

DS 4 (4 heures)***Électrostatique***

La calculatrice est autorisée

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	Indicateur
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respectés	Palier de Malus	Effet sur la note
0	0	aucun
1–2	1	–3.3%
3–4	2	–6.7%
5–6	3	–10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 : Moteurs électrostatiques

Il est possible de créer des actionneurs électromécaniques (qui convertissent l'énergie électrique en énergie mécanique) à l'aide des champs électriques. Toutefois, vu les niveaux d'énergies mis en jeu dans les phénomènes électrostatiques, seuls des micro-moteurs sont développés industriellement.

Pour les applications numériques, on prendra comme valeur de la permittivité du vide $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$. Lorsque l'isolant (diélectrique) utilisé n'est pas le vide, sa permittivité est modifiée et vaut $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ avec $\varepsilon_r \geq 1$ la permittivité relative du matériau. Dans toutes les applications et tous les calculs effectués dans le vide on emploie ε_0 . Lorsque l'isolant n'est pas le vide, il suffit de remplacer ε_0 par le produit $\varepsilon_r \varepsilon_0$ dans toutes les formules et dans tous les calculs.

Dans tout le problème, l'action de la pesanteur et les frottements sont négligés.

I – Principe d'un moteur électrostatique

On considère un condensateur plan constitué de deux armatures métalliques très fines, de surfaces intérieures S séparées par du vide (permittivité ε_0). Les armatures sont dans des plans parallèles au plan xOz . La distance entre les deux armatures est notée e et elle est supposée petite par rapport aux dimensions transversales des armatures. On peut donc négliger les effets de bord et considérer que le champ créé par les armatures dans la région considérée est le même que si les armatures étaient des plans illimités.

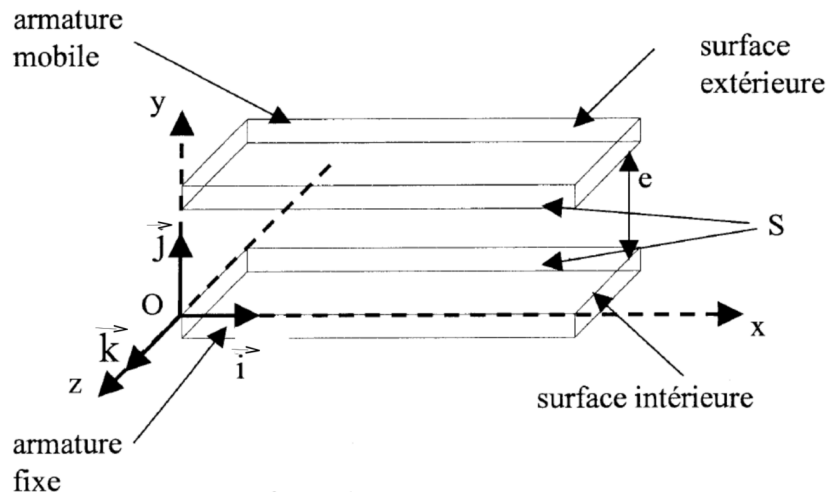


FIGURE 1

L'armature située dans le plan xOz est fixe, l'autre est mobile en translation dans la direction de l'axe Oy . Les armatures portent des charges opposées : les deux surfaces intérieures sont chargées uniformément avec une densité surfacique de charge $-\sigma$ pour l'armature mobile et $+\sigma$ pour l'armature fixe. Les deux surfaces extérieures sont supposées non chargées. Dans la région située entre les deux armatures, le vecteur champ électrique est noté $\vec{E}$. Au-dessus et en-dessous du condensateur, il est noté $\vec{E}_{ext}$.

- Q.1** Établir soigneusement l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface.
- Q.2** En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer l'expression de $\vec{E}$ en fonction de σ et ε_0 (préciser le vecteur unitaire choisi). Démontrer de même l'expression de $\vec{E}_{ext}$.
- Q.3** En déduire l'expression de la capacité C du condensateur plan en fonction de ε_0 , S et e .

Soit un élément de surface dS de la surface interne de l'armature fixe.

- Q.4** Quelle est la charge dq de cet élément de surface ? Quel est le champ auquel est soumis cet élément de surface de la part de l'autre armature ?
- Q.5** En déduire, en fonction des données, l'expression vectorielle de la force $\vec{F}'$ à laquelle est soumise l'armature fixe de la part de l'armature mobile. La force est-elle attractive ou répulsive ?

On désigne par $\vec{F}$ la force à laquelle est soumise l'armature mobile de la part de l'armature fixe.

Q.6 Exprimer $\vec{F}$ et calculer $\|\vec{F}\|$ avec $\|\vec{E}\| = 1 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ et $S = 1 \text{ cm}^2$.

On définit la densité volumique d'énergie électrostatique u_E en un point situé entre les plaques par :

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \|\vec{E}\|^2$$

Q.7 Déterminer l'expression de l'énergie électrostatique totale U_E emmagasinée entre les armatures en fonction de ε_0 , S , e et de la tension U entre les plaques (U est défini comme la différence de potentiel entre l'armature fixe et l'armature mobile) puis en fonction de C et U .

Q.8 On insère entre les deux armatures un diélectrique liquide de permittivité relative ε_r . Ce diélectrique remplit tout l'espace situé entre les deux armatures. Quelle est la conséquence de cette modification sur la valeur de $\|\vec{F}\|$?

II – Actionneur électrostatique

À partir du condensateur plan de la FIGURE 1, on peut réaliser des actionneurs électrostatiques utilisés couramment dans les systèmes mettant en œuvre des micro-pompes, des membranes déformables ou des micro-interrupteurs.

L'armature fixe est reliée au bâti et l'armature mobile est reliée à un ressort de raideur constante k' . Ce ressort est lui-même relié au bâti fixe à son autre extrémité. Les deux armatures sont reliées à une source de tension réglable U . La permittivité du milieu inter-armature est celle du vide. Il est rappelé que l'action de la pesanteur est négligée.

L'armature mobile ne peut que se traduire dans la direction de l'axe Oy et des butées lui interdisent d'entrer en contact avec l'armature fixe. La position qui correspondrait au contact entre les deux armatures est choisie comme origine de l'axe Oy . En l'absence de tension d'alimentation ($U = 0$) et à l'équilibre (repos du ressort), la distance inter-armatures est y_0 .

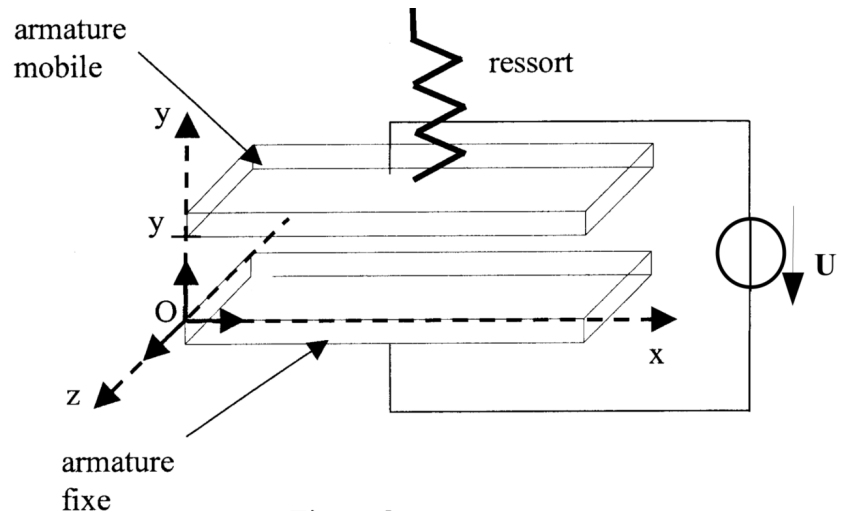


FIGURE 2

On admet que, en présence d'une tension U , l'armature mobile subit une force électrostatique :

$$\vec{F} = F \vec{u}_y = -\frac{1}{2} K \frac{U^2}{y^2} \vec{u}_y$$

Q.9 Donner l'expression de la force de rappel mécanique $\vec{F}_r = F_r \vec{u}_y$ qu'exerce le ressort sur l'armature mobile en fonction de k' , y_0 et y .

Q.10 On applique une tension U constante. Quelle est la relation à l'équilibre (pour $y = y_{eq}$) entre F_r et F ?

- Q.11** Pour y variant de 0^+ à y_0 , tracer sur un même graphique l'allure de F_r et l'allure de $(-F)$ dans trois modes de fonctionnements différents, obtenus pour trois valeurs différentes de U^2 non nulles. Le premier mode correspondra au cas où aucun point d'équilibre ne peut être obtenu, le deuxième au cas où un seul point d'équilibre peut être obtenu, enfin le troisième au cas où deux points d'équilibre peuvent être obtenus.
- Q.12** On suppose désormais que la tension d'alimentation U ne peut être que positive ou nulle. Montrer que dans le cas où il existe une unique position d'équilibre, $y_{eq} = \frac{2}{3}y_0$. En déduire la valeur maximale de la tension U , notée U_{max} , pour laquelle cette position d'équilibre existe.
- Q.13** Quelle est la stabilité de cette position d'équilibre correspondant à $U = U_{max}$?
- Q.14** On suppose $0 < U < U_{max}$. Quel est le nombre de positions d'équilibre dans ce cas ? Étudier leur stabilité. Même question pour $U > U_{max}$.
- Q.15** On donne $K = 9 \times 10^{-16} \text{ F} \cdot \text{m}$. On souhaite réaliser un actionneur dont l'épaisseur au repos y_0 vaut 3 mm. Comment doit-on choisir le ressort de manière à obtenir un point d'équilibre stable pour toute valeur de la tension U entre 0 et 100 V ?
- Q.16** Le diélectrique situé entre les deux armatures de l'actionneur a toujours une permittivité égale à celle du vide. Quelle est la surface interne de chacune des deux armatures ? On exprimera le résultat en mm^2 .

III – Actionneur électrostatique linéaire

A partir du principe d'un condensateur plan (FIGURE 1), on peut réaliser un actionneur électrostatique linéaire en insérant entre les deux armatures fixes rectangulaires une tranche mobile de diélectrique solide, parallélépipédique de permittivité relative ϵ_r (FIGURE 3). L'air est assimilé au vide de permittivité ϵ_0 .

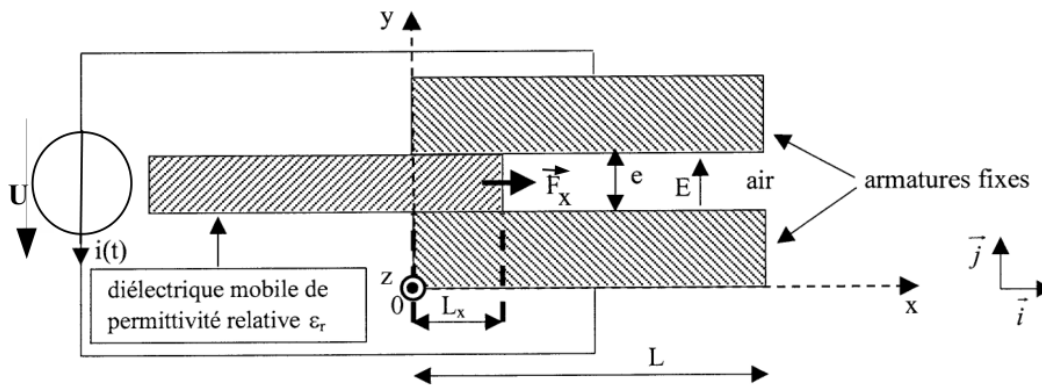


Figure 3.

FIGURE 3

Si on applique une différence de potentiel U aux bornes des deux armatures conductrices il se crée une force $\vec{F}$ qui tend à faire pénétrer le diélectrique mobile entre les deux armatures.

L'épaisseur du diélectrique mobile est égale à la distance e entre les deux armatures fixes. On note L la largeur d'une armature et L_x la largeur de recouvrement entre le diélectrique mobile et les armatures fixes. S représente comme précédemment la surface interne totale de chacune des deux armatures et S_x représente la partie de la surface interne d'une armature en contact avec le diélectrique mobile lorsque la largeur de recouvrement est L_x . On note aussi L_z la profondeur, constante, des armatures et du diélectrique selon z . Donc $S = L L_z$ et $S_x = L_x L_z$. On limite le domaine d'étude aux positions telles que x (abscisse de la face droite du diélectrique mobile) soit compris entre 0 et L .

- Q.17** Les deux plans internes des armatures fixes sont chargés sur toute la surface S , le condensateur global peut ainsi être considéré comme une association de deux condensateurs parfaits. De quel type d'association s'agit-il ? Déterminer l'expression de la capacité $C(x)$ du condensateur en fonction de x , L , L_z , e , ε_0 et ε_r pour tout x compris entre 0 et L .
- Q.18** Déterminer l'expression de l'énergie électrostatique U_E localisée entre les deux armatures.
- Q.19** La résultante des forces qui s'exercent sur le diélectrique mobile est $\vec{F} = F\vec{i}$ avec $F = \left. \frac{dU_E}{dx} \right|_{U=cste}$. Déterminer l'expression de F en fonction de la tension U et de e , ε_0 , ε_r et L_z .
- Q.20** Déterminer numériquement F pour $\varepsilon_r = 1$ (air), $\varepsilon_r = 7$ (Mica) et $\varepsilon_r = 12$ (Silicium). Commenter les résultats.
On prendra $U = 200 \text{ V}$; $e = 3 \mu\text{m}$; $L_z = 50 \mu\text{m}$ et $L = 0,1 \text{ mm}$.

IV – Étude dynamique du micro-moteur linéaire

On considère le micro-moteur de la FIGURE 3. Il est alimenté par une source de tension $u(t)$. La masse du diélectrique mobile est $M = 1,5 \times 10^{-11} \text{ kg}$.

La capacité, à l'instant t , du condensateur formé par l'actionneur dépend de la valeur de x au même instant : $C(x) = A + B \cdot x$ avec $A = 8,84 \times 10^{-14} \text{ F}$ et $B = 8,83 \times 10^{-8} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ pour toutes les valeurs de x comprises entre $x = 0$ et $x = L$.

La résistance et l'inductance du circuit électrique qui alimente le micro-moteur sont supposées nulles. Le micro-moteur est équivalent du point de vue électrique à un condensateur parfait.

Un dispositif de blocage impose la condition $x(t = 0) = 0$. On alimente le micro-moteur par une source de tension constante $u(t) = U = 200 \text{ V}$, et on libère, à l'instant $t = 0$ le diélectrique mobile.

- Q.21** Déterminer l'expression de $x(t)$. Tracer la courbe $x(t)$ correspondante pour x variant de 0 à L . Déterminer et calculer numériquement la durée globale de l'opération.
- Q.22** Déterminer l'expression $i(t)$ de l'intensité du courant fourni par la source. Déterminer et calculer la valeur maximale i_{max} de $i(t)$.
- Q.23** Quel élément mécanique simple pourrait-on ajouter au dispositif pour qu'il existe une position d'équilibre stable pour le diélectrique mobile en présence de tension ? On choisira les caractéristiques de façon que la position d'équilibre stable du système corresponde à $x = 0$ pour une tension $u(t)$ nulle.
- Q.24** Trouver la condition pour que, avec cette modification, la butée en $x = L$ ne soit pas percutée par le diélectrique mobile lorsque $U = 200 \text{ V}$, x et $\dot{x}$ étant nuls à l'instant initial.

• • • FIN • • •