

Correction du DS2

Exercice 1 : Capacité thermique des solides

Q.1 Par définition, cette probabilité est donnée par $p_k = \frac{1}{Z} e^{-\varepsilon_k \beta}$, avec

$$Z = \sum_i e^{-\varepsilon_i \beta} = \frac{e^{-\hbar\omega\beta/2}}{1 - e^{-\hbar\omega\beta}} = \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right)}$$

On obtient donc :

$$p_k = 2 \sinh\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right) e^{-\varepsilon_k \beta}$$

Q.2 On utilise la définition de l'énergie moyenne, soit : $\bar{\varepsilon} = \sum_k \varepsilon_k p_k = \sum_k \hbar\omega \left(k + \frac{1}{2}\right) p_k$. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{\hbar\omega}{2} + \sum_k \hbar\omega k p_k \quad (\text{par définition, } \sum_k p_k = 1) \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} + 2\hbar\omega \sinh\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right) e^{-\hbar\omega\beta/2} \sum_k k e^{-\hbar\omega\beta k} \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega e^{-\hbar\omega\beta/2}}{2 \sinh\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right)} \quad (\text{d'après le formulaire de l'énoncé}) \end{aligned}$$

On simplifie ce dernier résultat pour obtenir :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right)$$

Q.3 L'énergie moyenne totale du système est $E = N\bar{\varepsilon}$ et on sait donc que $C_v = \frac{dE}{dT} = N \frac{d\bar{\varepsilon}}{dT}$.
Il vient donc :

$$C_{v,m} = \frac{C_v}{n} = \mathcal{N}_A \frac{d\bar{\varepsilon}}{dT} = \mathcal{N}_A k \beta^2 \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\beta} = R \beta^2 \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\beta}$$

Puis par application du résultat de la question précédente :

$$C_{v,m} = R \left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)^2 \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right)}$$

Q.4 Si $kT \gg \hbar\omega$, $C_{v,m} \approx R$. On retrouve la loi de Dulong et Petit (dans le cas à une dimension).

Q.5 Si $kT \ll \hbar\omega$, $C_{v,m} \approx 0$. Tous les atomes sont dans l'état fondamental donc une variation de T change peu l'énergie moyenne du système.

Exercice 2 : Procédé Linde-Hampson pour la liquéfaction du diazote

- Q.1** Si on néglige les variations d'énergie cinétique macroscopique et d'énergie potentielle de pesanteur, alors la variation d'enthalpie massique d'un fluide entre l'entrée et la sortie d'une machine (fonctionnant en régime stationnaire) vérifie : $h_s - h_e = w_u + q$.
- Q.2** De même, pour un écoulement stationnaire de fluide dans une machine, le second principe s'énonce : $s_s - s_e = s_{éch} + s_{créée}$ où $s_{éch}$ est l'entropie massique échangée et $s_{créée}$ est l'entropie massique créée.
- Q.3** C'est la température qui est conservée le long de la courbe \mathcal{C}_1 . À basse pression, le gaz se comporte comme un gaz parfait et l'enthalpie ne dépend donc plus que de la température ($H = U + nRT$). Cette courbe possède donc une asymptote verticale en basse pression.
- Q.4** C'est l'entropie qui est conservée le long de la courbe \mathcal{C}_2 . L'identité thermodynamique $dh = Tds + vdP$ indique qu'à entropie constante, $dh = vdP$, soit une pente de courbe qui est positive.
- Q.5** La courbe \mathcal{C}_3 se décompose en une courbe de rosée à droite (vapeur à droite et mélange liquide-vapeur à gauche) et courbe d'ébullition à gauche (liquide à gauche et mélange à droite). Le point O est le point critique.
- Q.6** La courbe \mathcal{C}_4 est la courbe isotitre. Le diazote en M a un titre en liquide de 0,1 (mélange de 10% de liquide et 90% de vapeur).
- Q.7** Le point 1 se trouve sur l'isotherme $T = 17^\circ\text{C}$, à la pression $P_1 = 1$ bar. Le point 2 se trouve sur la même isotherme, à la pression $P_2 = 100$ bar. On lit alors sur le diagramme : $h_1 \simeq 505 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, $h_2 \simeq 485 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, $s_1 \simeq 3,85 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $s_2 \simeq 2,43 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Q.8** Comme le compresseur fonctionne de façon réversible, $s_{créée} = 0$. Il fonctionne de plus de façon isotherme donc $s_{éch} = \frac{q_{12}}{T_1}$. Un bilan entropique appliqué au fluide conduit ainsi à $s_2 - s_1 = \frac{q_{12}}{T_1}$, soit $q_{12} = T_1(s_2 - s_1) \simeq -412 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Ce transfert thermique est négatif, ce qui signifie que le fluide cède de l'énergie au thermostat (lors d'une compression, un fluide a tendance à chauffer, il doit donc céder de l'énergie pour conserver une température constante).
- Q.9** On effectue maintenant un bilan enthalpique au fluide : $w_{u,C} = h_2 - h_1 - q_{12} \simeq 392 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Le fluide reçoit bien un travail de la part du compresseur.
- Q.10** Le détendeur est calorifugé donc la transformation est adiabatique et sans pièce mobile. L'enthalpie est donc conservée au cours de cette transformation : $h_3 = h_4$.
- Q.11** Lors de la descente en pression, il faut que le point soit à gauche de la limite tracée sur le diagramme. On lit sur le diagramme $T_3 < T_{3,max} \simeq -110^\circ\text{C}$.
- Q.12** Les points 5 et 6 se trouvent sur l'isobare $P = 1$ bar, respectivement sur la courbe d'ébullition et de rosée. On lit alors : $h_5 \simeq 85 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, $h_6 \simeq 280 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, $s_5 \simeq 0 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (il semble y avoir un problème pour cette lecture...), $s_6 \simeq 2,45 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Q.13** Par définition, $x + y = 1$.
- Q.14** L'enthalpie en entrée du séparateur est h_4 , l'enthalpie en sortie du séparateur vaut $yh_5 + xh_6$ (car l'enthalpie est une grandeur extensive). Un bilan enthalpique entre l'entrée et la sortie du séparateur donne donc $h_s - h_e = 0$ puisque le séparateur est calorifugé sans pièce mobile. Ainsi, $h_4 = yh_5 + xh_6$, ce qui est bien le résultat demandé.

Q.15 La fraction massique de gaz après le séparateur est notée $x = 1 - y$. On a donc $D'_m = (1 - y)D_m$.

Q.16 Les transferts thermiques n'ont lieu qu'entre les deux fluides, puisque le système est calorifugé. On a donc : $q = -\frac{\Phi}{D_m}$ et $q' = \frac{\Phi}{D'_m}$ (le fluide chaud 2 – 3 cède de l'énergie tandis que le fluide froid 6 – 1 en gagne). Un bilan enthalpique appliqué aux fluides des deux circuits donne $h_3 - h_2 = q$ puis $h_1 - h_6 = q'$. On en déduit que $qD_m + q'D'_m = 0$ puis la relation demandée.

Q.17 En remplaçant D'_m par $(1 - y)D_m$ dans la formule précédente, il vient : $(h_3 - h_2) + (1 - y) \cdot (h_1 - h_6) = 0$.

Q.18 D'après la question précédente et en utilisant le fait que $h_3 = h_4 = yh_5 + (1 - y)h_6$, on a :

$$yh_5 + (1 - y)h_6 - h_2 + (1 - y) \cdot (h_1 - h_6) = 0$$

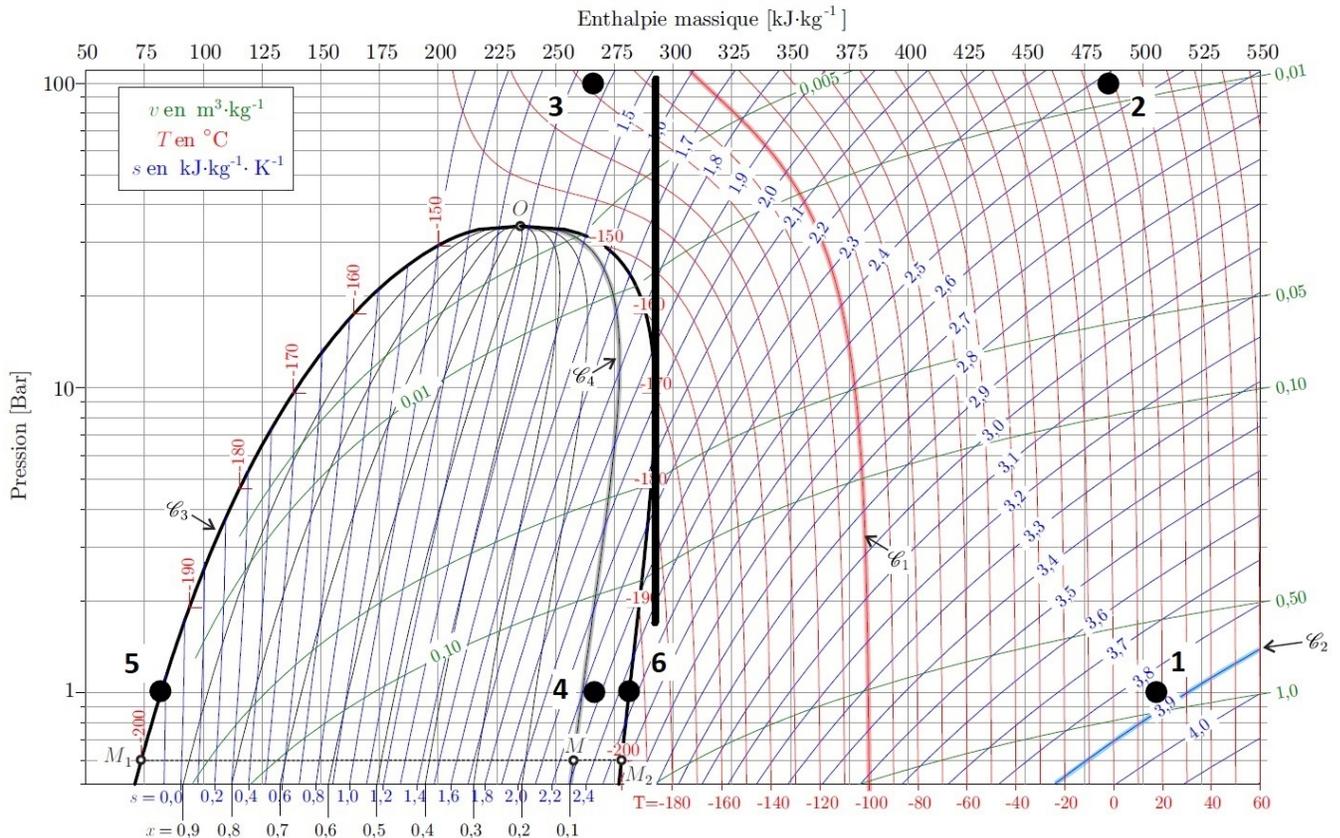
$$\Rightarrow yh_5 - h_2 + (1 - y)h_1 = 0$$

$$\Rightarrow y(h_5 - h_1) = h_2 - h_1$$

$$\Rightarrow y = \frac{h_2 - h_1}{h_5 - h_1} \simeq 0,05$$

Q.19 On a alors $h_3 = h_4 = yh_5 + (1 - y)h_6 \simeq 270 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Q.20 Le travail $w'_{u,C}$ est donné par $w'_{u,C} = \frac{w_{u,C}}{y} \simeq 7,8 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.



Exercice 3 : Le combustible nucléaire (d'après CCP MP I 2012)

Q.1 La loi de Fourier s'écrit $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$ avec T en K, \vec{j}_Q en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ et λ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Q.2 Cette équation représente le bilan thermique local pour le cœur. u représente l'énergie interne volumique et sa variation au cours du temps est la différence entre l'énergie thermique volumique σ_Q produite par le matériau fissile et ce qui est perdu par conduction $\text{div}(\vec{j}_Q)$.

Q.3 En régime stationnaire, les dérivées temporelles sont nulles, donc : $\text{div}(\vec{j}_Q) = \sigma_Q$.

Q.4 En remplaçant \vec{j}_Q donné par la loi de Fourier dans l'équation précédente, et en utilisant le fait que $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}T}) = \Delta T$, puis en remarquant que la température ne dépend que de r , il vient :

$$\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\sigma_Q}{\lambda_1}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) &= -\frac{\sigma_Q}{\lambda_1} r^2 \\ \implies r^2 \frac{dT}{dr} &= -\frac{\sigma_Q}{3\lambda_1} r^3 + A \\ \implies \frac{dT}{dr} &= -\frac{\sigma_Q}{3\lambda_1} r + \frac{A}{r^2} \\ \implies T(r) &= -\frac{\sigma_Q}{6\lambda_1} r^2 - \frac{A}{r} + B \end{aligned}$$

Avec A et B des constantes à déterminer avec les conditions limites. Comme $T(0) = T_0$, $A = 0$ (la température divergerait sinon), puis $B = T_0$. On obtient finalement :

$$T(r) = T_0 - \frac{\sigma_Q}{6\lambda_1} r^2$$

Q.5 Entre les abscisses r_0 et r_1 , la variation de température s'écrit d'après la question précédente : $T(r_1) - T_0 = -\frac{\sigma_Q}{6\lambda_1} r_1^2$. L'application numérique donne : $T(r_1) - T_0 = -4,34 \text{ K}$.

Q.6 Par définition, la résistance thermique s'écrit : $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{th}}$.

Q.7 Comme le vecteur densité de courant thermique \vec{j}_Q est radial, le flux thermique s'exprime comme

$$\Phi_{th} = 4\pi r^2 \vec{j}_Q \cdot \vec{e}_r = -4\pi \lambda_i r^2 \frac{dT}{dr}$$

On peut alors réexprimer la dérivée de la température par rapport à r :

$$\frac{dT}{dr} = \frac{dT}{d\left(\frac{1}{r}\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{dT}{d\left(\frac{1}{r}\right)}$$

$$\text{soit : } \Phi_{th} = 4\pi\lambda_i \frac{dT}{d\left(\frac{1}{r}\right)}$$

On obtient bien la forme demandée avec $B = 4\pi\lambda_i$.

- Q.8** On cherche à exprimer la différence de température de part et d'autre de la couche, en fonction de Φ_{th} . La formule trouvée précédemment donne, en séparant les variables :

$$dT = \frac{\Phi_{th}}{4\pi\lambda} d\left(\frac{1}{r}\right)$$

On intègre cette relation entre les positions r_1 et r_2 , ce qui donne en notant $T(r_1) = T_1$ et $T(r_2) = T_2$:

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\Phi_{th}}{4\pi\lambda} d\left(\frac{1}{r}\right)$$

soit : $T_2 - T_1 = \frac{\Phi_{th}}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$. On en déduit finalement :

$$R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad (> 0)$$

- Q.9** Les applications numériques donnent :

$$R_{th,12} = 175,3 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}; R_{th,23} = 5,99 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}; R_{th,34} = 0,86 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}; R_{th,45} = 4,12 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

- Q.10** On peut écrire pour chacune des couches : $T_i - T_j = R_{th,ij} \Phi_{th}$. En régime permanent, le flux thermique Φ_{th} est égal à la puissance dégagée le matériau fissile (volume fois puissance volumique) :

$$\Phi_{th} = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \sigma_Q = 0,327 \text{ W}$$

On obtient donc : $T_4 = T_5 - R_{th,45} \Phi_{th} = 1301,3 \text{ K}$, puis de la même manière : $T_3 = 1301,6 \text{ K}$, $T_2 = 1303,6 \text{ K}$ et $T_1 = 1361 \text{ K}$.

- Q.11** Le nombre N de particules nécessaires à la production de la puissance P_{th} vaut : $N = \frac{P_{th}}{\Phi_{th}} \simeq 1,8 \times 10^9$. Dans un empilement cubique simple, les sphères sont tangentes le long d'une arête du cube et il y a une sphère par maille. Ainsi, le volume V occupé par les N sphères est le même que celui occupé par N cubes de côté $2r_5$. Ce volume vaut :

$$V = 8Nr_5^3 \simeq 1,43 \text{ m}^3$$

C'est un volume tout à fait acceptable.