DS 4 (2 heures)
Magnétostatique

La calculatrice est **autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	**Indicateur**
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respéctés	**Palier de Malus**	**Effet sur la note**
0	0	aucun
1–2	1	−3.3%
3–4	2	−6.7%
5–6	3	−10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 : Création de champs magnétiques intenses

L'imagerie médicale a besoin de champ magnétique intense, permanent et uniforme. On se propose ici de dimensionner une bobine dans laquelle règne un champ magnétique de 2 T.
On rappelle que la résistance électrique R d'un conducteur de conductivité électrique γ, de section S et de longueur L est donnée par $R = \dfrac{L}{\gamma S}$.

I – Création d'un champ magnétique intense à l'aide d'un solénoïde

I.A Caractéristiques de la bobine à température ambiante

On suppose pour le moment que la bobine est maintenue à température ambiante $T = 300\,\mathrm{K}$. La bobine (Figure 1) est assimilée à un solénoïde d'axe (Oz), de longueur L, de rayon R_{moy} avec $R_{moy} \ll L$. Les effets de bords sont négligés, le solénoïde est donc considéré comme infini. Il est constitué de spires jointives d'un fil de cuivre de diamètre d et de conductivité électrique γ_{Cu}. Chaque spire est parcourue par un courant I. Il comporte p couches de bobinage superposées.

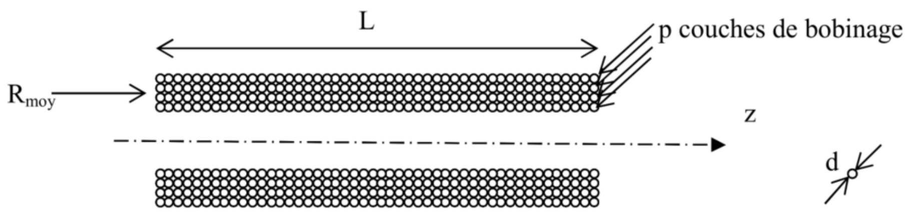

Figure 1 – Bobine comportant plusieures couches de bobinage

Q.1 Sur une seule couche de bobinage, combien y-a-t-il de spires jointives par unité de longueur de solénoïde ? Combien de spires par unité de longueur n comporte ce solénoïde ?

Q.2 Donner, en fonction de d, p, I et μ_0, l'expression du champ magnétique créé à l'intérieur du solénoïde. Calculer le nombre de bobinage p nécessaire pour avoir $B = 2{,}0\,\mathrm{T}$ avec $d = 3{,}0\,\mathrm{mm}$ et $I = 35\,\mathrm{A}$.

Q.3 En assimilant le rayon de chaque spire au rayon moyen R_{moy}, exprimer la longueur de fil L_{fil} nécessaire à la réalisation de cette bobine en fonction de R_{moy}, d, p et L. Evaluer L_{fil} avec $L = 1{,}8\,\mathrm{m}$ et $R_{moy} = 50\,\mathrm{cm}$.

Q.4 Exprimer la résistance électrique R_{elec} de la bobine en fonction de γ_{Cu}, de L_{fil} et de d. Évaluer alors la puissance P_J, dissipée par effet Joule dans la bobine. Commenter.

I.B Caractéristiques de la bobine refroidie

Pour diminuer la puissance dissipée, on peut envisager de refroidir le conducteur en cuivre par l'intermédiaire d'un bain d'azote liquide. On peut alors imposer dans un conducteur de cuivre de même diamètre $d = 3\,\mathrm{mm}$, un courant plus important $I' = 80\,\mathrm{A}$. On réduit ainsi le nombre de spire de la bobine et donc sa résistance électrique ainsi que son rayon moyen. On suppose donc maintenant que la bobine est maintenue à la température de 77 K.

Q.5 Quel est alors le nombre de couches de bobinage p' à superposer pour obtenir un champ magnétique de 2 T ? En assimilant la rayon de chaque spire au nouveau rayon moyen $R'_{moy} = 40\,\mathrm{cm}$, évaluer la nouvelle puissance P'_J dissipée par effet Joule dans la bobine.

Compte-tenu du coût de la réfrigération à 77 K, il faut tenir compte de l'efficacité de la machine thermique assurant le maintien de cette basse température. La machine frigorifique en question fonctionne de manière réversible entre une source chaude T_c et une source froide T_f par l'intermédiaire d'un fluide caloporteur.

Q.6 Exprimer l'efficacité η_r de cette machine en fonction de T_f et T_c. Effectuer l'application numérique avec $T_f = 77\,\mathrm{K}$ et $T_c = 300\,\mathrm{K}$.

Q.7 Évaluer alors la puissance minimale P' à apporter à la machine frigorifique pour absorber la puissance P'_J dissipée dans la bobine en cuivre refroidi. Commenter.

II – Puissance dissipée dans le supraconducteur lors des régimes transitoires

L'utilisation des supraconducteur permet d'éliminer les pertes par effet Joule mais si les supraconducteurs sont dépourvus de pertes en régime continu, il n'en est pas de même en régime variable. Pour les bobines alimentées en régime continu, ces pertes ont lieu lors des deux régimes transitoires qui correspondent en début d'utilisation de la bobine à l'installation du courant dans le conducteur, puis en fin d'utilisation de la bobine, lors de la redescente à zéro de ce courant.

On se propose ici de déterminer l'ordre de grandeur de la puissance dissipée par unité de longueur du conducteur lors de la première montée de courant, dans une situation dite de champ propre, c'est-à-dire lorsqu'une portion de conducteur est soumise aux variations temporelles du champ magnétique qu'il crée sur lui-même. On assimile le supraconducteur (Figure 2 (gauche)) à un fil rectiligne infini suivant l'axe (Oz), de rayon R. On adopte les coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

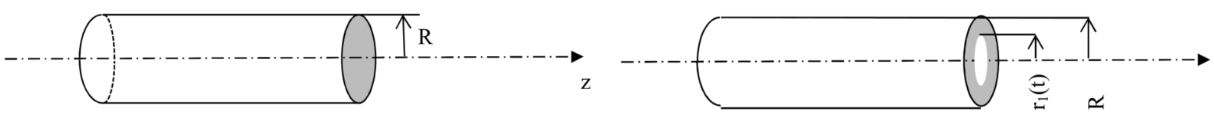

Figure 2 – Supraconducteur (gauche) et répartition du courant dans le supraconducteur (droite)

Compte–tenu des invariances du problème, la densité volumique de courant dans le supraconducteur, notée $\vec{j}_e$, ne dépend que de r et est portée par le vecteur $\vec{e}_z$: $\vec{j}_e = j_e(r)\vec{e}_z$. Pour un courant de transport I donné, la densité de courant n'est pas uniforme dans le supraconducteur, son amplitude vaut soit $\pm j_0$ soit 0, avec j_0 une constante. Ce courant se distribue de façon à protéger le centre du supraconducteur de toute variation de champ magnétique.

Q.8 Déterminer en fonction de j_0 et de R, la valeur maximale I_c, dite valeur critique du courant de transport de ce conducteur.

On ne s'intéresse ici qu'à la première montée du courant $I(t)$ dans le supraconducteur. On suppose que cette première montée s'effectue pendant une durée T, suivant une consigne en rampe de sorte que : $I(t) = I_0 \dfrac{t}{T}$ avec I_0 la valeur finale du courant dans le supraconducteur.

Ce courant se distribue de façon à protéger le centre du supraconducteur de toute variation de champ magnétique, de sorte qu'il se répartit, à un instant t de cette première étape, à la périphérie du supraconducteur dans la zone : $r_1(t) < r < R$ (Figure 2 (droite)) :

$$j_e(r,t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad r < r_1(t) \\ j_0 & \text{pour} \quad r > r_1(t) \end{cases}$$

Q.9 On définit par $u = \dfrac{I_0}{I_c}$ le taux d'utilisation du supraconducteur. Exprimer u en fonction de j_0, R et I_0.

Q.10 Déterminer la relation qui existe entre $I(t)$, j_0, $r_1(t)$ et R. En déduire l'expression de $r_1(t)$ en fonction de R, u, T et t. Exprimer alors $r_1(T)$ en fonction de u et R.

Q.11 À l'aide des propriétés de symétries et d'invariance, préciser de quelle(s) variable(s) de l'espace dépend le champ magnétique $\vec{B}$ dans le supraconducteur et par quel(s) vecteur(s) de base il est porté.

Q.12 Par application du théorème d'Ampère, dans l'approximations des régimes quasi-stationnaires, sur un contour que l'on précisera, déterminer à l'instant t le champ magnétique dans la zone $0 < r < r_1(t)$. De même, déterminer en fonction de μ_0, j_0 et $r_1(t)$, le champ magnétique dans la zone $r_1(t) < r < R$. Tracer l'allure de $\|\vec{B}\|$ en fonction de r à un instant t, pour $0 < r < R$.

On donne, en régime variable, l'équation différentielle reliant le champ électrique $\vec{E}$ au champ magnétique $\vec{B}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

appelée équation de Maxwell-Faraday. On admettra que toute contribution du champ électrique qui ne dépend que de l'espace ou que du temps sera assimilée à la fonction nulle.

Q.13 Que vaut le champ électrique pour $r < r_1(t)$? En remarquant que le champ électrique est continu en $r_1(t)$ et qu'il peut s'écrire sous la forme $\vec{E} = E(r,t)\vec{e}_r$, montrer que

$$E(r,t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi T} \ln\left(\frac{r}{r_1(t)}\right)$$

pour $r_1(t) < r < R$.

Dans un milieu conducteur, la densité volumique locale et instantanée de puissance dissipée par effet Joule est donnée par $p_v(r,t) = \vec{j}(r,t) \cdot \vec{E}(r,t)$.

Q.14 Donner l'expression de cette densité volumique de puissance dissipée dans le supraconducteur dans les zones $r < r_1(t)$ et $r_1(t) < r < R$.

Q.15 Par intégration sur l'espace, en déduire, en fonction de μ_0, I_0, T, L_{supra}, u et t, l'expression de la puissance $P(t)$ dissipée dans une longueur L_{supra} de supraconducteur à l'instant t lors de la première montée de courant.

Q.16 Par intégration sur le temps, déterminer l'énergie Q dissipée lors de la première montée du courant dans le supraconducteur. Est-il utile d'augmenter la durée T d'établissement de ce courant pour réduire l'énergie dissipée dans le supraconducteur ?

Q.17 La machine frigorifique qui assure le refroidissement du supraconducteur à 4,2 K a une efficacité de $1{,}5 \times 10^{-3}$. On donne $I_0 = 445\,\text{A}$, $L_{supra} = 14\,\text{km}$ et $u = 0{,}7$. Évaluer l'énergie consommée Q_r par le réfrigérateur devant absorber l'énergie Q dissipée lors de cette première montée de courant. Commenter.

Données

Constantes :

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}\mathrm{H}\cdot\mathrm{m}^{-1}$

Conductivité électrique du cuivre : $\gamma_{Cu}(77\,\mathrm{K}) = 3{,}8\times10^{8}\,\mathrm{S}\cdot\mathrm{m}^{-1}$; $\gamma_{Cu}(300\,\mathrm{K}) = 6{,}0\times10^{7}\,\mathrm{S}\cdot\mathrm{m}^{-1}$

Formulaire mathématique :

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
$x\ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right)$	$\dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right) - \dfrac{x^2}{4} + cste$
$\ln(1-\alpha x)$	$\dfrac{(1-\alpha x)-(1-\alpha x)\ln(1-\alpha x)}{\alpha} + cste$

Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(a) = \frac{\partial a}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial a}{\partial z}\vec{e}_z \qquad ; \qquad \text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

• • • FIN • • •