scalaire : $(\overrightarrow{AH}|\vec{v})$.
$(\overrightarrow{AH}|\vec{v})=a(x_0-\alpha)+b(y_0-\beta)$ et $(\overrightarrow{AH}|\vec{v})=\lambda\|\vec{v}\|^2$.
Donc $\lambda=\dfrac{a(x_0-\alpha)+b(y_0-\beta)}{\|\vec{v}\|^2}$. D'où $AH=|\lambda|\|\vec{v}\|=\dfrac{|a(x_0-\alpha)+b(y_0-\beta)|}{\|\vec{v}\|}$.
Comme $H\in\mathcal{D}$, on a $ax_0+by_0=-c$.
Conclusion : $d(A,\mathcal{D})=AH=\dfrac{|a\alpha+b\beta+c|}{\|\vec{v}\|}$.
$*$ Le calcul de $d(\mathcal{D},\mathcal{D}')$ se fait aisément avec un petit dessin en exercice.

**Dans l'espace** :
Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère OTN. **Proposition 1 : Distance point-plan**

Soit $\mathcal{P}/ax + by + cz + d = 0$ et $A\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$. Alors $d(A, \mathcal{P}) = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

**Démonstration** :
* Exercice (S'effectue exactement de la même manière que dans le plan).

**Proposition 2 : Distance point-droite**

Il y a 2 méthodes :
$*$ Soit $\mathcal{D} = \Omega+\mathrm{vect}(\vec{u})$, une droite et $A$ un point.

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et il existe $\vec{v} \in (\vec{u})^{\perp}$ tels que $\overrightarrow{\Omega A} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$ avec $\lambda = \dfrac{(\overrightarrow{\Omega A}|\vec{u})}{\|\vec{u}\|^2}$.

On a alors $d(A, \mathcal{D}) = \|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{\Omega A} - \lambda\vec{u}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$ (avec $\Omega, A, \vec{u}$ et $\lambda$ connus).

$*$ Soit $\mathcal{D}\begin{cases} x = \alpha + \lambda a \\ y = \beta + \lambda b \\ z = \gamma + \lambda c \end{cases}$ (représentation paramétrique)

La distance (au carré) de $A$ à $M\begin{pmatrix}\alpha + \lambda a\\ \beta + \lambda b\\ \gamma + \lambda c\end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ est une fonction $f$ de $\lambda$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On étudie les variations de $f$ (dérivée) et l'on en déduit le minimum de la fonction qui donne la distance : $d(A, \mathcal{D}) = \min\{d(A, M),\ M \in \mathcal{D}\} = \sqrt{\min\{f(t),\ t \in \mathbb{R}\}}$.

**Exercice** : Soit $\mathcal{D}\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ et $A\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.

Montrer en utilisant les 2 méthodes que $d(A, \mathcal{D}) = 4\sqrt{\dfrac{2}{7}}$.

3. Perpendiculaire commune à 2 droites - Distance droite-droite

**Théorème-définition** :

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ 2 droites **non** parallèles. Il existe une unique droite $\Delta$ telle que :
$\mathcal{D} \cap \Delta$ et $\mathcal{D}' \cap \Delta$ soient des singletons, avec $\vec{\Delta} \perp \vec{\mathcal{D}}$ et avec $\vec{\Delta} \perp \vec{\mathcal{D}}'$.
La droite $\Delta$ s'appelle la perpendiculaire commune de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

**Démonstration** :
La démonstration est **constructive**, elle donne une méthode pour déterminer $\Delta$.
Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$. Comme $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont non parallèles, $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre et donc $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$.
Il existe 2 points $\Omega$ et $\Omega'$ tels que $\mathcal{D} = \Omega+\mathrm{vect}(\vec{u})$ et que $\mathcal{D}' = \Omega'+\mathrm{vect}(\vec{v})$.
Définissons 2 plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ par :
$\mathcal{P} = \mathcal{D}+\mathrm{vect}(\vec{w}) = \Omega+\mathrm{vect}(\vec{u}, \vec{w})$ et $\mathcal{P}' = \mathcal{D}'+\mathrm{vect}(\vec{w}) = \Omega'+\mathrm{vect}(\vec{v}, \vec{w})$.
Posons enfin $\boxed{\Delta = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'}$.

On a :

(a) $\Delta$ est une droite car les 2 plans ne sont pas parallèles (à cause de $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

(b) $\vec{\Delta}$ =vect$(\vec{u},\vec{w})\cap$vect$(\vec{v},\vec{w})$ =vect$(\vec{w})$ donc $\overrightarrow{\Delta} \perp \vec{\mathcal{D}}$ et $\overrightarrow{\Delta} \perp \vec{\mathcal{D}}'$.

(c) $\mathcal{D}\cap\Delta = \mathcal{D}\cap\mathcal{P}\cap\mathcal{P}' = \mathcal{D}\cap\mathcal{P}'$ qui est réduit à un singleton car $\vec{\mathcal{D}} \not\subset \vec{\mathcal{P}}'$.

(d) $\mathcal{D}'\cap\Delta = \mathcal{D}'\cap\mathcal{P}\cap\mathcal{P}' = \mathcal{D}'\cap\mathcal{P}$ qui est réduit à un singleton car $\vec{\mathcal{D}}' \not\subset \vec{\mathcal{P}}$.

**Unicité** : Si $\Delta'$ est une droite solution du problème, alors $\Delta' \subset \mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$ et donc $\Delta' = \mathcal{P}\cap\mathcal{P}' = \Delta$.

**Conclusion** : Pour déterminer $\Delta$, on détermine les équations cartésiennes de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ et le système de ces 2 équations donne un système d'équation cartésienne de $\Delta$.

**Exemple** : Montrer que la perpendiculaire commune de

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{l} x-y-z-2=0 \\ x-2y-3z+1=0 \end{array}\right. \text{ et de } \mathcal{D}'\left\{\begin{array}{l} x+y+2z-1=0 \\ 2x+y+z+2=0 \end{array}\right. \text{ est } \Delta\left\{\begin{array}{l} 2x-y-7=0 \\ 17x+4y-5z+35=0 \end{array}\right.$$

**Application : Distance droite-droite**

**Proposition** :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } \mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ 2 droites } \textbf{non} \text{ parallèles. } \exists! A\in\mathcal{D} \text{ et } \exists! A'\in\mathcal{D}' \text{ telle que : } d(\mathcal{D},\mathcal{D}') = AA' \\ \text{De plus } \mathcal{D}\cap\Delta=\{A\} \text{ et } \mathcal{D}'\cap\Delta=\{A'\} \text{ où } \Delta \text{ est la perpendiculaire commune de } \mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}'.\end{array}}$$

**Démonstration** :

Notons $\mathcal{D}\cap\Delta = \{A\}$ et $\mathcal{D}'\cap\Delta = \{A'\}$. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'} = a\vec{u} + \overrightarrow{AA'} + b\vec{v} = (a\vec{u}+b\vec{v}) + \overrightarrow{AA'}$

Comme $(a\vec{u}+b\vec{v}) \perp \overrightarrow{AA'}$, on a $MM'^2 = \|a\vec{u}+b\vec{v}\|^2 + AA'^2 \geqslant AA'^2$, d'où $MM' \geqslant AA'$ et $MM' = AA'$ si et seulement si $a\vec{u}+b\vec{v} = \vec{0}$ c'est-à-dire ssi $a=b=0$ car $(\vec{u},\vec{v})$ est libre.

**Exercice** : Soit $\mathcal{D} = \Omega+$vect$(\vec{u})$ et $\mathcal{D}' = \Omega'+$vect$(\vec{v})$.
Soit $\mathcal{Q} = \Omega+$vect$(\vec{u},\vec{v})$. Montrer que $d(\mathcal{D},\mathcal{D}') = d(\Omega',\mathcal{Q})$.

## II Angles - systèmes de coordonnées

1. Angles dans le plan

   Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère OTN **direct**.

   (a) **angle orienté de 2 vecteurs unitaires (à $2\pi$-près)**.

   Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ 2 vecteurs unitaires. On appelle angle $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \theta$, si $\vec{v} = r(\vec{u})$ avec $r$ la rotation vectorielle d'angle $\theta$ (c'est-à-dire $\mathcal{M}_{(\vec{i},\vec{j})}(r) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$).

   On a donc $\boxed{\begin{array}{l}\cos\theta = \vec{u}\cdot\vec{v} \\ \sin\theta = \det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u},\vec{v})\end{array}}$ Ce qui permet de calculer $\theta$ (avec arccos...)

   (b) **angle orienté de 2 vecteurs non nuls (à $2\pi$-près)**.

   **Définition** : $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \widehat{\left(\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)}$

2. Système de coordonnées

   (a) Dans le plan

   Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère OTN direct. On dit que le point $M(x,y)$ admet $(r,\theta)$ pour coordonnées polaires si $\overrightarrow{OM}=r\cos\theta\ \vec{i}+r\sin\theta\ \vec{j}$ donc $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$.

   **Remarque** : $(r,\theta)$ et $(r',\theta')$ sont des systèmes de coordonnées polaires du point $M\neq O$ ssi ($r=r'$ et $\exists k\in\mathbb{Z}$ tel que $\theta'=\theta+2k\pi$) ou ($r=-r'$ et $\exists k\in\mathbb{Z}$ tel que $\theta'=\theta+\pi+2k\pi$).

   (b) Dans l'espace

   Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère OTN direct. Soit $M$ un point de $\mathcal{A}$.

   **Coordonnées Cylindriques** : Posons $M_1$ le projeté orthogonal sur le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ et posons $\overrightarrow{M_1M}=z\vec{k}$. Soit $(r,\theta)$ un système de coordonnées polaires de $M_1$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ orienté. On a $M_1=O+r\overrightarrow{u_\theta}=O+r\cos\theta\ \vec{i}+r\sin\theta\ \vec{j}$. Le triplet $(r,\theta,z)$ s'appelle un système de coordonnées cylindriques de $M$.

   On a donc : $\boxed{\begin{array}{l} M=O+r\overrightarrow{u_\theta}+z\vec{k}=O+r\cos\theta\ \vec{i}+r\sin\theta\ \vec{j}+z\ \vec{k} \\ M\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z\end{pmatrix}\end{array}}$

   **Coordonnées Sphériques** : Posons $\overrightarrow{u_\theta}=r\cos\theta\ \vec{i}+r\sin\theta\ \vec{j}$.

   **Lemme** : $\forall M\in\mathcal{A}$, $\exists(\rho,\theta,\phi)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{0M}=\rho\cos\phi\overrightarrow{u_\theta}+\rho sin\phi\ \vec{k}$

   **Démonstration** : Soit $(r,\theta,z)$ un système de coordonnées cylindriques de $M$. Donc $M=O+r\overrightarrow{u_\theta}+z\vec{k}=O+r\cos\theta\ \vec{i}+r\sin\theta\ \vec{j}+z\ \vec{k}$

   On pose $\rho=OM$. On a alors $\rho^2=r^2+z^2$, donc, il existe $\phi\in\mathbb{R}$ tel que $r=\rho\cos\phi$ et $z=\rho\sin\phi$. On a alors $M=O+\rho\cos\phi\overrightarrow{u_\theta}+\rho\sin\phi\ \vec{k}$

   Le triplet $(\rho,\theta,\phi)$ s'appelle un système de coordonnées sphériques de $M$.

   On a donc : $\boxed{M\begin{pmatrix}\rho\cos\phi\cos\theta \\ \rho\cos\phi\sin\theta \\ \rho\sin\phi\end{pmatrix}}$

   **Remarque** : On peut choisir $\rho\geqslant 0$, $\theta\in[0,2\pi]$ et $\phi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

## IV Cercles et sphères

### A. Dans le plan

1. **Définitions**

   (a) **Cercle** : On appelle cercle de centre $I$ et de rayon $R\geqslant 0$, l'ensemble des points $M$ distant de $I$ de $R$ : $\mathcal{C}(I,R)=\{M\in\mathcal{A}\ /\ IM=R\}$.

   (b) **Disque fermé** : On appelle disque fermé de centre $I$ et de rayon $R\geqslant 0$, l'ensemble des points $M$ tel que $IM\leqslant R$ : $\mathcal{D}_F(I,R)=\{M\in\mathcal{A}\ /\ IM\leqslant R\}$.

   (c) **Disque ouvert** : On appelle disque ouvert de centre $I$ et de rayon $R\geqslant 0$, l'ensemble des points $M$ tel que $IM<R$ : $\mathcal{D}_o(I,R)=\{M\in\mathcal{A}\ /\ IM<R\}$.

2. **Représentation cartésienne** :

   Soit $\mathcal{R}=(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ un repère OTN. Soit $\mathcal{C}\in\mathcal{A}$ : $\mathcal{C}$ est un cercle **si et seulement si** $\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $M(x,y)\in\mathcal{C}\iff x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ avec $a^2+b^2-c\geqslant 0$.

3. **Représentation polaire d'un cercle passant par l'origine** :
   Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère OTND.
   $\mathcal{C}$ est un cercle passant par l'origine **si et seulement si** $\exists a > 0$ , $\exists \theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que :
   $M$ de coordonnées polaire $(\rho, \theta)$ appartienne à $\mathcal{C} \iff \rho = a\cos(\theta - \theta_0)$.
   De plus le centre du cercle a pour angle polaire $\theta_0$.

   **Démonstration** :Dans le sens direct, on pose $(r_0, \theta_0)$ un système de coordonnées polaires du centre du cercle et on définit le point $A$ de coordonnées polaires $(2r_0, \theta_0)$. On utilise le fait que $M$ de coordonnées polaire $(\rho, \theta)$ est sur le cercle ssi $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AM}$ d'où $\rho = 2r_0\cos(\theta - \theta_0)$.
   Dans le sens indirect, on définit le point $I$ de coordonnées polaires $(\frac{a}{2}, \theta_0)$. On vérifie alors que $IM = \frac{a}{2}$ et que $O \in \mathcal{C}$.

4. **Étude de lieux géométriques**
   **Proposition** : Soit $A$ et $B$, 2 points de $\mathcal{A}$ et soit $\alpha$ un réel positif différent de 1.
   $\{M \in \mathcal{A}$ tel que $AM = \alpha BM\}$ est un cercle

   **démonstration** : On a $AM^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\|^2 = AG^2 + GM^2 + 2(\overrightarrow{AG}|\overrightarrow{GM})$ on écrit de même pour $BM^2$ puis on égalise. On a alors
   $AG^2 + GM^2 + 2(\overrightarrow{AG}|\overrightarrow{GM}) = \alpha^2(BG^2 + GM^2 + 2(\overrightarrow{BG}|\overrightarrow{GM}))$, donc
   $(1 - \alpha^2)GM^2 + 2(\overrightarrow{AG} - \alpha^2\overrightarrow{BG}|\overrightarrow{GM}) + AG^2 - \alpha^2 BG^2 = 0$.
   On choisit alors $G$ pour que $\overrightarrow{AG} - \alpha^2\overrightarrow{BG} = \vec{0}$ : Soit $G$ le barycentre des points $A$ avec le poids 1 et $B$ avec le poids $-\alpha^2$. Il reste alors : $(1 - \alpha^2)GM^2 + AG^2 - \alpha^2 BG^2 = 0$. D'autre part vu que $\overrightarrow{AG} - \alpha^2\overrightarrow{BG} = \vec{0}$, on a $AG^2 = \alpha^4 BG^2$.
   D'où : $GM^2 = \alpha^2 GB^2$. Posons $R = \alpha GB$ on a $\underline{GM = R}$, d'où un cercle.

   **Exercice** :
   Soit $A$ et $B$ 2 points de $\mathcal{A}$ et soit $\alpha$ un réel .
   $\{M \in \mathcal{A}$ tel que $(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) = \alpha$ (modulo $\pi$) $\}$ est un cercle privé des points $A$ et $B$

5. **Tangente à un cercle**
   On appelle tangente à un cercle $\mathcal{C}$ toute droite $D$ telle que l'intersection de $\mathcal{C}$ avec $D$ soit réduite à un et un seul point. Si $A$ est ce point, on montre en choisissant un "bon" repère que $\overrightarrow{IA} \perp \vec{u}$ avec $I$ le centre du cercle et $\vec{u}$ un vecteur directeur de $D$.

A. Dans l'espace

1. **Définitions**
   (a) **Sphère** : On appelle sphère de centre $I$ et de rayon $R \geqslant 0$, l'ensemble des points $M$ distants de $I$ de $R$ : $\mathcal{S}(I, R) = \{M \in \mathcal{A} \ / \ IM = R\}$.
   (b) **Boule fermée** : On appelle boule fermée de centre $I$ et de rayon $R \geqslant 0$, l'ensemble des points $M$ tel que $IM \leqslant R$ : $\mathcal{B}_F(I, R) = \{M \in \mathcal{A} \ / \ IM \leqslant R\}$.
   (c) **Boule ouverte** : On appelle boule ouverte de centre $I$ et de rayon $R \geqslant 0$, l'ensemble des points $M$ tel que $IM < R$ : $\mathcal{B}_o(I, R) = \{M \in \mathcal{A} \ / \ IM < R\}$.

2. **Représentation cartésienne** :
   Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère OTN. Soit $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$ : $\mathcal{C}$ est un cercle **si et seulement si** $\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :
   $M(x, y, z) \in \mathcal{C} \iff x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ avec $a^2 + b^2 + c^2 - d \geqslant 0$.

3. **Intersection sphère-plan** :

**Théorème** :

Soient $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{S}$ une sphère.
L'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ est soit **vide**, soit un **singleton**, soit un **cercle** (de $\mathcal{P}$).
L'intersection est un singleton **ssi** le plan est tangent à la sphère.

**Démonstration** :

Soit $\Omega$ le centre de $\mathcal{S}$ et $R$ son rayon. Soit $A$ un point de $\mathcal{P}$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base OTN de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On a $\mathcal{P} = A+\text{vect}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On choisit un repère OTN : $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ tel que $\overrightarrow{O\Omega} = \lambda \overrightarrow{k}$ avec $\lambda > 0$ si $O \notin \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{k}$ prit quelconque si $O \in \mathcal{P}$. On a donc $O$ qui est le projeté orthogonal de $\Omega$ sur $\mathcal{P}$. Dans le repère $\mathcal{R}$, $\Omega$ a pour coordonnées : $(0, 0, a)$,
$\mathcal{S}$ a pour équation : $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = R^2$ et $\mathcal{P}$ a pour équation : $z = 0$.
$\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ a pour équation, dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de $\mathcal{P}$ : $x^2 + y^2 = R^2 - a^2$, donc
$\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est un cercle de $\mathcal{P}$ ou un point ou $\emptyset$ (selon le signe de $R^2 - a^2$.

**Remarque 1** : $|a| = d(\Omega, \mathcal{P})$ (distance point-plan).

**Remarque 2** : la remarque 1, Pythagore et un **bon dessin** permettent de calculer le centre et le rayon de ce cercle.

4. **Intersection sphère-sphère** :

**Théorème** :

Soient $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux sphères.
L'intersection de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ est soit **vide**, soit un **singleton**, soit un **cercle**, soit une **sphère**.
Si l'intersection est un singleton, alors les deux sphères sont tangentes.
L'intersection est une sphère **ssi** $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$.

**Démonstration** :

Soit $\Omega_1$ le centre de $\mathcal{S}_1$ et $R$ son rayon. Soit $\Omega_2$ le centre de $\mathcal{S}_2$ et $R'$ son rayon. Le cas où $\Omega_1 = \Omega_2$ est évident : on a $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$ ou $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$.
On suppose donc que $\Omega_1 \neq \Omega_2$.
On choisit un repère OTN : $\mathcal{R} = (\Omega_1, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ tel que Soit $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = a\overrightarrow{i}$ avec $a > 0$.
Dans le repère $\mathcal{R}$,
$\mathcal{S}_1$ a pour équation : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
$\mathcal{S}_2$ a pour équation : $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = R'^2$.
D'où $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ a pour équation le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ (x-a)^2 + y^2 + z^2 = R'^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ R^2 - 2ax + a^2 = R'^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ 2ax = R^2 - R'^2 + a^2 \end{cases}$$

On est donc ramené au paragraphe précédent : intersection sphère-plan .

# SOMMES SUPER IMPORTANTES

FORMULE 1

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1+2+3+4+\cdots+n-1+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{\qquad}{2}$$

**Démonstration** :

Récurrence : si on pose $S_n = 1+2+3+4+\cdots+n$ , on a $S_1 = 1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$ et si $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ alors $S_{n+1} = S_n + n + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \dfrac{(n+1)(n+1+1)}{2}$

**Autre démonstration** :

$S = 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \cdots\cdots \quad + n-2 + n-1 + n$

$S = n + n-1 + n-2 + \cdots\cdots + \quad 3 \quad + \quad 2 \quad + \quad 1$

D'où $S+S = (1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\cdots+(n-2+3)+(n-1+2)+(n+1) = n(n+1)$ et donc $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

**Remarque** : cette formule est aussi valable pour $n = 0$.

On a de même

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{\qquad}{6}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = (\qquad\qquad)^2$$

FORMULE 2

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } \forall q \in \mathbb{C} \text{ et } q \neq 1 : 1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{\qquad}{1-q}$$

**Démonstration** : Récurrence.

**Conséquence** : $\forall i \in \mathbb{N}$ , $\forall n \geqslant i$ , $\forall q \in \mathbb{C}$ et $q \neq 1$ :

$$q^i + q^{i+1} + q^{i+2} + \cdots + q^n = \sum_{k=i}^{n} q^k = q^i \sum_{k=i}^{n} q^{k-i} = q^i \sum_{k'=0}^{n-i} q^{k'} = q^i \frac{\qquad}{1-q}$$

**Remarque** : Pour $q = 1$ : $1+1+1^2+1^3+\cdots+1^n = \sum_{k=0}^{n} 1 = \qquad\qquad .$

FORMULE 3

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$ :

$$a^n - b^n = (a-b)(\qquad + \qquad + \cdots\cdots + \qquad) = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \qquad\qquad\qquad \right)$$

**Démonstration** : Si $a = 0$ alors le résultat est évident sinon $a^n - b^n = a^n(1-q^n)$ avec $q = \dfrac{b}{a}$.

Or $1 - q^n = (1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})$ , donc $a^n - b^n = a^n(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) = a^n(1-\dfrac{b}{a})(1+\dfrac{b}{a}+(\dfrac{b}{a})^2+\cdots+(\dfrac{b}{a})^{n-1}) = (a-b)a^{n-1}(1+\dfrac{b}{a}+(\dfrac{b}{a})^2+\cdots+(\dfrac{b}{a})^{n-1})$

$= (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+a^{n-3}b^2+\cdots+a^1b^{n-2}+b^{n-1})$.

# DÉFINITIONS SUR LES SUITES RÉELLES et COMPLEXES

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , notée aussi $(u_n)$ , une suite de réels.

1. **Suite majorée** : $(u_n)$ est majorée si .
2. **Suite minorée** : $(u_n)$ est minorée si .
3. **Suite bornée** : $(u_n)$ est bornée si elle est ou si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.
4. **Suite croissante** : $(u_n)$ est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$,
5. **Suite décroissante** : $(u_n)$ est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$,
6. **Suite monotone** : $(u_n)$ est monotone si $(u_n)$ est croissante ou si $(u_n)$ est décroissante. C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$ ,
7. **Suite strictement croissante** : $(u_n)$ est strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$,
8. **Suite strictement décroissante** : $(u_n)$ est strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$,
9. **Suite strictement monotone** : $(u_n)$ est monotone si $(u_n)$ est strictement croissante ou si $(u_n)$ est strictement décroissante.
   C'est-à-dire :
10. **Suite stationnaire** : $(u_n)$ est stationnaire si
11. **Suite convergente** : $(u_n)$ est convergente si
    $\exists L \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0$ ,
12. **Suite divergente** : $(u_n)$ est divergente si elle n'est pas convergente. C'est-à-dire si
    $\forall L \in \mathbb{R}$ , $\exists \varepsilon > 0$ tel que
13. **Suite divergente vers $+\infty$** : $(u_n)$ est divergente vers $+\infty$ si
    $\forall A > 0$ ,
14. **Suite divergente vers $-\infty$** : $(u_n)$ est divergente vers $-\infty$ si
    $\forall A > 0$ ,
15. **Suites adjacentes** : $(a_n)$ et $(b_n)$ sont dites adjacentes si :
    $(a_n)$ est croissante , $(b_n)$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$
16. **Suite extraite** : $(v_n)$ est extrait de $(u_n)$ s'il existe une application $\phi$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, .
17. **Valeur d'adhérence** : $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)$ s'il existe une suite $(v_n)$ extraite de $(u_n)$ qui converge vers $\lambda$. C'est-à-dire s'il existe une application $\phi$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = \lambda$.
18. **Comparaison de suites, quand $v_n \neq 0$ pour tout $n$** :
    $u_n = O(v_n)$ si $(\dfrac{u_n}{v_n})$ est .
    $u_n = o(v_n)$ si $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{u_n}{v_n}) =$ .
    $u_n \sim v_n$ si $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{u_n}{v_n}) =$ .

**Remarque "Complexe"** : Les définitions 10.-11.-12. et 16.-17.-18. sont encore valables et restent totalement identiques avec les suites de $\mathbb{C}$.

La 3. est valable avec la définition $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

## RÉSUMÉ : suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$

$I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$.

**Remarque** : Avant de faire une étude de $f$, essayez d'avoir un maximum de renseignements : par exemple, si $u_{n+1} = u_n + u_n^2$, alors $*$ $(u_n)_n$ est ...

$*$ si $u_0 \geqslant 0$, alors...

S'il n'y a rien d'évident, alors :

**1.** Faire le tableau de variation de $f$.

**2.** Tracer la courbe, ainsi que la 1ère bissectrice : $y = x$. (et faire quelques essais pour $u_0$...)

**3.** Résoudre $f(x) = x$ (points fixes) pour avoir les limites éventuelles de $(u_n)_n$ (voir théorème fondamental plus bas).

Autres intérêts :

$*$ cela permet de mieux définir les points d'intersection de la courbe et de la 1ère bissectrice.

$*$ cela permet de compléter le tableau de variation pour le point n°4...

**4.** Déterminer des intervalles **stables** sur lesquels $f$ est monotone.

**5.** Utiliser son cours :

**Théorème d'existence** : Si $u_0 \in I$ et si $I$ est **stable** par $f$ alors la suite $(u_n)_n$ existe bien et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

**Monotonie** : Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \in I}$, alors

**1er cas** (le plus utilisé) : Si $f$ est $\boxed{\text{croissante}}$ sur $I$ alors $\boxed{(u_n)_n \text{ est monotone}}$, donc

$*$ si $u_1 - u_0 \geqslant 0$ alors $(u_n)_n$ est croissante.

$*$ si $u_1 - u_0 \leqslant 0$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.

Or $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$ : on recherche donc le signe de $f(x) - x$

**2ème cas** : Si $f$ est décroissante sur $I$ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones (et de monotonie contraire).

A savoir : si on pose $v_n = u_{2n}$, alors $v_{n+1} = ...$ : or $f \circ f$ est croissante sur $I$, on est donc ramené au 1er cas avec la fonction $f \circ f$ et la suite $(v_n)_n$.

On peut donc étudier le signe de $u_2 - u_0 = f \circ f(u_0) - u_0$ (signe de $f \circ f(x) - x$).

On peut parfois simplement remarquer que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont bornées (et monotones donc convergentes).

De plus, les limites possibles de $(u_{2n})_n$ sont les racines de $f \circ f(x) = x$...( Voir($*$))

Rappel du $\boxed{\text{Théorème fondamental}}$ :

On suppose que la suite $(u_n)_n$ définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, existe bien ($u_0$ étant donné).

Si $(u_n)_n$ converge vers L et si $f$ est **continue en $L$**, alors $L$ vérifie : $L = f(L)$.

**Remarque** : si $f$ est continue sur $I = ]1, 3]$( : stable par $f$ et $u_0 \in ]1, 3]$) , et si $(u_n)_n$ converge, alors peut-on dire que sa limite $L$ vérifie $L = f(L)$ ?

($*$) Supplément de cours : si $f(x) - x$ est polynômiale, alors toute racine de $f(x) - x$ est racine de $f \circ f(x) - x$ (car ... ), donc $f \circ f(x) - x$ est divisible par $f(x) - x$ (démonstration valable pour des racines simples).

**exercice** : soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, mq $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

**Rappel du critère séquentiel** : $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \in I$ ou $a$ est une extrémité de $I$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \text{pour toute suite } (u_n)_n \text{ qui converge vers } a, \text{ on a } \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = b$$

En particulier, si $f$ est continue en $L$, alors, $\lim\limits_{x \to L} f(x) =$

**Autre exemple classique : suites définies par $f_n(u_n) = 0$** :

**L'existence** de $u_n$ se prouve grâce au théorème de la bijection :

si $f$ est continue et strictement monotone sur $I$, alors $f$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{réalise} \\ \text{induit} \end{array} \right.$ une bijection de $I$ sur $f(I)$.

**Principale technique** : contraposée de la définition d'une fonction croissante.

$[x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)] \iff [\qquad\qquad\qquad\qquad]$
(voir aussi le tableau de variation de $f_n$ qui permet de deviner)

**Remarque** : $u_{n+1}$ est définie par
et on compare $u_n$ et $u_{n+1}$ en calculant par exemple $f_n(u_{n+1})$ que l'on compare à $f_n(u_n) = 0$

**Suites arithmético-géométrique : $u_{n+1} = au_n + b$, $a \neq 1$** :

**Technique** : écrire l'un en dessous de l'autre la définition et ce qu'on obtient pour une suite constante :
$\boxed{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & au_n + b \\ \ell & = & a\ell + b \end{array}}$. On fait la différence , **puis** on remplace $\ell$ par sa valeur.

**Remarque** : on peut poser $v_n = u_n - \ell$...

**Suites récurrentes linéaires d'ordre 2** :

$\boxed{u_{n+2} = a\ u_{n+1} + b\ u_n}$ $u_0 \in \mathbb{C}$, $u_1 \in \mathbb{C}$. $((a, b) \in \mathbb{C}^2$ , $a \neq 0$ et $b \neq 0)$

Pensez :"suites géométriques"
On résout l'équation caractéristique (E) : $\boxed{x^2 = a\ x + b}$

$*$ si (E) a 2 racines : $r_1$ et $r_2$ alors $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n$.

$*$ si (E) a une racine double : $r$ alors $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n ==$

**Remarque** : Si $(a, b, u_0, u_1) \in \mathbb{R}^4$ et si (E) admet 2 racines complexes non réelles (conjuguées) : $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ , alors $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n =$

# DÉFINITIONS SUR LES FONCTIONS DE LA VARIABLE RÉELLE

1. **Point adhérent** : Soit $A \subset \mathbb{R}$.
   On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est un point adhérent de $A$ si $\boxed{\forall r > 0,\ A \cap [\alpha - r, \alpha + r] \neq \emptyset.}$
2. **Point intérieur** : Soit $A \subset \mathbb{R}$.
   On dit que $a \in A$ est un point intérieur à $A$ si $\boxed{\exists r > 0 \text{ tel que } [a - r, a + r] \subset A.}$

**II Vocabulaire des fonctions réelles**

On appelle fonction réelle toute fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$ où $I$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et généralement une réunion d'intervalles. Soit, donc, $f$ une fonction réelle de $I$ dans $\mathbb{R}$.

1. **Fonction majorée** : $f$ est dite majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ f(x) \qquad M$.
2. **Fonction minorée** : $f$ est dite minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ f(x) \qquad m$.
3. **Fonction bornée** : $f$ est dite bornée si $f$ est majorée et minorée ou si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ |f(x)| \qquad M$. Démontrer l'équivalence.
4. **Fonction croissante** : $f$ est dite croissante sur $I$ si $\forall (x, y) \in I^2,\ x \qquad y \implies f(x) \qquad f(y)$.
5. **Fonction décroissante** : $f$ est dite décroissante sur $I$ si $\forall (x, y) \in I^2,\ x \qquad y \implies f(x) \qquad f(y)$.
6. **Fonction monotone** : $f$ est dite monotone sur $I$ si $f$ est croissante sur $I$ ou si $f$ est décroissante sur $I$.
7. **Fonction strictement croissante** : $f$ est dite strictement croissante sur $I$ si
   $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \implies f(x) \qquad f(y)$.
8. **Fonction strictement décroissante** : $f$ est dite strictement décroissante sur $I$ si
   $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \implies f(x) \qquad f(y)$.
9. **Fonction strictement monotone** : $f$ est dite strictement monotone sur $I$ si $f$ est strictement croissante sur $I$ ou si $f$ est strictement décroissante sur $I$.
10. **Fonction continue en $a$** : $f$ est dite continue en $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \qquad\qquad$ .
    C'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0$ , $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.
11. **Fonction continue sur $I$** : $f$ est dite continue sur $I$ si $f$ est continue en chaque point de $I$ .
12. **Fonction continue à droite en $a$** : $f$ est dite continue à droite en $a \in I$ si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = \qquad$ .
13. **Fonction continue à gauche en $a$** : $f$ est dite continue à gauche en $a \in I$ si $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \qquad$ .
14. **Subdivision** : On appelle subdivision du segment $[a, b]$, toute suite finie strictement croissante dont le premier terme est $a$ et le dernier est $b$. C'est-à-dire la donnée de :
    $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$.
15. **Fonction en escalier** : $f$ est dite en escalier sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que $f$ soit                sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ avec $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
16. **Fonction continue par morceaux** : $f$ est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que $f$ soit continue sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ avec $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et que $f$ admette une limite à gauche et à droite pour les points $x_i$ avec $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
17. **Fonction lipschitzienne** : $f$ est dite lipschitzienne sur $I$ si :
    $\exists k \geqslant 0$ tel que $\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \qquad\qquad\qquad$ .
18. **Fonction contractante** : $f$ est dite contractante sur $I$ si :
    $f$ est $k$-lipschitzienne avec $0 \leqslant k < 1$.
19. **Fonction convexe** : $f$ est dite **convexe** (graphe $\smile$) sur $I$ (intervalle) si :
    $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1] : f(tx + (1 - t)y) \leqslant t f(x) + (1 - t) f(y)$.

20. **Fonction concave** : $f$ est dite **concave** (graphe $\frown$) sur $I$ (intervalle) si :
$\forall (x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$ : $f(tx+(1-t)y) \geqslant tf(x)+(1-t)f(y)$.

21. **Fonction périodique** : $f$ est dite périodique sur $\mathbb{R}$ si :
$\exists T > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ : .

22. **$f^+$ , $f^-$ :**

$$f^+ : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \text{ si } f(x) \geqslant 0 \\ x & \longmapsto & 0 \quad \text{ si } f(x) \leqslant 0 \end{array} \qquad f^- : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \quad \text{ si } f(x) \geqslant 0 \\ x & \longmapsto & -f(x) \text{ si } f(x) \leqslant 0 \end{array}$$

**Remarque** : $f^-$ est tive
**Liens** : $f^+ + f^- =$ et $f^+ - f^- =$

23. Une propriété $(\mathcal{P})$ portant sur $f$ définie sur $I$ est dite vraie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ s'il existe un réel $r > 0$ tel que cette propriété $(\mathcal{P})$ soit vraie sur $I \cap [a-r, a+r]$.
Une propriété $(\mathcal{P})$ portant sur $f$ définie sur $I$ est dite vraie au voisinage de $+\infty$ s'il existe un réel $B > 0$ tel que cette propriété $(\mathcal{P})$ soit vraie sur $I \cap [B, +\infty[$.

24. **Comparaison des fonctions** :
Soit $a$ un réel ou $\pm\infty$,
$f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$ si $\dfrac{f}{g}$ est au voisinage de $a$.
$f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$ .
$f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$ .

25. **Extremums** :
Soit $a$ un point de $I$.
On dit que $a$ est un maximum global de $f$ si : $\forall x \in I$ , $f(x)$ $f(a)$.
On dit que $a$ est un minimum global de $f$ si : $\forall x \in I$ , $f(x)$ $f(a)$.
On dit que $a$ est un maximum local de $f$ si : $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in I \cap [a-r, a+r]$ , $f(x)$ $f(a)$.
On dit que $a$ est un minimum local de $f$ si : $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in I \cap [a-r, a+r]$ , $f(x)$ $f(a)$.
On dit que $a$ est un maximum global strict de $f$ si : $\forall x \in I$ , $x \neq a \implies f(x)$ $f(a)$.
On dit que $a$ est un minimum global strict de $f$ si : $\forall x \in I$ , $x \neq a \implies f(x)$ $f(a)$.
On dit que $a$ est un maximum local strict de $f$ si :
$\exists r > 0$ tel que $\forall x \in I \cap [a-r, a+r]$, $x \neq a \implies f(x)$ $f(a)$.
On dit que $a$ est un minimum local strict de $f$ si :
$\exists r > 0$ tel que $\forall x \in I \cap [a-r, a+r]$, $x \neq a \implies f(x)$ $f(a)$.

26. **Limite finie en $a \in \mathbb{R}$** : Soit $a$ un point adhérent à $I$ et $L \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ converge vers $L$ en $a$ ou que $f(x)$ tend vers $L$ quand $x$ tend vers $a$ et l'on note $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = L$ si :
$\forall \varepsilon > 0$ , $\exists \alpha > 0$ tel que

27. **Limite infinie en $a \in \mathbb{R}$** : Soit $a$ un point adhérent à $I$. On dit que $f$ diverge vers $+\infty$ en $a$ ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $a$ et l'on note $\lim_{x \to a} f(x) \ = \ +\infty$ si :
$\forall A > 0$ , $\exists \alpha > 0$ tel que
On a une définition analogue si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand $x$ tend vers $a$.
28. **Limite finie en $+\infty$** : Soit $L \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ converge vers $L$ en $+\infty$ ou que $f(x)$ tend vers $L$ quand $x$ tend vers $+\infty$ et l'on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) \ = \ L$ si :
$\forall \varepsilon > 0$ , $\exists A > 0$ tel que
On a une définition analogue si $f(x)$ tend vers $L$ quand $x$ tend vers $-\infty$.
29. **Limite infinie en $+\infty$** : On dit que $f$ diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$ et l'on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) \ = \ +\infty$ si :
$\forall A > 0$ , $\exists B > 0$ tel que
On a une définition analogue si $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ quand $x$ tend vers $\pm\infty$.
**Exemple :** $\lim_{x \to -\infty} f(x) \ = \ +\infty$ :
30. **Limite à gauche, à droite** : Soit $a$ un point adhérent à $I$ et $L \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ converge vers $L$ en $a$ **à gauche** ou que $f(x)$ tend vers $L$ quand $x$ tend vers $a$ **à gauche** et l'on note $\lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \ L$ si : $\forall \varepsilon > 0$ , $\exists \alpha > 0$ tel que
Écrire les notions de limite en $\pm\infty$ et de limite infinie à gauche et à droite.
31. **Fonction de classe $C^1$ , $C^n$ , $C^\infty$ , $C^1$ par morceaux** :
On dit qu'une fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $I$ si $f$ est dérivable sur $I$ et que la dérivée $f'$ est continue sur $I$.
On dit qu'une fonction $f$ est de classe $C^n$ sur $I$ si $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et que la dérivée $n$-ième $f^{(n)}$ est continue sur $I$ (donc $f$ est de classe $C^0$ ssi $f$ est continue).
On dit qu'une fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $I$ si pour tout $n$ , $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ (ou que pour tout $n$, $f$ est de classe $C^n$ sur $I$).
On dit qu'une fonction $f$ est de classe $C^1$ par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que $f$ soit de classe $C^1$ sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ avec $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et que **$f$ et $f'$** admettent des limites à gauche et à droite pour les points $x_i$ avec $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

# DÉVELOPPEMENTS LIMITES

## I Formules de Taylor

1. **T.R.I** (T.R.I=
Soit $f$ de classe $C^{n+1}$ sur un intervalle $I$ ($f$ fonction réelle ou vectorielle de la variable réelle)
Soit $(a, b) \in I^2$. On a alors :

$$\boxed{f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b}$$

**Démonstration** : I.P.P., $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt =$

**Remarque** : Pour $n = 0$ , on a $f(b) =$
2. **I.T.L.** (I.T.L.=
Soit $f$ de classe $C^{n+1}$ sur un intervalle $I$ ($f$ fonction réelle ou vectorielle de la variable réelle)
Soit $(a, b) \in I^2$. On a alors :

$$\boxed{\left|f(b)-[f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)]\right| \leqslant \frac{\qquad\qquad}{(\qquad\qquad)!}M}$$

où $M=\sup\{|f^{(n+1)}(t)|\ ,\ t\in[a,b]\}$ ou bien $M$ majorant de $|f^{(n+1)}(t)|$ sur $[a,b]$.

3. **T.Y.** (T.Y.= Soit $f$ de classe $C^n$ sur un intervalle $I$ ($f$ fonction réelle ou vectorielle de la variable réelle) Soit $(a,x)\in I^2$. On a alors :

$$\boxed{f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\qquad\qquad}$$

4. **Résumé** : T.Y. est une formule ____**ale** qui donne une indication très précise de $f$ lorsque $x$ **tend** vers $a$ : on l'utilise pour avoir des renseignements locaux en $a$. A l'inverse les formules de TRI et I.T.L. sont des formules ____**ales** qui donnent une égalité (TRI) ou une inégalité (I.T.L.) sur tout un intervalle : elles sont plus puissantes et plus précises que TY ( et plus utilisées dans les concours à l'écrit...)

## II. DL usuelles

**Donner les DL des fonctions suivantes en $0$ à l'ordre $n$. Pour chaque DL on écrira les 3 premiers termes du développement puis le n-ième terme :**

$\frac{1}{1-x}=$

$\frac{1}{1+x}=$

$\frac{1}{1+x^2}=$

$\arctan x=$

$e^x=$

$\sin x=$

$\cos x=$

$\mathrm{ch}x=$

$\mathrm{sh}x=$

$\ln(1+x)=$

$\ln(1-x)=$

$(1+x)^\alpha=$

$\sqrt{1+x}=$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=$

$\arccos x=$

(ordre 3) $\tan x=$

## II Développements limités

1. **Définition 1** en 0 : $f$ admet un DL en 0 à l'ordre $n$ s'il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que
$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$
**Définition 2** en $a$ (réel) : $f$ admet un DL en $a$ à l'ordre $n$ s'il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$
**Définition 3** en $\pm\infty$ : $f$ admet un DL en $\pm\infty$ à l'ordre $n$ s'il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que
$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o(\frac{1}{x^n})$$
2. **Retour à zéro** : On peut toujours se ramener à un DL en 0 :
En $a$ (réel) : On pose $x = a + t$ avec $t$ qui tend donc vers 0 et $g(t) = f(a+t)$
Si $g(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + o(t^n)$ alors $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$
En $\pm\infty$ : On pose $x = \frac{1}{t}$ avec $t$ qui tend donc vers 0 et $g(t) = f(\frac{1}{t})$
Si $g(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + o(t^n)$ alors $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o(\frac{1}{x^n})$
3. **Parités** : Le DL est unique, si $f$ est paire les coefficients impairs sont , idem si $f$ est impaire.
4. **Troncature d'un DL** : Si $f$ admet un DL à l'ordre $n$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, elle admet un DL à tout ordre inférieur à $n$.
5. **DL et équivalent** : $g(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + o(t^n)$ en 0, alors $g(t) \underset{a}{\sim} a_p t^p$ avec $p$ le premier indice tel que .
6. **Interprétation du DL à l'ordre $n$** :
$n = 0$ : $f$ est en $a$ (réel)(ou se prolonge par continuité).
$n = 1$ : $f$ est en $a$ (réel).
$n \geqslant 2$ :
7. **Allure locale** : Si $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$, alors la tangente en $a$ est la droite d'équation $D/y =$ et le signe de $a_2$ s'il est non nul donne, **localement** la position du graphe de $f$ en $a$ par rapport à sa tangente.

## III Calculs pratiques des Développements limités

8. **TY** : La Formule de Taylor-Young donne le DL des fonctions usuelles, ainsi que l'existence **théorique** du DL à l'ordre $n$ d'une fonction de classe $C^n$.
9. **Somme** : Si $f$ et $g$ admettent un DL à l'ordre $n$ en $a$, alors $f + \lambda g$ admet un DL à l'ordre $n$ en $a$ : c'est la combinaison linéaire des DL.
10. **Produit** : Si $f$ et $g$ admettent un DL à l'ordre $n$ en $a$, alors $fg$ admet un DL à l'ordre $n$ en $a$ : c'est la troncature au degré $n$ du produit des DL.
11. **Composée** : Soit $F(t) = f(g(t))$. Si $f$ et $g$ admettent un DL à l'ordre $n$ en 0 et si $\boxed{g(0) = 0}$, alors $F$ admet un DL à l'ordre $n$ : c'est la troncature au degré $n$ de la composée des DL.
12. **Quotient** : On se ramène à une composée de fonction et on utilise le DL de $g(t) = \frac{1}{1+t}$ :
$f(x) = \dfrac{1}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)}$ avec $b_0 \neq 0$ et donc on a
$$f(x) = \frac{1}{b_0} \frac{1}{1 + \frac{b_1}{b_0}x + \cdots + \frac{b_n}{b_0}x^n + o(x^n)} = \frac{1}{b_0} g\left(\frac{b_1}{b_0}x + \cdots + \frac{b_n}{b_0}x^n + o(x^n)\right)$$
13. **Intégration** : Si $f'$ admet un DL en $a$ à l'ordre $n$ alors $f$ admet un DL en $a$ à l'ordre $n+1$.
**Applications** : DL de $\ln(1+x)$, $\operatorname{Arctan} x$, $\operatorname{Arccos} x$, $\operatorname{Arcsin} x$,...
**Remarque** : On ne peut dériver un DL sans précaution. Si on doit le faire on utilise TY et on fait le tour (avec l'intégration des DL).

## IV Appendice

1. **Développements limités Généralisés** :
   On appelle Développements limités Généralisés de $f$ en $a$ (réel), toutes expressions du type :
   $f(x) = \dfrac{\alpha_p}{(x-a)^p} + \cdots + \dfrac{\alpha_1}{x-a} + a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$
   **Remarque** : le $p$ est unique et en $a$ $f$ est équivalent à :
   On appelle Développements limités Généralisés de $f$ en $\pm\infty$, toutes expressions du type :
   $f(x) = \alpha_p x^p + \cdots + \alpha_1 x + a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \cdots + \dfrac{a_n}{x^n} + o(\dfrac{1}{x^n})$
2. **Développements Asymptotiques** : "Sommes de fonctions dont l'une est négligeable devant la précédente". Exemples : en 0 , $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \ln x + 4 + \sqrt[3]{x} + x^2 + x^5 \ln x + o(x^5 \ln x)$.
   pour $x = 0.0001$, cela donne :
   $f(x) = 100.0 + (-9.210340372) + 4 + 4.641588834 \cdot 10^{-2} + 10^{-8} + (-0.9210340372 \cdot 10^{-19}) + o$
3. **Applications** : Allures locales des fonctions, arcs paramétrés (points stationnaires et branches infinies), convergence-divergence des séries numériques et des séries de fonctions, calculs d'équivalents simples de suites et de fonctions, intégrabilité des fonctions.........

1. **GÉNÉRALITÉS** : $(u_n)$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

   (a) **Série** :
   **Définition** : La série de terme général $u_n$ est la **suite** $(S_n)_n$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelée $(S_n)_n$ est aussi notée $(S_n(u))_n$

   On dit que la série de terme général $u_n$ converge si

   (b) **Somme d'une série convergente** :
   **Définition** : Somme d'une série **convergente** : (ce n'est pas vraiment une **somme**, mais une **limite**)

   On la note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

   On a donc : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$

   **Notation** : La série de terme général $u_n$ est aussi notée $(\sum u_n)$ ou $(\sum_{n\geqslant 0} u_n)$ ou $\sum u_n$.

   **Remarque 1** : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe signifie que $(\sum u_n)$ converge.

   **Remarque 2** : si $u_n$ est définie à partir de $n_0 > 0$, alors on définit $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et on note la série $(\sum_{n\geqslant n_0} u_n)$

   (c) **Reste** :
   **Définition** : Reste d'une série convergente.

   $R_n =$ $S_n =$ $S =$

   Relations : $S =$ $R_n =$

   (d) **Exemples** :

   i) Montrer que $(\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n})$ diverge.

   ii) Montrer que $\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}\right)$ converge et calculer sa somme.

   (e) **Condition nécessaire de convergence** :
   **Attention** : erreur classique. Vrai ou faux (barrez la proposition qui est fausse+ contre-exemple)

   $(\sum u_n)$ converge $\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ ......... VRAI - FAUX

   $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Longrightarrow (\sum u_n)$ converge ......... VRAI - FAUX

On dit que $(\sum u_n)$ **diverge grossièrement** si

**Exemple** : $(\sum(-1)^n)$ diverge car

(f) **Opération sur les séries** : **Linéarité de la somme**

$*$ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $(\sum u_n)$ converge et $(\sum v_n)$ converge alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ converge.

**Attention** : Réciproque fausse ! Contre-exemple : $\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$*$ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Si $(\sum u_n)$ diverge alors $(\sum \lambda u_n)$ diverge.

$*$ Si $(\sum u_n)$ converge et $(\sum v_n)$ diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

**"Antipropriété"** : Si $(\sum u_n)$ diverge et $(\sum v_n)$ diverge alors

(g) **Correspondance bijective suite-série** : **(série télescopique)**

**Théorème n°1 :** :

$$\left(\sum(u_{n+1} - u_n)\right) \text{ converge} \Longleftrightarrow (u_n)_n \text{ converge.}$$

**démonstration 1** :

(h) **Séries complexes** :

Si $u_n \in \mathbb{C}$, $[(\sum u_n)$ converge $\Longleftrightarrow$ $(\sum \text{ Re } u_n)$ converge et $(\sum \text{ Im } u_n)$ converge$]$.

Dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Re } u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Im } u_n$, donc

2. **SÉRIES à TERMES POSITIFS : Théorèmes de comparaison** : $\boxed{\leqslant}$ $\boxed{\geqslant}$ $\boxed{O}$ $\boxed{o}$ $\boxed{\sim}$ :

(a) **Lemme fondamental** : Si $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geqslant 0$, alors $(S_n)_n$ est croissante. (dém :

**Conséquences** : Si $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geqslant 0$, $*$ $(\sum u_n)$ converge $\Longleftrightarrow$ $(S_n)_n$ est majorée.

$*$ si $(\sum u_n)$ diverge alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

**Exemple à connaitre** : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =$ , car

(b) **Règle de comparaison n°1** :

Si pour $n \geqslant n_0$, on a $\underline{0 \leqslant u_n} \leqslant v_n$, alors [si

(et sa contraposée

(c) **Absolue convergence et semi-convergence** :

**Définition** : $(\sum u_n)$ est absolument convergente si

**Théorème n°2 : Lien avec la convergence** :

si $(\sum u_n)$ converge alors $(\sum u_n)$ converge

**démonstration 2** :
**Attention** : Réciproque fausse ! Contre-exemple :

**Définition** : $(\sum u_n)$ est semi convergente si

**Inégalité triangulaire pour les séries absolument convergentes** :

**Exemple** : Montrer que $\sum(\frac{\cos n}{n^2})$ converge.

(d) $\boxed{\textbf{Règle de comparaison n°2}}$ :
Si $*$ $(u_n)_n$ est une suite **complexe**,
$*$ $(v_n)_n$ est une suite réelle **positive** à partir d'un certain rang
$*$ $u_n = O(v_n)$,
alors si
(et sa contraposée
**Démonstration** :
**Remarque** : on a le même théorème si $u_n = o(v_n)$ (en effet, $u_n = o(v_n) \Longrightarrow$

(e) $\boxed{\textbf{Règle des équivalents}}$ : $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont 2 suites **réelles**.
si $u_n \sim v_n$ et si $\underline{v_n \geqslant 0}$ à partir d'un certain rang, alors $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont de même nature.
**Démonstration** :
**Remarque** : On a le même résultat avec des séries négatives (passer à $-u_n$). Donc pour l'étude d'une série, c'est que son terme général soit ou non de

(f) $\boxed{\textbf{Développement décimal (propre et impropre)}}$ : Revoir votre cours de MPSI.

## 3. SÉRIES DE RÉFÉRENCE

(a) $\boxed{\textbf{Séries géométriques}}$ : $z \in \mathbb{C}$. $(\sum z^n)$ converge $\Longleftrightarrow |z| <$ .
Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n =$ et $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} z^n =$
**Exemple** : Montrer que $(\sum \frac{e^{in}}{2^{2n}})$ est absolument convergente et calculer sa somme.

(b) $\boxed{\textbf{Séries de Riemann}}$ : $(\sum \frac{1}{n^\alpha})$ converge $\Longleftrightarrow$
**Exemples** :
$(\sum \frac{1}{n^{1.001}})$ : VG - $(\sum \frac{1}{n^{0.987}})$ : VG - $(\sum \frac{1}{n^{-0.007}})$ : VG - $(\sum \frac{1}{n^{2014}})$ : VG

## FAMILLES SOMMABLES - SÉRIES DOUBLES

## A) FAMILLES SOMMABLES DE RÉELS POSITIFS

### 1°) Définition-Proposition

Soit $I$ un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$.
1) On a :
la famille $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable**
$\iff \left\{\sum_{i\in J} a_i \ , \ J \text{ **fini** } \ et \ J\subset I\right\}$ est (dans $\mathbb{R}^+$)
$\iff \exists M\in\mathbb{R}^+$ tel que $\forall J\subset I$ , $J$ **fini** , $\sum_{i\in J} a_i$

Dans ce cas : $\left\{\sum_{i\in J} a_i \ , \ J \text{ **fini** } \ et \ J\subset I\right\}$ est réel (c'est-à-dire différent de $+\infty$),
on l'appelle somme de la famille **sommable** $(a_i)_{i\in I}$ et on la note $\sum_{i\in I} a_i$ .

On a donc $\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \qquad\qquad}$ .

*Démonstration 1*

### 2°) Proposition (caractérisation)

Soit $I$ un ensemble dénombrable et soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$.
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion) de parties finies de $I$ dont l'union fait $I$.
Alors la famille $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** $\iff$ la suite croissante $\left(\sum_{i\in I_n} a_i\right)$ est convergente (dans $\mathbb{R}^+$).

Et dans ce cas $\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n} a_i}$

*Démonstration 2*

### 3°) Proposition : linéarité & sous-famille

Soit $I$ un ensemble dénombrable et soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}^+$ , $\lambda\in\mathbb{R}^+$ et $I'\subset I$.
1) On suppose que $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont **sommables**.
Alors $(a_i+b_i)_{i\in I}$ ,$(\lambda a_i)_{i\in I}$ et $(a_i)_{i\in I'}$ sont **sommables**.
et l'on a $\sum_{i\in I}(a_i+b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$ , $\sum_{i\in I}\lambda a_i = \lambda\sum_{i\in I} a_i$ et $\sum_{i\in I'} a_i \leqslant \sum_{i\in I} a_i$.
2) Si $\forall i\in I$, $a_i\leqslant b_i$, alors on a $(b_i)_{i\in I}$ **sommable** $\Longrightarrow$ $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** et l'on a $\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{i\in I} b_i$.

*Démonstration 3*

### 4°) Théorème de sommation par paquets

Soit $I$ un ensemble dénombrable et soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$.
3) Soit $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ , une famille de parties de $I$ telle que $I = \coprod_{k\in\mathbb{N}} I_k$ (partition de $I$)

Alors $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** $\iff$ $\boxed{\text{et}}$ .

On a alors dans ce cas $\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \qquad\qquad}$

*Démonstration 4* : Hors-programme

**5°) Cas des séries positives**

Soit $(\sum u_n)$ une série à termes positifs.
Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **sommable** $\Longleftrightarrow$ .

Si c'est le cas, on a alors : $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$.

*Démonstration 5*

## B) FAMILLES SOMMABLES DE RÉELS OU DE COMPLEXES

**1°) Définition**

Soit $I$ un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** lorsque **la famille est sommable**

**2°) Somme d'une famille sommable**

a) **Définition : partie positive et négative**

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}$, on définit les deux familles $(a_i^+)_{i\in I}$ et $(a_i^-)_{i\in I}$ par

$a_i^+ =$ et $a_i^- =$

Et l'on a les liens : $a_i =$ $|a_i| =$

b) **Définition-Proposition (somme d'une famille sommable)**

i) Soit $I$ un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}$.
Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** alors $(a_i^+)_{i\in I}$ et $(a_i^-)_{i\in I}$ sont aussi **sommables**.

On définit alors la somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$ par $\boxed{\sum_{i\in I} a_i =}$

ii) Soit $I$ un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$.
Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** alors $(Re(a_i))_{i\in I}$ et $(Im(a_i))_{i\in I}$ sont aussi **sommables**.

On définit alors la somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$ par $\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} Re(a_i) + i \sum_{i\in I} Im(a_i)}$

*Démonstration 6*

**Remarque** :

Soit $I$ un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i\in I}$ une famille **sommable** de $\mathbb{C}$. Soit $I' \subset I$, alors $(a_i)_{i\in I'}$ est **sommable**.

c) **Proposition**

Soit $I$ un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i\in I}$ une famille **sommable** de $\mathbb{C}$.
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion) de parties finies de $I$ dont l'union fait $I$ ($I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$). Alors $\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} a_i\right)}$

*Démonstration 7*

**Nota Bene** :

**Attention ! Réciproque fausse** : on ne caractérise pas la sommabilité par l'existence de cette limite.

**3°) Proposition : linéarité**

L'ensemble des familles **sommables** de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) indexées par $I$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (sev de $\mathbb{K}^I$).
De plus l'application qui à une famille **sommable** associe sa somme est une forme linéaire.

*Démonstration 8*

**Exercice** :
L'espace vectoriel des familles **sommables** est engendré par les familles **sommables** positives.

*Démonstration 9*

### 4°) Théorème (de sommation par paquets) : le plus important des familles sommables

Soit $I$ un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbb{C}$.
Soit $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ , une famille de parties de $I$ telle que $I = \coprod_{k\in K} I_k$ (partition de $I$)

Alors :

$(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** $\iff \forall k \in \mathbb{N}$, $(a_i)_{i\in I_k}$ est **sommable** $\boxed{\text{et}}$ $\left(\sum_{i\in I_k} |a_i|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est **sommable**.

Et dans ce cas : $\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I_k} a_i\right)}$

*Démonstration 10* : H.P.

### 5°) Cas des séries absolument convergentes

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$.
Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **sommable** $\iff$ la série $(\sum u_n)$ est convergente.

Si c'est le cas, on a alors : $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$.

On en déduit le fait important suivant : Si $\sigma$ est une permutation de $\mathbb{N}$, alors $(\sum u_n)$ est absolument convergente $\iff$ $(\sum u_{\sigma(n)})$ est absolument convergente.

Si c'est le cas, on a alors : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}}$.

*Démonstration 11*

### 6°) Inégalité triangulaire

Soit $I$ un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i\in I}$ une famille **sommable** de $\mathbb{C}$, alors on a :
$$\left|\sum_{i\in I} a_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |a_i|.$$

*Démonstration 12*

### 7 °) Théorème (changement d'indexation) :

Soit $I$ un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$.
Soit $\sigma : J \longrightarrow I$ bijective.
Alors la famille $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** $\iff$ la famille $(a_{\sigma(j)})_{j\in J}$ est **sommable**.

Dans ce cas on a : $\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_{\sigma(j)}}$ [changement d'indice $i = \sigma(j)$ ou $j = \sigma^{-1}(i)$ ]

*Démonstration 13*

## C) APPLICATION : SÉRIES DOUBLES DE RÉELS OU DE COMPLEXES

### 1°) Cas des séries doubles positives (les trois "paquets" les plus classiques)

Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs. On dit aussi soit $(\sum u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une série double de nombres positifs. On a l'équivalence entre :

i) $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est **sommable**

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, la série $\left(\sum u_{n,p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge $\boxed{\text{et}}$ la série $\left(\sum \sigma_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge avec $\sigma_n = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$

iii) $\forall p \in \mathbb{N}$, la série $\left(\sum u_{n,p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\boxed{\text{et}}$ la série $\left(\sum \tau_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge avec $\tau_p = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$.

iv) $\forall k \in \mathbb{N}$, la série $\left(\sum s_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge avec $s_k = \sum_{n+p=k} u_{n,p}$.

Et si c'est le cas : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k}$

*Démonstration 14*

**Exemple**

Soient $(\sum a_n)$ et $(\sum b_n)$ deux séries à termes positifs convergentes.

Alors $(a_n b_p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est **sommable** et l'on a $\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} a_n b_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{p=0}^{+\infty} b_p\right)$

### 2°) Cas des séries doubles réelles ou complexes : le plus important des séries doubles

Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de complexes. On dit aussi soit $(\sum u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une série double de nombres complexes. On a l'équivalence entre :

i) $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est **sommable**

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, la série $\left(\sum u_{n,p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge **abs.** $\boxed{\text{et}}$ la série $\left(\sum \sigma'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, avec $\sigma'_n = \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$

iii) $\forall p \in \mathbb{N}$, la série $\left(\sum u_{n,p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **abs.** $\boxed{\text{et}}$ la série $\left(\sum \tau'_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge,avec $\tau'_p = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$.

iv) $\forall k \in \mathbb{N}$, la série $\left(\sum s'_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge avec $s'_k = \sum_{n+p=k} |u_{n,p}|$.

Et si c'est le cas : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k}$

*Démonstration 15*

### 3°) Produit de Cauchy

Soit $(\sum a_n)$ et $(\sum b_n)$ deux séries complexes **absolument** convergentes.

La série $(\sum c_k)$ avec : $c_k = \sum_{n+p=k} a_n b_p$ est **abs.** convergente et l'on a $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)}$

*Démonstration 16*

## FONCTIONS DE LA VARIABLE RÉELLE

Questionnaire de révision. Quand la réponse est courte on l'écrira sur cette feuille, sinon on écrira la réponse, l'énoncé ou la démonstration sur une feuille ou un cahier à côté.

1. Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^x$ :
2. Limite, continuité, dérivabilité, fonction de classe $C^n$, le principal fournisseur est :
3. Énoncer le théorème de la limite monotone.
4. Énoncer le théorème d'encadrement.
5. Critère séquentiel de la continuité :
6. **Application** : Soit $f$ continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall p \in \mathbb{Z}$ et $\forall q \in \mathbb{N}^*$ : $f(\dfrac{p}{q}) = \dfrac{q^2}{p^2+q^2}$. Déterminer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
7. $A \subset \mathbb{R}$ est **Ouvert** si :
8. $A \subset \mathbb{R}$ est **Fermé** si :
9. Si $f$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors pour tout $A \subset \mathbb{R}$ qui est ouvert, on a $f^{-1}(A)$ qui est aussi ouvert.
10. Si $f$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors pour tout $A \subset \mathbb{R}$ qui est fermé, on a $f^{-1}(A)$ qui est aussi fermé.
11. **Application** : Que dire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 10\cos(x^2) < x\}$ ?
12. Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires (V.I.). Conséquence principale de V.I. ?
13. Soit $f$ d'un intervalle $I$ dans un intervalle $J$ , **bijective**.
    Alors $f$ continue sur $I \Longrightarrow$
    Alors $f$ dérivable en $a \in I$ et ........... $\Longrightarrow$
14. Formule $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ avec $f$ bijective , $b = f(a)$ et .....
15. **En** 0 :
    $x^n = o(x^p)$ si $n.....p$. $\quad o(x^n) - o(x^n) = \quad o(x^n) + o(x^p) = \quad x^p o(x^n) =$
    $(\dfrac{1}{x^2} + 7\dfrac{1}{x} + 5 + 2x + o(x))(\dfrac{1}{x} - 3 + 5x^2 + o(x^2)) =$
16. Donner les équivalents simples en 0 , $+\infty$, 2 et 1 de $3x^4 + 2x^3 - 5x^2$ .
17. $\sin x \underset{0}{\sim}$ $\quad \cos x \underset{0}{\sim}$ $\quad \tan x \underset{0}{\sim}$ $\quad \arctan x \underset{0}{\sim}$ $\quad \arccos x \underset{0}{\sim}$ $\quad \arcsin x \underset{0}{\sim}$
    $\ln(1+x) \underset{0}{\sim}$ $\quad \ln(x) \underset{1}{\sim}$ $\quad \mathrm{th}x \underset{0}{\sim}$
    $\arctan x \underset{+\infty}{\sim}$ $\quad \mathrm{ch}x \underset{+\infty}{\sim}$ $\quad \mathrm{sh}x \underset{+\infty}{\sim}$ $\quad \mathrm{th}x \underset{+\infty}{\sim}$
18. Soit $a > 0$ et $b > 0$. A-t-on $|\ln x|^a \underset{0}{<<} \dfrac{1}{x^b}$ ou $\dfrac{1}{x^b} \underset{0}{<<} |\ln x|^a$ ?
19. Chaine en $+\infty$ : Soit $a > 0$ , $b > 0$ et $c > 0$. On a : $|\ln x|^a \underset{+\infty}{<<} x^b \underset{+\infty}{<<} e^{cx}$
20. Rolle :
21. Accroissements finis (A.F.) :
22. Montrer que si $f'$ est bornée sur $I \subset \mathbb{R}$ alors $f$ est lipschitzienne.
23. Théorème de prolongement de la dérivée.
24. Théorème de prolongement de la dérivée (cas infini).
25. Comment étudier la dérivabilité en un point d'arrêt : Soit $f$ dérivable sur $I - \{a\}$ et continue sur $I$. Étude en $a$.

26. $f$ est de classe $C^0$ si
   $f$ est de classe $C^1$ si
   $f$ est de classe $C^2$ si
   $f$ est de classe $C^n$ si
   $f$ est de classe $C^{n+1}$ si ou si
   $f$ est de classe $C^\infty$ si
27. Formule de Leibniz : $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=}$
28. Comment montrer que $f$ est convexe
   quand $f$ est $C^2$ :
   quand $f$ est $C^1$ :
   quand $f$ est rien du tout :

## FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES RÉELLES

1. **Fonction logarithme**

   **Définition** : On appelle fonction logarithme réelle $\boxed{\ln}$ : **la** primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. On a donc :

   $$\boxed{\forall x \in ]0, +\infty[\ ,\ \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt}$$

   **Propriétés**

   (a) La fonction ln est de classe $C^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in ]0, +\infty[$ : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

   (b) $\boxed{\forall (x, y) \in ]0, +\infty[^2\ ,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y}$.
   **Démonstration** : Soit $a \in ]0, +\infty[$, **fixé**. On considère l'application
   $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \ln(ax) - \ln x - \ln a$.
   $f$ est dérivable et $\forall x \in ]0, +\infty[\ ,\ f'(x) = \dfrac{a}{ax} - \dfrac{1}{x} = 0$. On a donc $f$ qui est constante sur $]0, +\infty[$ et comme $f(1) = 0$, on en déduit que $\forall x \in ]0, +\infty[\ ,\ f(x) = 0$. On conclut en prenant $a = y$.
   **Corollaire** : $\forall x \in ]0, +\infty[\ ,\ \forall n \in \mathbb{Z}$ : $\boxed{\ln(x^n) = n \ln x}$. (Récurrence)

   (c) La fonction ln est bijective de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
   **Démonstration** : Comme $\forall x \in ]0, +\infty[$ : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On a donc le tableau de variation suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln'$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\ln$ | $L_1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $L_2$ |

   Le théorème de la limite monotone assure que la fonction ln admet une limite (éventuellement infinie) en 0 et en $+\infty$.

Comme $2>1$ on a $\ln 2>\ln 1=0$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(2^n)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln 2=+\infty$. Le critère séquentiel de la limite en $+\infty$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(2^n)=L_2$ Par l'unicité de la limite on en déduit que $L_2=+\infty$.

Pour calculer $L_1$ on utilise la formule $\ln(x)=-\ln(\frac{1}{x})$ qui tend vers $-L_2=-\infty$ lorsque $x$ tend vers $0^+$. Donc $L_1=-\infty$

Conclusion : ln réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]L1,L2[=\mathbb{R}$.

(d) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0}$

**Démonstration** : Considérons la fonction $f$ définie par $f(x)=\ln x-\sqrt{x}$.

$f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[$ : $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$ d'où le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $0$ | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f$ | $\nearrow$ | $\ln 4-2$ | $\searrow$ |

et donc $\forall x\geqslant 4$ : $f(x)\leqslant f(4)$ d'où :

$\forall x\geqslant 4$ : $0\leqslant\ln x\leqslant f(4)+\sqrt{x}$ soit $\forall x\geqslant 4$ : $0\leqslant\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{f(4)}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ et par le théorème d'encadrement on conclut.

(e) ln est concave sur $]0,+\infty[$. ($\forall x\in]0,+\infty[$ : $\ln''(x)=\frac{-1}{x^2}<0$).

(f) **Tracé**

2. **Fonction exponentielle réelle**

**Définition** : On appelle fonction exponentielle réelle $\boxed{\exp}$, la **fonction réciproque de la fonction** ln.

**Propriétés**

(a) La fonction exp est continue et bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, comme fonction réciproque d'une fonction continue et bijective.

(b) $\boxed{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ \exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)}$.

**Démonstration** : Posons $X=\exp(x)$ et $Y=\exp(y)$. On a donc $x=\ln X$ et $y=\ln Y$, d'où $x+y=\ln X+\ln Y=\ln(XY)$ et donc $XY=\exp(x+y)$, c'est-à-dire $\exp(x)\exp(y)=\exp(x+y)$.

(c) La fonction exp est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}:\exp'(x)=\exp(x)}$.

**Démonstration** : Le théorème de la dérivée d'une fonction réciproque assure que comme $\forall x\in]0,+\infty[\ \ln'(x)\neq 0$, la fonction exp est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}:\exp'(y)=\frac{1}{\ln'(x)}$ avec $x=\exp(y)\iff y=\ln(x)$.

On a donc $\forall y\in\mathbb{R}:\exp'(y)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x=\exp(y)$.

On en déduit ensuite que $\exp'=\exp$ est de classe $C^1$ donc exp est de classe $C^2$ et par récurrence exp est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Le tableau de variation de exp se déduit de celui de ln :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $\exp'$ | $+$ |
| $\exp$ | $0 \nearrow +\infty$ |

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\exp(y)}{y}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Enfin exp est convexe sur $\mathbb{R}$ . ($\forall x\in\mathbb{R}$ : $\exp''(x)=\exp(x)>0$).

(e) **Tracé**

(f) **Définition** : On appelle nombre de Neper et on le note $e=\exp(1)$ ($e\simeq 2,718...$). La propriété (b) montre que $\forall n\in\mathbb{Z}$ : $\exp(n)=\exp(1)^n=e^n$. On peut également (à faire en exercice) montrer que $\forall r\in\mathbb{Q}$ : $\exp(r)=\exp(1)^r=e^r$.

**Conséquence fondamentale** :

Par analogie avec ces 2 formules, on notera $\boxed{\forall x\in\mathbb{R} : e^x=\exp(x)}$.

La propriété (b) devient donc $e^{x+y}=e^xe^y$.

3. **Fonction puissance**

**Définition** : Soit $x\in]0,+\infty[$ et soit $\alpha\in\mathbb{R}$, on appelle "$x$ puissance $\alpha$", le réel noté et défini par $\boxed{x^\alpha=e^{\alpha\ln x}}$.

**Propriétés** : $\forall x\in]0,+\infty[$ et $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ : $x^{\alpha+\beta}=x^\alpha x^\beta$ , $(x^\alpha)^\beta=x^{\alpha\beta}$

4. **Limites classiques**

$\forall\alpha>0$ et $\forall\beta>0$ : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta}=+\infty$ , $\displaystyle\lim_{x\to0}x^\alpha|\ln x|^\beta=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^\alpha e^{-x}=0$.

**Démonstration** : $\displaystyle\frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta}=[\frac{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\ln x}]^\beta=[\frac{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\frac{\beta}{\alpha}\ln(x^{\frac{\alpha}{\beta}})}]^\beta=\lambda[\frac{X}{\ln X}]^\beta$ ; finir en exercice.

5. **Logarithme en base $a$**

**Définition** : Soit $a>0$ tel que $a\neq1$. On appelle fonction logarithme de base $a$ la fonction notée $\log_a$ et définie sur $]0,+\infty[$ par $\boxed{\log_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}}$

Pour $a>1$ :

| $x$ | $0$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $\log_a$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

et pour $0<a<1$ :

| $x$ | $0$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $\log_a$ | $+\infty \searrow -\infty$ |

6. **Exponentielle de base $a$**

**Définition** : Soit $a > 0$. On appelle fonction exponentielle de base $a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{a^x = e^{x \ln a}}$

Pour $a > 1$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| | | | $+\infty$ |
| $a^x$ | | $\nearrow$ | |
| | $0$ | | |

et pour $0 < a < 1$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| | $+\infty$ | | |
| $a^x$ | | $\searrow$ | |
| | | | $0$ |

## 7. Fonctions hyperboliques

$$\boxed{\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{th}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$$

**Formule fondamentale** : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1}$

$\mathrm{ch}' x = \mathrm{sh} x \qquad \mathrm{sh}' x = \mathrm{ch} x \qquad \mathrm{th}\ ' x = 1 - \mathrm{th}^2 x$

# RÉSOLUTION APPROCHÉE DE $f(x) = 0$

## A. Méthode des tangentes (NEWTON)

**Problème** : Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ (au moins) qui s'annule en un réel $\alpha$ et tel que cette racine soit simple (sinon on a $f'(\alpha) = 0$ et fait l'étude avec $f'$). Le but du problème est de trouver une valeur numérique de $\alpha$. On supposera que l'on peut dégager un intervalle suffisamment petit $[a, b]$ pour que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signe opposé et tel que $f'$ et $f''$ soit de signe constant. Quitte à changer $f$ en $-f$ on peut supposer que $f''$ soit strictement positif sur $[a, b]$ et quitte à changer $f$ en $g$ avec $g(x) = f(-x)$ on peut supposer que $f''$ et $f'$ soit strictement positif sur $[a, b]$.

On considère donc le cas "standard" :
$f$ de classe $C^2$ sur $[a, b]$.
$f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.
$\forall x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$.

On note $\alpha$ l'unique racine de $f$ sur $[a, b]$.
Soit $s$ l'abscisse du point d'intersection de la tangente à $f$ en $b$ et de l'axe des abscisse.
**Proposition** : On a

$$\boxed{s = b - \frac{f(b)}{f'(b)}}$$

1. D'une part comme $f$ est convexe sur $[a, b]$, $f$ est "au dessus de ses tangentes" et donc $\underline{s \geqslant \alpha}$ et comme $f$ est croissante sur $[a, b]$ on a $f(s) \geqslant 0$, .
   D'autre part **L'inégalité de Taylor-Lagrange (ITL)** sur $[\alpha, b]$ donne :
   $|f(\alpha) - (f(b) + f'(b)(\alpha - b)| \leqslant \dfrac{(\alpha - b)^2}{2} M_2$ où on a poser $M_2 = \sup\{|f''(x)| \ , \ x \in [a, b]\}$.
   Donc comme $f(\alpha) = 0$, on a :
   $$|f(b) + f'(b)(\alpha - b)| \leqslant \frac{(\alpha - b)^2}{2} M_2 \Longrightarrow |f(b) - bf'(b) + \alpha f'(b)| \leqslant \frac{(\alpha - b)^2}{2} M_2$$
   $$\Longrightarrow |f(b) - bf'(b) + \alpha f'(b)| \leqslant \frac{(\alpha - b)^2}{2} M_2 \Longrightarrow | - sf'(b) + \alpha f'(b)| \leqslant \frac{(\alpha - b)^2}{2} M_2$$
   $$\Longrightarrow |\alpha - s| \leqslant \frac{(\alpha - b)^2}{2} \frac{M_2}{f'(b)}$$

   $$\boxed{\textbf{Conclusion : } 0 \leqslant s - \alpha \leqslant \frac{(b - \alpha)^2}{2} \frac{M_2}{f'(b)}}$$

2. On itère le processus : $\boxed{s_{n+1} = s_n - \dfrac{f(s_n)}{f'(s_n)} \text{ et } s_0 = b}$
   On a avec le 1. , $\forall n \in \mathbb{N}$ : $s_n \geqslant \alpha$ donc $f(s_n) \geqslant 0$ et donc **la suite $(s_n)$ est décroissante**.
   Comme elle est minorée par $\alpha$, elle converge vers un réel $L$ qui vérifie $L = L - \dfrac{f(L)}{f'(L)}$ d'où $f(L) = 0$ ce qui implique $L = \alpha$.

   $$\boxed{\textbf{Conclusion : } \lim_{n \to +\infty} s_n = \alpha}$$

**De plus** $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant s_{n+1} - \alpha \leqslant \dfrac{(s_n - \alpha)^2}{2} \dfrac{M_2}{f'(s_n)}$

Soit $m_1$ un minorant de $f'$ sur $[a, b]$ (par exemple $f(a)$ puisque $f'$ est croissante) et posons $\lambda = \dfrac{M_2}{2m_1}$ et $\varepsilon_0 = b - a$ On a $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant s_{n+1} - \alpha \leqslant \lambda(s_n - \alpha)^2$ et par récurrence on peut conclure :

$$\boxed{\textbf{Conclusion} : \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant s_n - \alpha \leqslant \frac{1}{\lambda}(\lambda\varepsilon_0)^{2^n}}$$

**Remarque fondamentale** : Cette majoration de $s_n - \alpha$ n'a d'intérêt que **si** $|\lambda\varepsilon_0| < 1$ (et même assez proche de 0) : il faudra donc que $b - a$ soit assez petit autrement dit que $a$ et $b$ soit assez proche de $\alpha$ ! cela dit dès que $|\lambda\varepsilon_0| < 1$ la suite $(s_n)$ converge **très** vite vers $\alpha$.

**Exemple** : Déterminer une valeur approchée à $10^{-20}$ près de la racine réelle du polynôme $P = -X^3 + X + 1$. Une rapide étude de la fonction $g$ définie par $g(x) = -x^3 + x + 1$ montre que $P$ admet une unique racine réelle $\alpha \in [1, 2]$. D'autre part sur $[1, 2]$, $g$ est décroissante et concave. Considérons $f$ définie par $f(x) = -g(x) = x^3 - x - 1$. $f$ est croissante et convexe sur $[1, 2]$. Le calcul de $M_2$ et $m_1$ donne $M_2 = 12$ et $m_1 = 2$ et donc $|\lambda\varepsilon_0| = 3 > 1$. On resserre donc l'intervalle : $f(1,3)f(1,4) < 0$ et on prend donc $a = 1,3$ et $b = 1,4$ d'où $M_2 = 8,4$ et $m_1 = 4,07$ et $q = \lambda\varepsilon_0 = \dfrac{8,4}{2 \times 4,07} 0,1 = 0.103.. < 0.11$ et $0 < \dfrac{1}{\lambda} < 1$

**Conséquence** : $\boxed{\text{Avec } s_0 = 1,4 \text{ on a donc} : \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant s_n - \alpha \leqslant (0.11)^{2^n}}$

Le premier entier $n$ tel que $(0.11)^{2^n} < 10^{-20}$ est $n = 5$ et la calcul de $s_5$ donne $s_5 = 1.324717957244746025960909...$ et donc $\boxed{\alpha = 1.32471795724474602 59... \text{ à } 10^{-20} \text{ près}}$.

## B. Méthode des cordes (LAGRANGE)

On se place dans les mêmes hypothèses standard que pour la méthode de Newton.

On considère $s$ l'abscisse du point d'intersection de la corde des points $(a, f(a)$ et $(b, f(b)$ avec l'axes des abscisses.

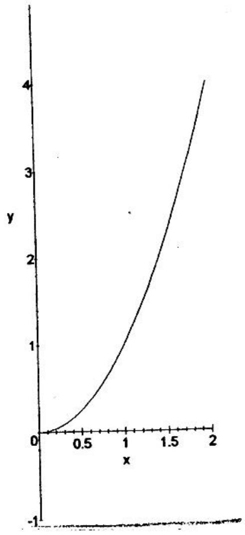
On a : $\boxed{s = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}}$ et on montre que, en posant $M_2 = \sup\{|f''(x)| \ , \ x \in [a, b]\}$ que,

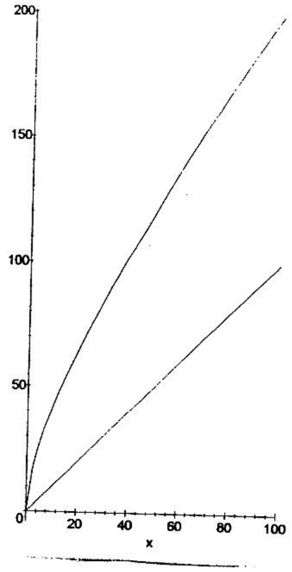
$$\boxed{0 \leqslant \alpha - s \leqslant \frac{(b-a)^3 M_2}{8(f(b) - f(a))}}$$

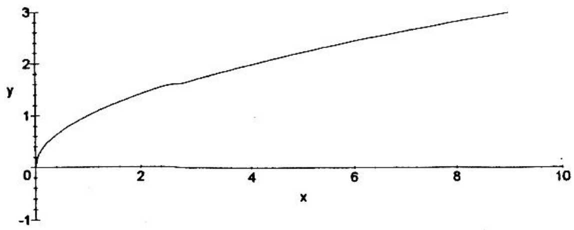
# TRACER LES COURBES $y = f(x)$

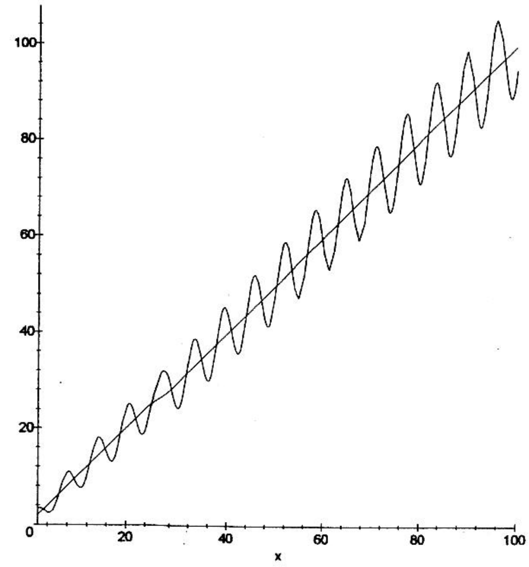
**Soit à tracer la fonction $f$**.

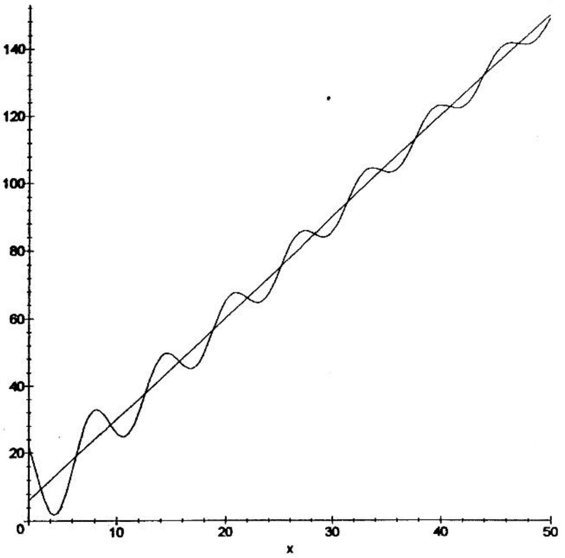
1. **Domaine de définition** : $D$ (mis sous forme de réunion d'intervalles).
2. **Parité-Imparité** et donc réduction du domaine à $D \cap \mathbb{R}^+$ et symétrie
3. **T-Périodicité** et donc réduction du domaine à $[a, a+T]$ et translations des "2 côtés".
4. **Variations** et tableau de variation de la fonction $f$ sur $D$.
5. **Branches infinies**
   Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ alors on a deux méthodes :
   (a) On calcul $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a}$ (si elle existe !).
   Si $\underline{a = \infty}$ on a une branche parabolique de direction $(Oy)$,
   si $\underline{a = 0}$ on a une branche parabolique de direction $(Ox)$,
   sinon on calcul $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b}$ (si elle existe !).
   Si $\underline{b \in \mathbb{R}}$ on a une asymptote oblique $\mathcal{D}/y = ax+b$ et si $b = \infty$ on a une branche parabolique de direction $\mathcal{D}/y = ax$.
   (b) On développe la fonction $f$ au voisinage de $+\infty$ (avec un DL par exemple) pour obtenir (si c'est possible) : $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$.
   **Remarque** : On fait de même en $-\infty$.
   **Exemples** : Étudier et tracer la branche infinie en $+\infty$ pour les fonction suivantes :
   $f(x) = x^2$ $\quad$ $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $f(x) = 3x + \sqrt{x}$
   $f(x) = 3x + \dfrac{7}{x}$ $\quad$ $f(x) = 3x + \dfrac{\sin x}{x}$ $\quad$ $f(x) = 3x + \sin x$
6. **Point d'arrêt**
   Par **Point d'arrêt** on entend tout point $a$ "au bord" d'un des intervalles de $D$ où $f$ se prolonge par continuité ou si $f$ est définie mais pas dérivable à priori en $a$. Pour tracer correctement la courbe au voisinage d'un tel point il faut étudier la dérivabilité en ce point pour obtenir la pente. Pour cela il y a deux méthodes :
   (a) On calcule $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \neq}} f'(x) = L}$ (si elle existe !).
   Si $\underline{L \in \mathbb{R}}$ alors le théorème de $\boxed{\text{prolongement de la dérivée}}$ assure que $f$ est dérivable en $a$ et que $\boxed{f'(a) = L}$. On a de plus la dérivée qui est continue en $a$ (donc $f$ est de classe $C^1$ en $a$).
   Si $\underline{L = \infty}$ alors $f$ présente en $a$ une tangente verticale.
   (b) On calcule $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \neq}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = L}$ (si elle existe !).
   Si $\underline{L \in \mathbb{R}}$ alors $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = L$.
   Si $\underline{L = \infty}$ alors $f$ présente en $a$ une tangente verticale.

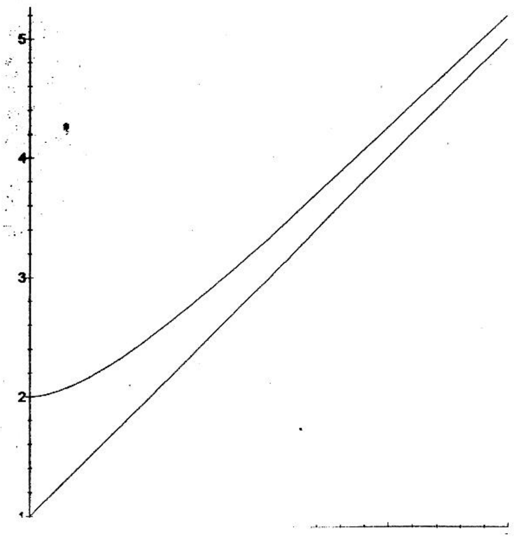


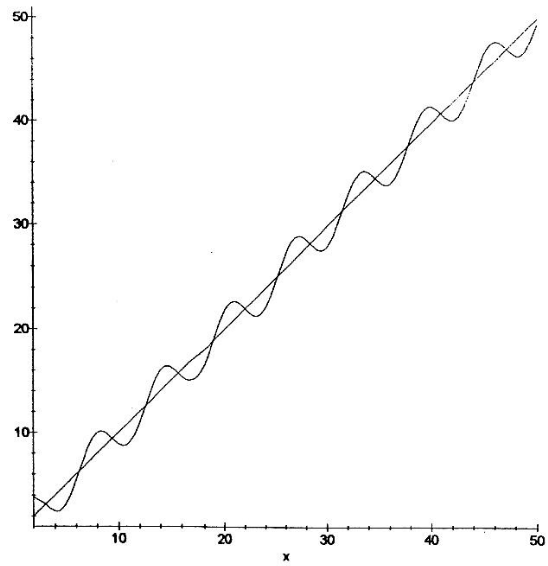




Etudier les branches infinies

65

## TRIGONOMÉTRIE RÉCIPROQUE

1. Compléter : $y = \arcsin x \iff \Bigg\{$

2. Compléter : $y = \arccos x \iff \Bigg\{$

3. Compléter : $y = \arctan x \iff \Bigg\{$

4. Tracer des 3 fonctions $\arcsin, \arccos, \arctan$

5. Parité de ces fonctions :
6. $\forall x \in [-1, 1]$ , $\arcsin x + \arccos x =$
7. $\forall x > 0$ , $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} =$
8. $\forall x < 0$ , $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} =$
9. $\forall x \in$ , $\sin(\arcsin x) =$
10. $\forall x \in$ , $\arcsin(\sin x) =$
    Tracer la fonction $f(x) = \arcsin(\sin x)$

11. $\forall x \in$ , $\cos(\arccos x) =$
12. $\forall x \in$ , $\arccos(\cos x) =$
    Tracer la fonction $f(x) = \arccos(\cos x)$

13. $\forall x \in$ , $\tan(\arctan x) =$
14. $\forall x \in$ , $\arctan(\tan x) =$
    Tracer la fonction $f(x) = \arctan(\tan x)$

15. **Déterminer** :

    $\arcsin(0) =$ , $\arcsin(1) =$ , $\arcsin(-1) =$ , $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) =$ , $\arcsin(\frac{1}{2}) =$
16. **Déterminer** :

    $\arccos(0) =$ , $\arccos(1) =$ , $\arccos(-1) =$ , $\arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) =$ , $\arccos(-\frac{1}{2}) =$
17. **Déterminer** :

    $\arctan(0) =$ , $\arctan(1) =$ , $\arctan(-1) =$ , $\arctan(-\frac{\sqrt{3}}{3}) =$ , $\arctan(\sqrt{3}) =$

18. **Calculer les dérivées** :
19. $\forall x \in$ , $\arcsin' x =$
20. $\forall x \in$ , $\arccos' x =$
21. $\forall x \in$ , $\arctan' x =$

22. **Exercices** :
    (a) Montrer que $\forall x \in [-1, 1]$ , $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
    (b) Montrer que pour tout $x > 0$ et pour tout $y > 0$ tel que $xy \neq 1$, on a l'équivalence
    $$\arctan(\frac{x+y}{1-xy}) = \arctan x + \arctan y \iff xy < 1$$
    En déduire que $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$

# TRIGONOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

1. **Définitions** :
   $\mathrm{sh}(t) =$
   $\mathrm{ch}(t) =$
   $\mathrm{th}(t) =$
2. **Formules fondamentales** : $\mathrm{ch}t + \mathrm{sh}t =$ $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t =$
3. **Lien avec la trigonométrie** :
   $\mathrm{sh}(t) = \quad \sin( \quad )$

   $\mathrm{ch}(t) = \cos( \quad )$

   $\mathrm{th}(t) = \quad \tan( \quad )$

4. Développer $\mathrm{ch}(a+b) =$ $\mathrm{sh}(a+b) =$ $\mathrm{th}\ (a+b) =$

5. Tracer des 3 fonctions sh , ch , th :

6. **Exercices** :
   (a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
   (b) Tracer la courbe $x^2 - 4y^2 = 1$ dans $\mathbb{R}^2$ rapporté à son repère canonique.

# FRACTIONS RATIONNELLES

1. **Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$**

Soit $\boxed{F = \dfrac{P(X)}{(X-\alpha_1)^{s_1}\dots(X-\alpha_n)^{s_n}}}$ une fraction irréductible de $\mathbb{C}(X)$

où les $\alpha_i$ sont 2 à 2 distincts, non racines de $P(X)$ (la fraction a été simplifiée au maximum) et les $s_i$ des entiers naturels non nuls.
Alors il existe un unique polynôme $A$ et des uniques **complexes** $a_{i,j}$ tels que :

$$\boxed{F \;=\; A(X) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s_i} \frac{a_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j}}$$

2. **Exemples** :
Écrire, sans effectuer les calculs, la décomposition en éléments simples des fractions suivantes :
   (a) $F = \dfrac{1}{(X-3)(X-7)(X+4)} =$
   (b) $F = \dfrac{X^4+1}{(X-3)(X-7)(X+4)} =$
   (c) $F = \dfrac{1}{(X-3)^2(X-7)^3(X+4)} =$
   (d) $F = \dfrac{1}{(X-a_1)\dots(X-a_n)} =$
   (e) $F = \dfrac{P(X)}{(X-a_1)^{s_1}} =$
   (f) $F = \dfrac{X^2-5X+4}{X^3-1} =$

3. **Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$**

Soit $\boxed{F = \dfrac{P(X)}{(X-\alpha_1)^{s_1}\dots(X-\alpha_n)^{s_n}(X^2+\beta_1X+\gamma_1)^{t_1}\dots(X^2+\beta_mX+\gamma_m)^{t_m}}}$

une fraction irréductible de $\mathbb{R}(X)$ où les $\alpha_i$ sont 2 à 2 distincts et non racines de $P(X)$ (la fraction a été simplifiée au maximum), où les couples $(\beta_i,\gamma_i)$ sont 2 à 2 distincts et vérifient : $\beta_i^2-4\gamma_i<0$, les $s_i$ et les $t_i$ des entiers naturels non nuls.
Alors il existe un unique polynôme $A$, des uniques **réels** $a_{i,j},\ b_{i,j},\ c_{i,j}$ tels que :

$$\boxed{F \;=\; A(X) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s_i} \frac{a_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{t_i} \frac{b_{i,j}X+c_{i,j}}{(X^2+\beta_iX+\gamma_i)^j}}$$

4. **Exemples** :
Écrire, sans effectuer les calculs, la décomposition en éléments simples des fractions suivantes :
   (a) $F = \dfrac{1}{(X-3)^2(X-7)^3(X+4)} =$
   (b) $F = \dfrac{X^{20}+13}{X(X-1)^2(X^2+3X+5)(X^2+1)^3} =$
   (c) $F = \dfrac{X^4}{(X^2+X+1)^2} =$

(d) $F = \dfrac{1}{X^4-1} =$

5. **Vocabulaire** :
   Donner la définition, pour une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$ $F = \dfrac{P}{Q}$, de :
   (a) fraction irréductible :
   (b) degré d'une fraction $F$ :
   (c) pôle d'ordre $s$ de $F$ :
   (d) racine d'ordre $s$ de $F$ :
   (e) partie entière de $F$ :
6. **Méthode de calcul** :
   (a) Calcul de la partie entière de $\dfrac{P}{Q}$ :
   (b) Soit $\alpha$ un pôle simple de $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{(X-\alpha)Q_1}$.
   Alors on a $F = A + \dfrac{a}{X-\alpha} + \dots$ avec $a =$ et (H.P.) $a =$
   (c) Soit $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{(X^2+bX+c)Q_1}$ avec $b^2 - 4c < 0$
   Alors on a $F = A + \dfrac{aX+a'}{X^2+bX+c} + \dots$ avec $a$ et $a'$ calculés avec $z_0$ une par la relation

   (d) Utilisation de la parité : Par exemple si $F = \dfrac{X^2+1}{X^2(X^2-4)}$, alors :
   $F =$ et l'on a les relations :
   (e) Utilisation du conjugué dans $\mathbb{C}\,(X)$ : Par exemple si $F = \dfrac{X^2+3}{X^4-1}$, alors :
   $F =$ et l'on a les relations :
   (f) Utilisation de l'infini : Par exemple si $F = \dfrac{1}{X^2(X-4)}$, alors
   $F =$ et l'on a les relations :
   (g) autres :

7. **Utilisation de la décomposition en éléments simples** :
   Les utilisations sont principalement l'intégration des fractions rationnelles, le calcul de somme ou de séries (la décomposition fait apparaitre des sommes télescopiques).

## PRIMITIVES DE FONCTIONS USUELLES

1. **Fractions rationnelles**

   On simplifie éventuellement par changement de variable. Exemple : $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^{10}+1}dx$ , CdV : $u =$

   On décompose en $\boxed{\text{éléments simples}}$.

   On a donc une combinaison linéaire de fonction du type :

$$\textbf{polynôme}, \ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x-a}}, \ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(x-a)^n}}, \ \frac{\alpha\mathbf{x}+\beta}{\mathbf{x^2+ax+b}} \ (\mathbf{\Delta = a^2-4b<0}), \ \frac{\alpha\mathbf{x}+\beta}{\mathbf{(x^2+ax+b)^n}}$$

   (a) $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \qquad\qquad\qquad}$

   (b) $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n}dx = \qquad\qquad\qquad}$ avec $n \geqslant 2$

   (c) $\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}dx = \int \frac{(2\frac{\alpha}{2}x+\frac{\alpha}{2}a)+\beta-\frac{\alpha}{2}a}{x^2+ax+b}dx = \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b}dx + \gamma\int \frac{1}{x^2+ax+b}dx$
   (avec $\gamma$ =constante)

      i. $\boxed{\displaystyle\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b}dx = \qquad\qquad}$

      ii. calcul de $\boxed{\displaystyle\int \frac{1}{x^2+ax+b}dx}$. Mise en forme canonique de $x^2+ax+b$ :

$$x^2+ax+b = (x+\frac{a}{2})^2 - \frac{\Delta}{4} = (x+\frac{a}{2})^2 + c^2 \text{ avec } c = \sqrt{\tfrac{-\Delta}{4}} \text{ (car } \Delta < 0)$$

$$\text{Donc } \boxed{\int \frac{1}{x^2+ax+b}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{a}{2})^2+c^2}dx = \frac{1}{c}\arctan(\frac{x+\frac{a}{2}}{c})}$$

$$\underline{\textbf{En particulier}} : \boxed{\int \frac{1}{x^2+c^2}dx = \qquad\qquad\qquad}$$

   Conséquence : $\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}dx = \frac{\alpha}{2}\ln(x^2+ax+b) + \gamma\frac{1}{c}\arctan(\frac{x+\frac{a}{2}}{c})$

   (d) $\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^n}dx = \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n}dx + \gamma\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n}dx$
   (avec $n \geqslant 2$ et $\gamma$=constante)

      i. La première intégrale est de la forme $\displaystyle\int \frac{u'}{u^n}$

      ii. Pour la deuxième, on met sous forme canonique et on effectue le changement de variable $t = \dfrac{x+\frac{a}{2}}{c}$ : $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n}dx = \int \frac{1}{((x+\frac{a}{2})^2+c^2)^n}dx = \delta\int \frac{1}{(t^2+1)^n}dt$ avec $\delta$ =cst.
      Puis on effectue le changement de variable $\underline{t = \tan\theta}$
      $\left(dt = (1+\tan^2\theta)d\theta = (1+t^2)d\theta \text{ et } 1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{cos^2\theta}\right)$ : d'où

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^n}dt = \int \cos^{2n-2}\theta d\theta \text{ puis } \underline{\textbf{linéarisation}}.$$

2. $\displaystyle\int P(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ où $P$ est une fonction polynômiale de 2 variables.

**Méthode** : On linéarise avec les formules d'Euler $\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}$ et $\boxed{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$.
Ce qui donne une combinaison linéaire d'intégrales du type
$\displaystyle\int \cos k\theta d\theta = \frac{1}{k}\sin k\theta$ et $\displaystyle\int \sin k\theta d\theta = \frac{-1}{k}\cos k\theta$.
**Remarque** : On peut parfois éviter la linéarisation (par exemple si
$P(\cos\theta, \sin\theta) = Q(\sin\theta)\cos\theta = Q(u)u'$ avec $u = \sin\theta$,
**Exemple** : $\displaystyle\int \cos^7\theta d\theta = \int \cos^6\theta\cos\theta d\theta = \int (1-\sin^2\theta)^3\cos\theta d\theta = \int (1-t^2)^3 dt$ avec $t = \sin\theta$.

3. $\displaystyle\int R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ où $R$ est une fraction rationnelle de 2 variables.

On pose $\omega(\theta) = R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ avec les règles :
$d(-\theta) = -d\theta$, $d(\theta + C) = d\theta$, $d(C-\theta) = -d\theta$.
Règle de Bioche :
Si $\omega(-\theta) = \omega(\theta)$ alors on fait le changement de variable $t = \cos\theta$.
Si $\omega(\pi-\theta) = \omega(\theta)$ alors on fait le changement de variable $t = \sin\theta$.
Si $\omega(\theta+\pi) = \omega(\theta)$ alors on fait le changement de variable $t = \tan\theta$.
Sinon on fait le changement de variable $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ (en dernier recours).
Remarque : Pour retenir si on pose $t = \cos\theta$ ou $t = \sin\theta$ ou $t = \tan\theta$, on utilise les propriétés spécifiques à chacune des trois fonctions (cos, sin et tan) :
$t = \cos(-\theta) = \cos\theta$ ce qui est Faux pour les fonctions sin et tan "d'où" $t = \cos\theta$.
$t = \sin(\pi-\theta) = \sin\theta$ ce qui est Faux pour les fonctions cos et tan "d'où" $t = \sin\theta$.
$t = \tan(\theta+\pi) = \tan\theta$ ce qui est Faux pour les fonctions cos et sin "d'où" $t = \tan\theta$.
Rappel : Si $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ alors on a :

$$\boxed{\cos\theta = \mathbf{\frac{1-t^2}{1+t^2}},\ \sin\theta = \mathbf{\frac{2t}{1+t^2}},\ \tan\theta = \mathbf{\frac{2t}{1-t^2}},\ \mathbf{d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}}}$$

Conséquence : $\displaystyle\int R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$ : Fraction rationnelle "pure"

4. $\displaystyle\int R(\tan\theta)d\theta = \int \frac{R(t)}{1+t^2}dt$ avec le changement de variable $\boxed{t = \tan\theta}$.

5. $\displaystyle\int P(t)e^t dt$ où $P$ est un polynôme.

On effectue des Intégrations Par Parties en dérivant $P(t)$.

6. $\displaystyle\int R(\text{ch}t, \text{sh}t)dt$ : On peut remplacer ch$t$ et sh$t$ par leurs définitions : $\text{ch}t = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ et $\text{sh}t = \dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$. On est alors ramené au 5-ième paragraphe.

7. $\displaystyle\int R(\ln x)dx$

On effectue le changement de variable $\boxed{t = \ln x}$ ($\iff x = e^t$)
On en déduit que $\displaystyle\int R(\ln x)dx = \int R(t)e^t dt$ (Voir le 5 si $R$ est un polynôme).

8. $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax+b})dx$

L'idée est de faire disparaitre la racine carrée en effectuant le changement de variable $\boxed{t=\sqrt{ax+b}}$ d'où $x=\dfrac{t^2-b}{a}$ et $dx=\dfrac{2tdt}{a}$.

On en déduit que $\displaystyle\int R(x,\sqrt{ax+b})dx=\int R(\frac{t^2-b}{a},t)\frac{2tdt}{a}$ : Fraction rationnelle "pure".

9. $\displaystyle\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$

L'idée est de faire disparaitre la racine carrée en effectuant le changement de variable $\boxed{t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}}$ d'où $x=\dfrac{b-dt^n}{ct^n-a}$.

On en déduit que $\displaystyle\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx=\int R(\frac{b-dt^n}{ct^n-a},t)\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(ct^n-a)^2}dt$ : Fraction rationnelle "pure".

10. $\displaystyle\int R(x,\sqrt{1-x^2})dx$

L'idée est de faire disparaitre la racine carrée en effectuant le changement de variable $\boxed{x=\sin t}$ ou $\boxed{x=\cos t}$ d'où $\sqrt{1-x^2}=\mid\cos t\mid$ ou $\sqrt{1-x^2}=\mid\sin t\mid$ (les valeurs absolues seront supprimées avec le contexte et un choix des bornes les plus **rapprochées possibles**).

On en déduit que $\displaystyle\int R(x,\sqrt{1-x^2})dx=\int R(\sin t,\mid\cos t\mid)\cos tdt$ (avec $t=\sin t$).

On finit le calcul avec le 2-ième ou le 3-ième paragraphe.

11. $\displaystyle\int R(x,\sqrt{x^2+1})dx$

L'idée est de faire disparaitre la racine carrée en effectuant le changement de variable $\boxed{x=\mathrm{sh}t}$ d'où $\sqrt{x^2+1}=\mathrm{ch}t$ (car $\mathrm{ch}^2t-\mathrm{sh}^2t=1$).

On en déduit que $\displaystyle\int R(x,\sqrt{x^2+1})dx=\int R(\mathrm{sh}t,\mathrm{ch}t)\mathrm{ch}tdt$.

On finit le calcul avec le 6-ième paragraphe.

12. $\displaystyle\int R(x,\sqrt{x^2-1})dx$

Idem 11. avec $\boxed{x=\mathrm{ch}t}$ d'où $\sqrt{x^2-1}=\mid\mathrm{sh}t\mid$.

On en déduit que $\displaystyle\int R(x,\sqrt{x^2-1})dx=\int R(\mathrm{ch}t,\mid\mathrm{sh}t\mid)\mathrm{sh}tdt$.

On finit le calcul avec le 6-ième paragraphe.

13. $\displaystyle\int R(x,\sqrt{-x^2+ax+b})dx$

On effectue une mise en forme canonique : $-x^2+ax+b=-[(x-\dfrac{a}{2})^2-\dfrac{\Delta}{4}]$

Un seul cas se présente : $\Delta>0$ (le cas $\Delta\leqslant 0$ est très simple :Pourquoi ?)

Donc $-x^2+ax+b=-[(x-\dfrac{a}{2})^2-c^2]$ avec $c=\sqrt{\dfrac{\Delta}{4}}$ (car $\Delta>0$), puis le changement de variable $t=\frac{x-\frac{a}{2}}{c}$ qui donne $\sqrt{-x^2+ax+b}=c\sqrt{1-t^2}$.

On en déduit que $\displaystyle\int R(x,\sqrt{-x^2+ax+b})dx=\int R(ct+\frac{a}{2},c\sqrt{1-t^2})cdt$.

On finit le calcul avec le 10-ième paragraphe.

14. $\displaystyle\int R(x,\sqrt{x^2+ax+b})dx$

On effectue une mise en forme canonique : $x^2+ax+b=[(x+\dfrac{a}{2})^2-\dfrac{\Delta}{4}]$

Deux cas se présentent : $\Delta < 0$ et $\Delta > 0$ (le cas $\Delta = 0$ est très simple :Pourquoi ?)

(a) $\Delta < 0$ : Donc $x^2 + ax + b = (x + \frac{a}{2})^2 + c^2$ avec $c = \sqrt{\frac{-\Delta}{4}}$ (car $\Delta < 0$), puis le changement de variable $t = \frac{x + \frac{a}{2}}{c}$ qui donne $\sqrt{x^2 + ax + b} = c\sqrt{t^2 + 1}$.
On en déduit que $\int R(x, \sqrt{x^2 + ax + b})dx = \int R(ct - \frac{a}{2}, c\sqrt{t^2 + 1})cdt$.
On finit le calcul avec le 11-ième paragraphe.

(b) $\Delta > 0$ : Donc $x^2 + ax + b = (x + \frac{a}{2})^2 - c^2$ avec $c = \sqrt{\frac{\Delta}{4}}$ (car $\Delta > 0$), puis le changement de variable $t = \frac{x + \frac{a}{2}}{c}$ qui donne $\sqrt{x^2 + ax + b} = c\sqrt{t^2 - 1}$.
On en déduit que $\int R(x, \sqrt{x^2 + ax + b})dx = \int R(ct - \frac{a}{2}, c\sqrt{t^2 - 1})cdt$.
On finit le calcul avec le 12-ième paragraphe.

15. **Remarques**

(a) Pour le reste on procède avec **réflexion**,**habitude**, **observation** et **"astuce"**
(**Exemple** : $\int \tan^2 t dt = \tan t - t$ car $\tan^2 t = \tan^2 t + 1 - 1$).

(b) Penser toujours aux deux principaux outils : "IPP" et "CDV".

(c) $\boxed{\text{Attention}}$ Toutes ces techniques pour calculer les primitives sont élémentaires ( exemples : décomposition en éléments simples - mise en forme canonique). Cependant les calculs sont un peu long et font apparaitre pas mal de fractions, racines carrées. Les erreurs de calcul sont vite arrivées. Le seul remède est d'en faire un bon nombre avec beaucoup de soin et de concentration.

(d) Enfin il existe des fonctions dont les primitives ne sont pas exprimables comme "cocktail"de fonctions usuelles.
Exemple : $x \mapsto e^{x^2}$, dites cependant pourquoi elle admet des primitives et donnez-en une : $F_0(x) =$ , donner les toutes $F(x) =$

F I N

JEU DES ABRÉVIATIONS

I.P.P. - V.I. - T.L.M. - T.L.D. - V.A.D. - D.E.S. - D.S.E. - P.C.
P.S. - F.P.T . - I.T. - I.T.L. - T.R.I. - T.Y. - T.A.F. - I.A.F.
I.B.T. T.C. - T.G. - C.B.S.S - S.R.C. - C.C. - C.D.V. - P.T.N.
S.D. - R.S.A. - C.H. - S.W. - T.D.N. - T.S.A. - E.V.N. - O.T.N.
CVG. - DVG - B.W. - C.A. - C.N - C.U. - C.S. - K.H. - S.F.
F.T.