

**DS 2 (4 heures)**  
*Thermodynamique, Physique Statistique*

La calculatrice est **autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	Indicateur
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrees.
Identification des questions	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respectés	Palier de Malus	Effet sur la note
0	0	aucun
1-2	1	-3.3%
3-4	2	-6.7%
5-6	3	-10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

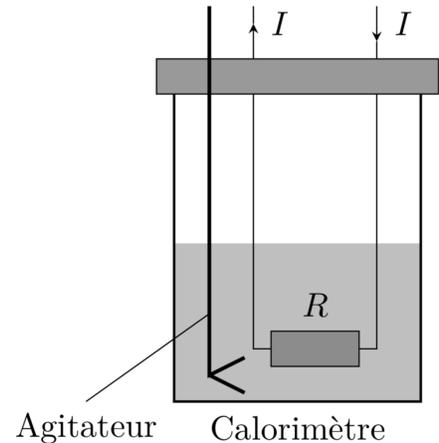
## Exercice 1 : Étude d'un calorimètre

Un calorimètre est constitué d'une enceinte dans laquelle sont placés un agitateur ( $A$ ) et une résistance électrique  $R$  reliée à un circuit extérieur, permettant d'y faire circuler un courant électrique. On désigne par  $C$  la capacité thermique totale de ces accessoires. L'agitateur permet d'homogénéiser la température  $\Theta$  (en  $^{\circ}\text{C}$ ) du contenu de l'enceinte.

Toutes les phases condensées sont supposées idéales. On néglige la capacité thermique de l'air enfermé dans le calorimètre devant celle de l'eau et des accessoires. On donne la capacité thermique massique de l'eau liquide, supposée constante :

$$c_{eau} = 4,18 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Le calorimètre contient initialement une masse  $m_1 = 95 \text{ g}$  d'eau liquide et le dispositif est en équilibre thermique à la température  $\Theta_1 = 20^{\circ}\text{C}$ . On suppose dans un premier temps que le calorimètre est parfait, c'est à dire que ses parois sont adiabatiques. Aucun courant ne circule dans la résistance. Après avoir ajouté une masse  $m_2 = 71 \text{ g}$  d'eau à la température  $\Theta_2 = 50^{\circ}\text{C}$ , on constate que la température finale du dispositif se stabilise à  $\Theta_f = 31,3^{\circ}\text{C}$ .



**Q.1** À l'aide du premier principe, déterminer  $C$  en fonction  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_f$  et  $c_{eau}$ . En déduire la valeur en eau  $\mu$  du calorimètre, définie par  $C = \mu c_{eau}$ . Faire l'application numérique.

Le calorimètre est entièrement vidé de l'eau qu'il contient et on y introduit une masse  $m_0 = 83 \text{ g}$  d'éthanol de capacité thermique massique  $c_0$ . À partir de  $t = 0$ , on fait circuler un courant électrique d'intensité  $I = 1,40 \text{ A}$  constante dans la résistance  $R = 5,0 \Omega$  dont la valeur est indépendante de la température.

**Q.2** Faire un bilan énergétique pendant l'intervalle de temps  $dt$  et en déduire l'équation différentielle vérifiée par  $\Theta(t)$ .

**Q.3** On constate que la température s'est élevée de  $9,2^{\circ}\text{C}$  au bout de  $\tau = 120 \text{ s}$ . En déduire la capacité thermique massique  $c_0$  de l'éthanol.

En fait, le calorimètre n'est pas parfait et il faut tenir compte des "fuites thermiques". Entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , le contenu du calorimètre cède au milieu extérieur une énergie thermique  $\delta Q$  pouvant s'écrire :

$$\delta Q = K (\Theta(t) - \Theta_a) dt$$

où  $K = 0,48 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  est une constante,  $\Theta(t)$  la température dans l'enceinte à l'instant  $t$  et  $\Theta_a$  la température de l'atmosphère extérieure, supposée constante. On suppose qu'à  $t = 0$ ,  $\Theta(0) = \Theta_1 = \Theta_a = 20^{\circ}\text{C}$ .

**Q.4** Comment est modifiée l'équation différentielle de la **Q.2** ?

**Q.5** En déduire  $\Theta(t)$  et en donner une représentation schématique en fonction du temps. Quelle est la température limite atteinte par le contenu de l'enceinte ? Faire l'application numérique.

## Exercice 2 : Entropie échangée entre deux systèmes

Le but de cet exercice est de caractériser les contacts thermiques entre deux systèmes d'un point de vue entropique. On rappelle que pour un système thermodynamique fermé subissant une transformation infinitésimale (première identité thermodynamique) :

$$dU = TdS - PdV$$

avec  $T$  et  $P$  les température et pression du système considéré au cours de la transformation. On rappelle également que pour une phase condensée, la variation d'énergie interne s'écrit :

$$dU = dH = CdT$$

avec  $C$  la capacité thermique du solide.

### I – Interaction d'un système et d'un thermostat

On considère un système solide de capacité thermique  $C$  et de température initiale  $T_1$  plongé dans un thermostat de température  $T_0$  avec lequel il peut échanger de l'énergie par transfert thermique. On suppose l'évolution quasi-statique de sorte à pouvoir définir  $T(t)$  du système au cours de l'évolution.

- Q.1 Quelle est la température finale du système ?
- Q.2 Faire un bilan d'entropie pour le système en calculant  $\Delta S$ ,  $S_e$  et  $S_c$ .
- Q.3 Faire un bilan d'entropie pour le thermostat en calculant  $\Delta S_{th}$ ,  $S_{e,th}$  et  $S_{c,th}$ .
- Q.4 Calculer  $\Delta S_{tot}$ . Que remarque-t-on ?

### II – Interaction de deux systèmes symétriques

À présent, on considère deux systèmes solides de températures initiales  $T_{10}$  et  $T_{20}$  et de capacités thermiques  $C_1$  et  $C_2$  qui sont libres d'échanger de l'énergie par transfert thermique jusqu'à atteindre la température  $T_f$ . On suppose l'évolution quasi-statique de sorte à pouvoir définir  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  au cours de l'évolution.

- Q.5 Calculer l'expression de la température finale  $T_f$  en fonction de  $T_{10}$ ,  $T_{20}$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .
- Q.6 Faire un bilan d'entropie pour le système 1 en calculant  $\Delta S_1$ ,  $S_{e1}$  et  $S_{c1}$ .
- Q.7 Faire un bilan d'entropie pour le système 2 en calculant  $\Delta S_2$ ,  $S_{e2}$  et  $S_{c2}$ .
- Q.8 Calculer  $\Delta S_{tot}$ . Que peut-on dire de l'entropie créée ?

## Exercice 3 : Jean Perrin et l'hypothèse atomique

Les études théoriques sur le mouvement brownien, proposées par ALBERT EINSTEIN en 1905 et complétées par celles de PAUL LANGEVIN en 1908, ont été spectaculairement confirmées par une série d'une dizaine d'expériences réalisées entre 1907 et 1909 par JEAN PERRIN dont nous avons fêté le 150<sup>e</sup> anniversaire de naissance en 2021. Ces études sont les piliers de l'acceptation de l'existence des atomes par la communauté scientifique. Elles ont clos la *controverse atomiste* ouverte par les Grecs 6 siècles avant notre ère !

Après avoir pris connaissance des résultats de PERRIN, en 1908, l'un des derniers farouches anti-atomistes, WILHELM OSTWALD, déclare «*Je suis désormais convaincu que nous sommes entrés en possession de preuves expérimentales du caractère discret ou granulaire de la nature, que l'hypothèse atomique avait cherchées en vain depuis des millénaires*».

Les expériences de PERRIN et le modèle de LANGEVIN reposent entièrement sur les modèles microscopiques de LUDWIG BOLTZMANN, fondateur dans la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle de la physique statistique. Les travaux expérimentaux de PERRIN lui permirent notamment de mesurer la constante de BOLTZMANN  $k_B$ . En 1906, donc peu de temps avant la publication de ces travaux, BOLTZMANN se suicida, las des critiques et des attaques des disciples d'OSTWALD... En 1926, PERRIN obtint le prix Nobel pour ses expériences.

Dans ce sujet, nous proposons de revenir sur quelques points de ce moment fameux de l'histoire de la physique en étudiant quelques aspects de la théorie de Langevin et de certaines des expériences réalisées par PERRIN. Pour réaliser ses expériences, JEAN PERRIN utilise des grains de gomme-gutte : *«La gomme-gutte, qu'on utilise pour l'aquarelle, provient de la dessiccation du latex. Un morceau de cette substance, frotté avec la main sous un mince filet d'eau distillée se dissout peu à peu en donnant une belle émulsion opaque d'un jaune vif, où le microscope révèle un fourmillement de grains jaunes de diverses tailles parfaitement sphériques. On peut calibrer ces grains jaunes et les séparer du liquide où ils baignent par une centrifugation énergétique.»*

Dans tout ce problème, ces grains seront donc supposés identiques, de forme sphérique, de rayon  $R_b = 0,2 \mu\text{m}$ , de volume  $V_b = 3,4 \times 10^{-20} \text{m}^3$  et de masse volumique  $\mu_b = 1,2 \times 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . On note  $m_b = 4,1 \times 10^{-17} \text{kg}$  la masse d'un grain. Dans ses expériences, Jean Perrin fabrique une émulsion en introduisant ces grains dans de l'eau légèrement sucrée. Ce liquide possède une masse volumique assimilable à celle de l'eau pure  $\mu_e = 1,0 \times 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Le peu de sucre dissous dans l'eau lui confère tout de même un caractère visqueux. De ce fait, l'eau exerce sur les grains en mouvement lent deux forces :

- la résultante des forces de pression, peu modifiée par rapport à une situation d'équilibre, est donnée par la loi d'ARCHIMÈDE : cette force  $\vec{\Pi} = -\mu_e V_b \vec{g}$  est exactement opposée au poids du liquide déplacé par chaque grain ;
- la résultante des forces de frottement visqueux se traduit par une force  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$  ou  $\alpha > 0$  et  $\vec{v}$  désigne la vitesse des grains. La formule de STOKES précise que, pour un grain sphérique,  $\alpha = 6\pi\eta R_b$  dans laquelle  $\eta = 1,2 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$  représente le coefficient de viscosité dynamique de l'eau légèrement sucrée. Avec ces valeurs numériques, on trouve ici  $\alpha = 4,5 \times 10^{-9} \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

En dehors de ces données, aucune connaissance relative à la viscosité n'est nécessaire à cette étude. Ce problème est décomposé en 3 parties relativement indépendantes : la partie I – est consacrée au modèle du gaz parfait ; la partie II – est dédiée aux expériences de sédimentation pratiquées sur les émulsions ; la partie III – présente le modèle théorique du mouvement brownien de LANGEVIN complété par les expériences de diffusion de PERRIN. Dans ce qui suit on utilisera la fonction  $A(z) = \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$  avec  $H$  homogène à une distance. Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. La valeur moyenne temporelle d'une fonction  $\varphi(t)$  sera notée  $\langle \varphi \rangle$ .

## I – Équilibre vertical d'un gaz à la température ambiante

On considère un gaz parfait constitué de molécules identiques, de masse molaire  $M = 30 \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , en équilibre thermique à la température ambiante  $T_0$ . Le gaz, soumis à la pesanteur, est au repos dans un récipient de volume  $V$ , de hauteur  $h$  de l'ordre de quelques mètres, et de section  $S = 1 \text{m}^2$ . L'encombrement caractéristique d'une molécule constituant ce gaz est une sphère de rayon  $R_m$  de l'ordre de la centaine de picomètres.

On rappelle les valeurs de l'accélération de la pesanteur  $g = 9,8 \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ , de la constante de Boltzmann  $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ , de la constante d'AVOGADRO,  $N_A = 6,0 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$  et éventuellement de leur produit  $R = k_B N_A = 8,3 \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

- Q.1** En précisant les valeurs choisies de température  $T_0$  et de pression (supposée provisoirement uniforme)  $P_0$ , estimer le volume molaire du gaz. En déduire une estimation du rapport entre le volume occupé par l'ensemble des sphères associé aux molécules et le volume du récipient.

- Q.2** Rappeler la définition d'un gaz parfait. Les ordres de grandeur établis à la question précédente justifient-ils d'adopter ce modèle dans la suite ?
- Q.3** Donner l'expression de l'énergie cinétique  $E_{cm}$  et de l'énergie potentielle  $E_{pm}$  d'une particule de masse  $m_m$  de ce gaz. Pourquoi observe-t-on qu'à température ambiante ces molécules ne se regroupent pas au fond du récipient ?

La loi de la statique des fluides montre que, sous l'action de la pesanteur, la pression  $P(z)$  n'est pas uniforme verticalement et dépend de l'altitude  $z$ .

- Q.4** En déduire que la masse volumique  $\rho$  du gaz dépend aussi de  $z$  et l'exprimer en fonction de  $P(z)$ .  
Écrire la condition d'équilibre mécanique pour une tranche de gaz comprise entre les altitudes  $z$  et  $z + dz$  pour laquelle on supposera l'équilibre thermodynamique local réalisé.  
En déduire une équation différentielle vérifiée par  $P(z)$ .
- Q.5** En notant  $P_0 = P(z = 0)$ , montrer que  $\frac{P(z)}{P_0}$  s'exprime simplement grâce à la fonction  $A(z)$ .  
Exprimer la distance caractéristique  $H$  en fonction de  $k_B$ ,  $g$ ,  $T_0$  et  $m_m$  et réaliser l'application numérique.  
La variation de pression est-elle détectable, avec un manomètre usuel, dans le récipient considéré ? En serait-il de même si le récipient était rempli d'eau liquide ?
- Q.6** Préciser la fonction  $E(z)$  telle que  $A(z) = \exp\left[-\frac{E(z)}{k_B T_0}\right]$ . Que représente la fonction  $E(z)$  ?  
Interpréter physiquement cette expression dont la généralisation est due à Boltzmann.
- Q.7** Montrer que la concentration  $c_g(z)$  du gaz, rapport du nombre de moles sur le volume, suit une loi du même type, et qu'on peut écrire  $c_g(z) = c_{g0}A(z)$ , où  $c_{g0}$  représente la concentration au niveau du sol ( $z = 0$ ) dont on précisera l'expression en fonction de  $T_0$  et  $P_0$ .

## II – Étude d'un équilibre de sédimentation

Dans une première expérience, JEAN PERRIN lâche, sans vitesse initiale, à la surface d'un récipient, un grand nombre ( $N = 13000$ ) de grains dans de l'eau légèrement sucrée. Le récipient a une section  $S$  et une hauteur  $h_1$  suffisante pour être considérée comme infinie. On note  $\vec{v}(t) = -v(t)\vec{e}_z$  la vitesse de chute du grain,  $\vec{e}_z$  étant l'axe vertical ascendant, et  $v(t) > 0$ .

- Q.8** Faire le bilan des forces exercées sur un des grains lors de sa chute dans l'eau sucrée.
- Q.9** Établir l'équation différentielle vérifiée par  $v(t)$  puis donner sa solution.  
Montrer qu'une fois le régime permanent établi, les grains possèdent une vitesse limite  $v_\ell = \frac{m^*g}{\alpha}$ .  
Exprimer le paramètre  $m^*$  en fonction de  $V_b$  et des masses volumiques  $\mu_b$  et  $\mu_e$ . Justifier qu'on nomme cette quantité *masse apparente*.  
Exprimer la durée caractéristique  $\tau$  du régime transitoire en fonction de  $m_b$  et  $\alpha$ . Évaluer un ordre de grandeur de  $v_\ell$  et de  $\tau$ .

Même au bout d'une longue durée, les grains ne se tassent pas au fond du récipient. On observe un phénomène de sédimentation : les grains se répartissent sur l'ensemble de la hauteur et la densité de grains, notée  $c(z)$  et exprimée en  $\text{m}^{-3}$ , n'est pas uniforme.

Afin d'interpréter ce phénomène, on introduit deux vecteurs, appelés *densité de flux de particules* et qui s'expriment dans les mêmes unités mais par des lois distinctes :

- Un premier vecteur densité de flux,  $\vec{j}_c$ , est associé au mouvement de chute des grains. Il est à l'origine d'un phénomène de convection et défini par la relation  $\vec{j}_c = -c(z)v_\ell \vec{e}_z$  ;
- Un deuxième vecteur densité de flux est associé au gradient de densité, ici sur l'axe  $z$ . L'inhomogénéité crée un courant de particules dont l'expression est donnée par la loi de FICK qui s'écrit ici  $\vec{j}_n = -D \frac{dc}{dz} \vec{e}_z$ . Le coefficient  $D$  se nomme coefficient de diffusion. Il dépend de la nature du milieu et des particules étudiées. Aucune connaissance relative à la loi de FICK n'est nécessaire à l'étude du problème.

**Q.10** Donner les unités (ou dimensions) communes aux vecteurs  $\vec{j}_c$  et  $\vec{j}_n$ , ainsi que l'unité de  $D$ . À l'état d'équilibre macroscopique, caractérisé par une température uniforme  $T_0$  et une répartition de concentration  $c(z)$  indépendante du temps, quelle est la relation entre  $\vec{j}_c$  et  $\vec{j}_n$  ? En déduire une équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $c(z)$ .

En posant  $c(z=0) = c_0$ , exprimer  $c(z)$  en fonction de  $A(z)$ , on déterminera la distance caractéristique  $H_b$  apparaissant dans  $A(z)$  en fonction de  $R_b$ ,  $D$ ,  $\eta$ ,  $m^*$  et  $g$ .

**Q.11** Compte tenu des forces conservatives s'exerçant sur un grain, quelle est l'expression de l'énergie potentielle  $E_p^*(z)$  correspondant au poids de la masse apparente  $m^*$  du grain à l'altitude  $z$  ? En déduire l'expression de  $D$  en fonction de  $k_B$ ,  $T_0$ ,  $\eta$  et  $R_b$  permettant d'écrire  $A(z) = \exp \left[ -\frac{E_p^*(z)}{k_B T_0} \right]$ .

**Q.12** Sachant que le nombre  $N$  de grains est conservé sur la hauteur  $h_1$  du récipient, suffisamment grande pour être supposée infinie, exprimer la concentration  $c_0$  en fonction de  $N$ , de la section  $S$  et de la distance caractéristique  $H_b$ .

Une fois la température de l'émulsion stabilisée à une valeur uniforme  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , JEAN PERRIN a compté le nombre moyen  $n(z)$  de grains dans des petites tranches régulièrement réparties en hauteur et d'épaisseur  $e$  constante. Il publie les résultats que nous avons synthétisés sur la Fig. 1 (Annales de Chimie et de Physique, Mouvement brownien et réalité moléculaire, 8<sup>e</sup> série, sept. 1909).

**Q.13** En exprimant  $c(z)$  en fonction de  $n(z)$ , déduire de ces données une estimation de la hauteur caractéristique  $H_b$  associée ici au phénomène. La hauteur du récipient utilisé par Jean Perrin,  $h_1 = 100 \mu\text{m}$ , était-elle suffisante au regard des hypothèses faites ici ?

**Q.14** Estimer la valeur de  $k_B$  qu'a pu déduire JEAN PERRIN de cette expérience. Identifier des causes d'erreurs expérimentales.

### III – Le modèle de Langevin

En 1828, le botaniste ROBERT BROWN publie un article dans lequel il décrit le mouvement erratique de grains de pollen dans l'eau observés au microscope. Ce type de mouvement était apparemment connu depuis l'invention du microscope (fin XVI<sup>e</sup> – début XVII<sup>e</sup> siècle). Le mérite de Brown est d'en faire une étude systématique avec des grains de pollen, de suie, de poussière, de roches pulvérisées et même d'un fragment du Sphinx. Ce dernier cas était destiné à éliminer l'hypothèse vitaliste qui prévalait et attribuait ce mouvement à des propriétés organiques propres aux particules. En 1888, le physicien français LOUIS-GEORGES GOUY résume les observations sur ce mouvement, appelé depuis brownien :

- le mouvement est extrêmement irrégulier et ne semble pas avoir de tangente ;
- deux particules browniennes, même proches, ont des mouvements indépendants ;
- le mouvement est d'autant plus actif que la particule est petite, que le fluide est moins visqueux ou la température est élevée ;
- la nature et la densité des particules n'ont pas d'influence sur le mouvement qui de plus ne s'arrête jamais !

Pour interpréter les expériences de BROWN, on étudie le mouvement unidimensionnel le long d'un axe  $(O, \vec{e}_x)$  des mêmes grains sphériques que ceux étudiés dans la partie II – (masse  $m_b$ , rayon  $R_b$ ).

Ces grains sont plongés dans le même liquide sucré que celui utilisé dans l'expérience de JEAN PERRIN, en équilibre thermique à la température  $T_0$ , mobiles sous l'effet de l'agitation thermique. Ce modèle unidimensionnel peut éventuellement se généraliser à trois dimensions.

On note  $\vec{x} = x(t)\vec{e}_x$  la position et  $\vec{v} = v(t)\vec{e}_x$  la vitesse d'un grain. À  $t = 0$ , le grain étudié est en  $O$ . Le mouvement ne s'arrêtant jamais, PAUL LANGEVIN propose en 1908 l'idée qu'il existe des chocs à l'échelle microscopique qui entretiennent cette agitation. Il introduit une force qui synthétise la résultante des chocs aléatoires des molécules de fluide sur les grains. Cette force «indifféremment positive ou négative, dont le but est de maintenir l'agitation microscopique» est notée  $\vec{F}_c = F_c\vec{e}_x$ . En des termes moins prosaïques, cela revient à faire l'hypothèse que la moyenne temporelle du produit  $\vec{x} \cdot \vec{F}_c$  est nulle, soit  $\langle xF_c \rangle = 0$ . Dans son modèle, LANGEVIN néglige tous les effets de la pesanteur mais tient compte de la résultante des forces de frottement visqueux.

**Q.15** Écrire l'équation, notée  $(E_L)$ , vérifiée par  $\vec{v}$  en tenant compte de la force  $\vec{F}_c$ . Montrer qu'en l'absence de cette force, le mouvement s'atténue très vite.

**Q.16** Écrire le produit  $x \frac{dv}{dt}$  en fonction de  $\frac{d(xv)}{dt}$  et  $v^2$ .

**Q.17** Donner la définition de la vitesse quadratique moyenne, notée  $u$ . En appliquant le théorème d'équipartition de l'énergie au cas particulier étudié, exprimer  $u$  en fonction de  $m_b$ ,  $T_0$  et  $k_B$ .

Le point délicat de la théorie de LANGEVIN revient à considérer que la fonction  $\varphi = \langle xv \rangle$ , qu'il calcule comme une moyenne temporelle, peut néanmoins être considérée comme une fonction du temps  $\varphi = \varphi(t)$ . Nous ferons cette hypothèse, dite ergodique, qui permet d'écrire :

$$\left\langle \frac{d(xv)}{dt} \right\rangle = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{ou même} \quad \left\langle \frac{d(x^2)}{dt} \right\rangle = \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt}$$

L'étude de l'hypothèse ergodique alimente depuis de nombreux travaux théoriques tant physiques que mathématiques.

**Q.18** En partant de l'équation  $(E_L)$ , obtenir une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants vérifiée par la fonction  $\varphi(t)$ . En supposant que  $\varphi(0) = 0$ , en déduire l'expression de  $\varphi(t)$  en fonction de  $t$ ,  $k_B$ ,  $T_0$ ,  $m_b$  et  $\alpha$ .

**Q.19** En utilisant l'hypothèse ergodique, déterminer la relation entre  $\varphi(t)$  et  $\psi(t) = \langle x^2 \rangle$ . Après avoir obtenu l'expression générale de  $\psi(t)$ , montrer que les ordres de grandeur de ce problème permettent d'écrire  $\psi(t) \simeq D_x t$  où l'on précisera l'expression de la constante  $D_x$  en fonction de  $T_0$ ,  $k_B$  et  $\alpha$ .

La constante  $D_x$  est appelée coefficient de diffusion d'un grain selon  $(Ox)$  dans le milieu. En prenant en compte le modèle de LANGEVIN, JEAN PERRIN réalise toute une série d'expériences de diffusion de grains au cours du temps. Avec une extrême minutie, il repère la position de l'un d'entre eux toutes les 30 secondes pendant deux minutes, puis recommence avec un autre grain. En itérant cette procédure un grand nombre de fois, il se place sans le savoir sous l'hypothèse ergodique et obtient les résultats expérimentaux donnant  $\langle x^2 \rangle$  en fonction du temps que l'on a synthétisés sur la Fig. 2 (source identique à celle des données de la Fig. 1).

**Q.20** En déduire la valeur de  $k_B$  qu'a obtenue Jean Perrin avec ses expériences de diffusion toujours effectuées à  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Comparer cette valeur avec celle obtenue grâce aux résultats des expériences de sédimentation de la partie II –. Commenter.

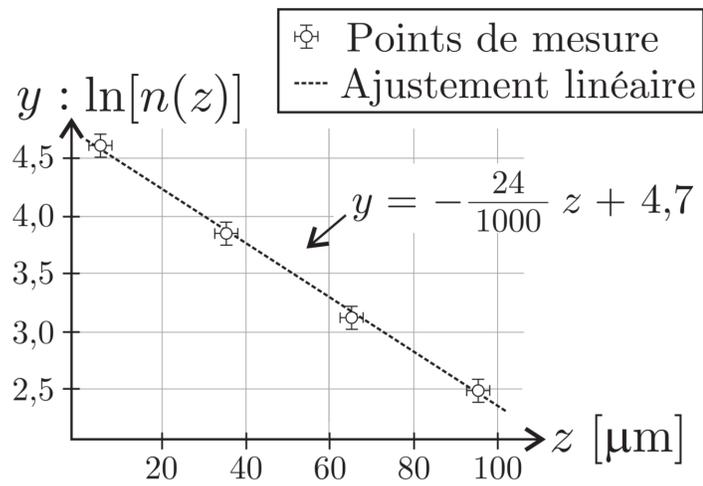


FIGURE 1 – Sédimentation de grains

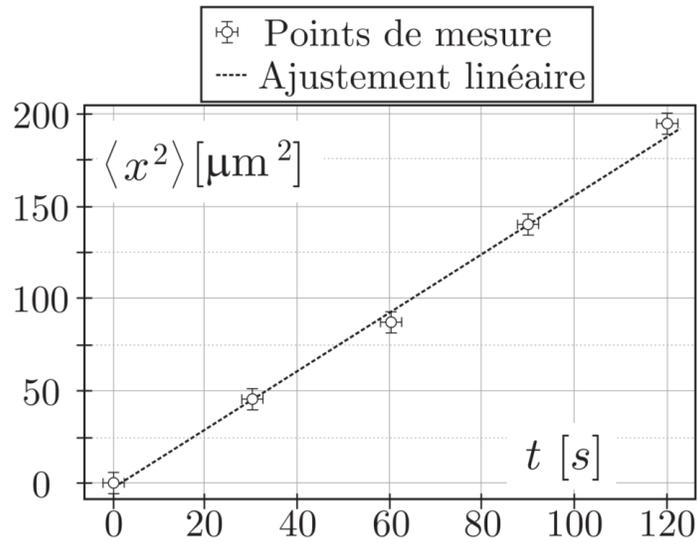


FIGURE 2 – Diffusion de grains

••• FIN •••