

Notation : Si M est une matrice, notons $[M]_{i,j}$ son coefficient d'indice (i, j) .

Pour $(i, k, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, notons :

- r_i le nombre de lignes des blocs de type $A_{i,*}$;
- s_k le nombre de colonnes des blocs de type $A_{*,k}$ (qui est aussi le nombre de lignes des blocs de type $B_{k,*}$, car les blocs sont de tailles compatibles pour le produit) ;
- t_j le nombre de colonnes des blocs de type $B_{*,j}$.

Écrivons la matrice AB par blocs :

$$AB = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,q} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket \quad C_{i,j} \in \mathcal{M}_{r_i, t_j}(\mathbb{K}).$$

Fixons alors $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ et vérifions que $C_{i,j} = \sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,j}$.

Pour cela, fixons $(a, b) \in \llbracket 1, r_i \rrbracket \times \llbracket 1, t_j \rrbracket$ et montrons que :

$$[C_{i,j}]_{a,b} = \left[\sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,j} \right]_{a,b}.$$

Notons $\alpha = \sum_{h=1}^{i-1} r_h$, $\gamma = \sum_{h=1}^{j-1} t_h$ et, pour $k \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket$, $\beta_k = \sum_{h=1}^{k-1} s_h$. Remarquons que β_{p+1} désigne

le nombre commun de colonnes de A et de lignes de B . On a d'une part :

$$[C_{i,j}]_{a,b} = [AB]_{\alpha+a, \gamma+b} = \sum_{m=1}^{\beta_{p+1}} [A]_{\alpha+a, m} [B]_{m, \gamma+b}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,j} \right]_{a,b} &= \sum_{k=1}^p [A_{i,k} B_{k,j}]_{a,b} = \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^{s_k} [A_{i,k}]_{a,m} [B_{k,j}]_{m,b} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^{s_k} [A]_{\alpha+a, \beta_k+m} [B]_{\beta_k+m, \gamma+b}. \end{aligned}$$

Puisque les ensembles $(\llbracket \beta_k + 1, \beta_k + s_k \rrbracket)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ forment un recouvrement disjoints de $\llbracket 1, \beta_{p+1} \rrbracket$, on

obtient finalement :

$$\left[\sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,j} \right]_{a,b} = \sum_{m=1}^{\beta_{p+1}} [A]_{\alpha+a, m} [B]_{m, \gamma+b} = [C_{i,j}]_{a,b}.$$