DS 4 (4 heures)

Électrostatique

La calculatrice est **autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	**Indicateur**
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respéctés	**Palier de Malus**	**Effet sur la note**
0	0	aucun
1–2	1	-3.3%
3–4	2	-6.7%
5–6	3	-10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 : Champ et potentiel créés par une ligne haute tension

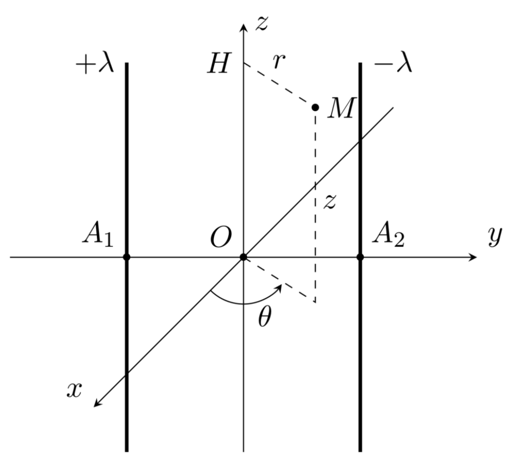
On cherche dans ce problème à modéliser le profil du potentiel électrique créé par un fil électrique d'une ligne à haute tension, portant une densité linéique de charge $\lambda > 0$, supposé parallèle au sol à une hauteur h de celui-ci et de longueur infinie. Du fait des orages, la Terre est légèrement chargée négativement donc on modélise le sol par une surface horizontale portant une densité surfacique de charge σ négative et dont nous prendrons le potentiel égal à zéro.

Pour arriver à décrire ce système, nous utiliserons une distribution de charges équivalente, formée de deux fils parallèles infinis. Nous étudions un unique fil dans un premier temps puis deux fils parallèles dans un second temps avant de revenir sur le problème initial.

Q.1 Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par un unique fil infini chargé avec une densité linéique λ uniforme, en tout point M. On notera r la distance entre le point M et le fil.

Q.2 En déduire le potentiel électrique associé $V(M)$ à une constante C près.

On considère maintenant deux fils rectilignes, infinis, parallèles à l'axe (Oz), et d'équations $y = -a$ et $y = +a$, de charges linéiques uniformes $\lambda_1 = +\lambda$ et $\lambda_2 = -\lambda$, avec $\lambda > 0$. On note A_1 et A_2 leur intersection respective avec le plan (xOy).



Un point M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z). On note $r_1 = H_1M$ et $r_2 = H_2M$ les distances entre M et chacun des fils, H_1 et H_2 désignant respectivement les projetés de M sur les fils 1 et 2. On choisit l'origine des potentiels au point O, origine du repère d'espace.

Q.3 Calculer l'expression du potentiel électrostatique $V(M)$ créé en M par l'ensemble des deux fils en fonction de λ, r_1 et r_2.

Q.4 Établir la relation liant r_1 et r_2 en un point M d'une surface équipotentielle telle que $V(M) = V_0$.

Q.5 Montrer que la surface équipotentielle $V_0 = 0$ est un plan dont on donnera l'équation.

Dans toute la suite, on note par soucis de simplification : $k = \exp\left(\dfrac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda}\right)$.

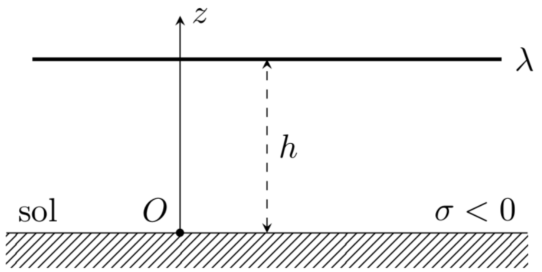
Q.6 Montrer que si $V_0 \neq 0$, les surfaces équipotentielles sont des cylindres dont l'intersection avec le plan (xOy) sont des cercles de rayon R_k et de centre C_k tels que :

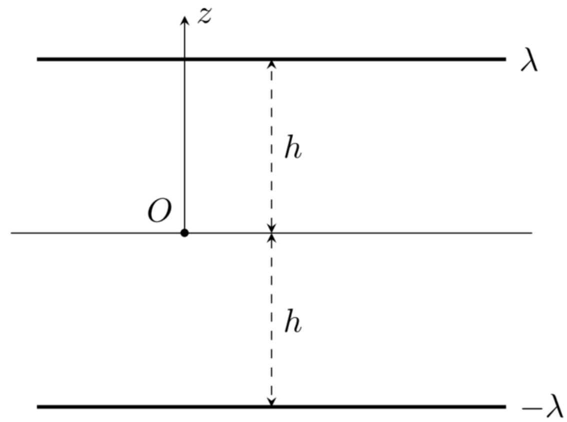
$$R_k = \frac{2ka}{|1-k^2|} \quad \text{et} \quad C_k = \left(0,\ a\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)$$

On rappelle que l'équation d'un cercle de centre $C = (\alpha, \beta)$ et de rayon γ s'écrit en coordonnées cartésiennes $(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \gamma^2$.

Q.7 En indiquant les propriétés utilisées, dessiner l'allure des équipotentielles et des lignes de champ électrostatique dans le plan $z = 0$, pour $V_0 > 0$ ou $V_0 < 0$.

On admettra que le potentiel électrique créé dans l'espace $z > 0$ par la ligne à haute tension chargée avec une densité linéique $\lambda > 0$ et par le sol chargé avec une densité surfacique $\sigma < 0$ est le même que celui qui est créé par deux fils infinis parallèles, symétriques par rapport au plan $z = 0$ et portant des charges linéiques opposées λ et $-\lambda$. Dans cette modélisation, le plan $z = 0$ n'est plus chargé (voir figure ci-dessous).





Q.8 Montrer que le potentiel à une hauteur $0 \leq z < h$ du sol, dans un plan vertical contenant la ligne à haute tension est donné par :

$$V(z) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{h+z}{h-z}\right)$$

Q.9 Le cylindre dont l'axe est quasiment confondu avec la ligne HT et dont le rayon est $r_1 = 1{,}5\,\text{cm}$ est une équipotentielle de valeur $V_1 = 400\,\text{kV}$. Exprimer $V(z)$ en fonction de V_1, h, r_1 et z, pour $0 \leq z < h$.

Q.10 Les lignes HT étant situées à une hauteur $h = 50\,\text{m}$, déterminer la valeur de la différence de potentiel entre le sol et une hauteur L d'environ $2\,\text{m}$. Quel commentaire peut-on faire ?

Exercice 2 : Le vol des araignées

Les araignées produisent des fils de soie constitués d'un entrelacement de nombreuses fibrilles élémentaires. Le diamètre de ces fils varie typiquement de 1 jusqu'à 70 µm. À diamètre équivalent, ces fils sont plus résistants que l'acier et possèdent de nombreuses autres propriétés qui les rendent intéressants pour l'industrie.

Certaines araignées volantes dont la taille est comprise entre 2 et 7 mm parviennent, en tirant profit des forces électrostatiques, à décoller et à s'envoler. Elles arrivent ainsi à parcourir, au gré des vents, des distances considérables (plusieurs centaines de kilomètres) comme l'a observé pour la première fois, Charles Darwin, lors de son grand voyage à bord du *Beagle* de 1831 à 1836. Dans cette partie du problème, nous nous intéressons à la physique permettant d'expliquer un tel phénomène.

Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. On donne :

Permittivité diélectrique du vide :	$\varepsilon_0 = 8{,}9 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$
Masse volumique de l'eau :	$\rho = 1{,}0 \times 10^{3}\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
Accélération de pesanteur terrestre :	$g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$
Rayon terrestre :	$R_T = 6400\,\mathrm{km}$

Q.1 En utilisant une schématisation sphérique rudimentaire pour modéliser ces araignées, estimer un ordre de grandeur m_g pour leur masse.

Par temps clair, le champ électrique en tout point de la surface de la Terre est radial uniforme, dirigé vers le centre de la Terre et sa valeur moyenne vaut $E_0 = 120\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$. En première approximation, on assimile localement l'atmosphère terrestre à un condensateur plan dont les deux armatures sont le sol terrestre et la couche de l'ionosphère située à l'altitude $z_0 = 60\,\mathrm{km}$ de celui-ci.

Q.2 Évaluer la valeur de la densité surfacique moyenne de charge au niveau du sol, notée σ. Des mesures ont permis de montrer qu'il existe une différence de 360 kV entre l'ionosphère et le sol. Que pouvez vous conclure quant à la validité du modèle électrique atmosphérique proposé ?

Les araignées volantes positionnent leurs corps de manière à prendre le vent, en éjectant vers le ciel des fils de soie, qui grâce aux courants d'air et au champ électrique leur permettent de s'élever. Darwin nota que ces araignées décollent en présence au niveau du sol de légers courants d'air ascendants ayant des vitesses U de l'ordre de $0{,}1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. On peut montrer que les forces hydrodynamiques sont insuffisantes pour permettre à elles seules de faire s'élever les araignées.

Darwin remarqua en outre que le nombre de fils fabriqués par celles-ci peut atteindre quelques dizaines. Les différents fils tissés par une même araignée s'écartent en éventail du fait d'une répulsion électrostatique. Pour corroborer cette hypothèse, on modélise chaque fil de soie comme un fil rigide isolant, de longueur L que l'on supposera inextensible, possédant en son extrémité libre, une charge q. Ces charges placées dans le champ électrique terrestre interagissent entre elles. On suppose qu'il y a $2n$ fils et que les charges correspondantes se répartissent régulièrement sur le cercle formant la base d'un cône d'angle α en son sommet S (lequel correspond à l'extrémité commune des soies) avec la verticale (Figure 1).

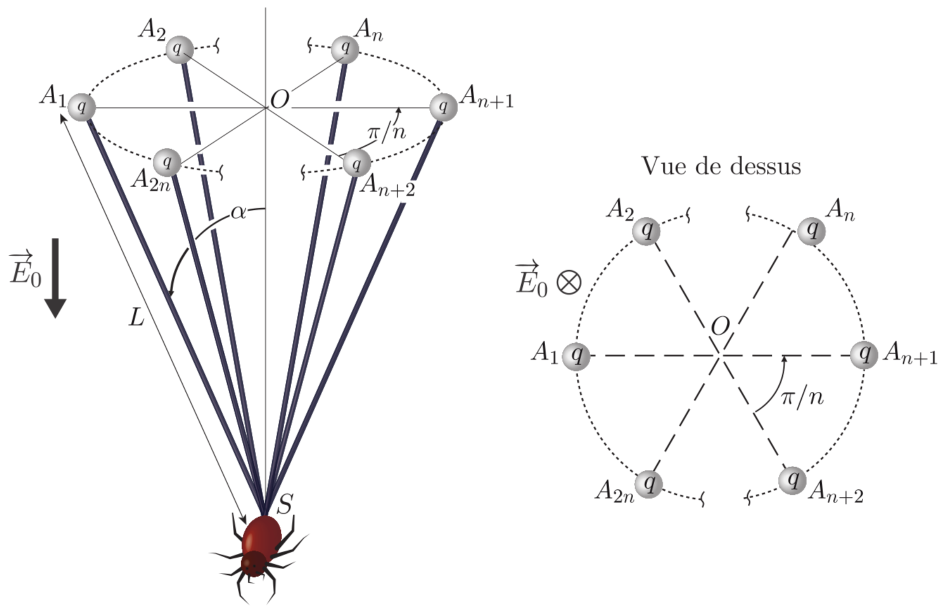


Figure 1 – Représentation schématique d'une araignée prête à décoller.

Q.3 Montrer que le potentiel électrique créé sur une charge par les $2n-1$ autres charges s'exprime comme :

$$V = \frac{q}{p\pi\epsilon_0 L\sin\alpha}G(n) \quad ; \qquad \text{avec } G(n) - 1 = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)}$$

On précisera la valeur de l'entier p. On pourra éventuellement considérer les points diamétralement opposés A_k et A_{k+n} avec $1 \leq k \leq n$.
En déduire l'énergie d'interaction électrostatique du système total constitué des $2n$ charges en l'absence de champ électrique extérieur. S'il n'est soumis qu'à ce potentiel, quelle est alors la forme de l'éventail à l'équilibre ?

On étudie le mouvement de cet éventail autour de sa position d'équilibre en absence de champ électrique extérieur en supposant qu'à l'instant t, tous les fils forment le même angle $\alpha(t)$ avec la verticale. On simplifie le système en considérant, d'une part, que la masse m de chaque fil est ponctuelle, située en leur milieu et, d'autre part, on néglige l'énergie potentielle de pesanteur et celle de déformation élastique devant l'électrostatique. On suppose finalement que S est fixe.

Q.4 Que vaut l'énergie mécanique du système total ? Déterminer alors l'équation différentielle régissant ce mouvement. Discuter la stabilité de l'équilibre et établir l'expression de la période T, du mouvement au voisinage de la position d'équilibre en fonction de ϵ_0, m, L, q et $G(n)$.

Q.5 On plonge le système dans le champ électrique terrestre. En prenant l'origine V_0 des potentiels au niveau du point S, déterminer la forme du potentiel V associé au champ électrique terrestre $\vec{E}_0$ existant au niveau du sol. En déduire l'expression de l'énergie électrostatique du système dans ce cas ainsi que l'équation permettant de déterminer la valeur de l'angle α à l'équilibre. Expliquer qualitativement comment varie l'ouverture d'équilibre de l'éventail en fonction respectivement de q, n, L et E_0. On observe un angle $\alpha = 30°$ pour un éventail constitué de $2n = 6$ soies longues de 1 mètre. Que vaut alors la charge q ? On donne $G(3) \simeq 38/(3\sqrt{3})$.

Q.6 Calculer la norme de la force électrique s'exerçant sur l'araignée au niveau du sol pour une charge dont le module est de l'ordre du nanocoulomb. Par temps clair et uniquement par la force électrique, combien de fils sont-ils nécessaires pour soulever les plus petites araignées ? Commenter ce résultat.

En réalité, lorsqu'elles décollent, les araignées sont situées sur des zones où le champ électrique est bien plus important que dans les conditions normales du fait d'un phénomène connu sous le nom d'effet de pointe. On retrouve ces conditions au sommet des arbres ou du mât du Beagle comme dans l'expérience de Darwin.

Pour appréhender un tel effet, on considère un conducteur plan infini dans lequel un endroit possède la forme d'un coin obtus ou aigu (Figure 2) dont le sommet O forme l'origine d'un repère de coordonnées polaires. La région de l'espace pour laquelle $0 < \theta < \varphi$ est l'air assimilé au vide ne contenant aucune charge libre. Les conditions aux limites sont $V(r,0) = V(r,\varphi) = V_0$. On note $V(M)$ le potentiel électrique en un point M de l'espace.

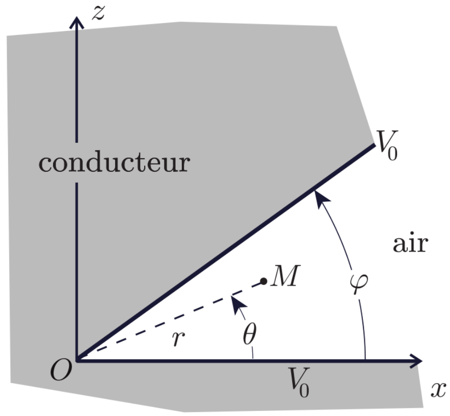


Figure 2 – Modèle de coin.

On peut montrer (ne pas le faire) que dans une zone vide de charges, le potentiel $V(r,\theta)$ vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0$$

On cherche une solution de cette équation sous une forme aux variables polaires séparées : $V(r,\theta) = f(r) \times g(\theta)$. Le Laplacien en coordonnées polaires est donné pour un champ scalaire $a(r,\theta)$ par :

$$\Delta a = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial a}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2}$$

Q.7 Écrire les équations vérifiées par f et g et vérifier que

$$V(r,\theta) = \tilde{V} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{\omega_n} \sin(\omega_n \theta)$$

est solution. Dans cette relation, $\tilde{V}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des constantes que l'on ne cherchera pas à déterminer. On précisera par contre l'expression de ω_n en fonction de φ et de l'entier positif n.

Q.8 En ne considérant que le terme $n = 1$ qui s'avère prépondérant, déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$. En déduire une condition sur φ pour laquelle $\|\vec{E}(M)\|$ peut devenir très important si $M \to O$.

• • • FIN • • •