DS 7 (CCINP, Mines) (4 heures)
Mécanique, Optique

La calculatrice est **autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	**Indicateur**
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respéctés	**Palier de Malus**	**Effet sur la note**
0	0	aucun
1–2	1	−3.3%
3–4	2	−6.7%
5–6	3	−10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 : Caractéristiques d'une lame de verre

L'objectif est de déterminer les caractéristiques d'une lamelle d'épaisseur e et d'indice n par deux méthodes. Ce problème comporte deux parties. La première partie aborde l'étude de la lame de verre. La seconde partie traite d'une méthode interférentielle d'étude.

I – Lame de verre

Une lame transparente est caractérisée par son épaisseur e et l'indice n du milieu qui la compose. On cherche à caractériser ce dioptre dans le cadre de l'optique géométrique.

Q.1 Donner un ordre de grandeur de l'indice du verre.

Q.2 Rappeler les relations de Snell-Descartes à la réfraction.

Q.3 Effectuer un rapide tracé de rayon sur la Figure A du document réponse (à gauche) afin de trouver graphiquement la position de A', image de A par la lame.

Q.4 Effectuer, de même, un rapide tracé de rayon sur la Figure A du document réponse (à droite) avec un point objet A virtuel.

Q.5 Montrer, par des considérations géométriques, que la relation de conjugaison qui relie A et A' est donnée dans les conditions de Gauss par :

$$\overline{AA'} = e\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

II – Approche interférentielle

On désire obtenir les caractéristiques de la lame par une méthode interférentielle. Dans un système interférentiel à deux ondes, on provoque un déphasage entre les ondes parcourant les deux voies de l'interféromètre. Ce déphasage est fonction de la différence de marche δ et de la longueur d'onde λ.

Lorsque l'intensité lumineuse varie en faisant varier λ, on parle de **cannelures** et en faiant varier δ, on parle de **franges**.

Un faisceau de lumière éclaire la lame précédente sous une incidence i quasi-constante et proche de 45° (voir Figure 1). Les faces avant et arrière de la lame sont traitées pour obtenir un coefficient de reflexion important.

Q.6 Mettre en évidence sur la Figure B (lame d'air à gauche et lame de verre à droite) du document réponse, la différence de marche géométrique entre les deux rayons issus d'un même rayon d'incidence i et qui interfèrent sur l'écran.

Q.7 Déterminer la différence de marche géométrique δ_{geo} pour la lame d'air en fonction de n, e et de l'angle d'incidence i.

Q.8 Dans le cas d'une lame de verre, on obtient (démonstration non demandée) en considérant les différentes réflexions, une différence de marche totale :

$$\delta = \frac{\lambda}{2} + 2e\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$

Analyser ce résultat pour $n = 1$ et commenter le facteur $\dfrac{\lambda}{2}$.

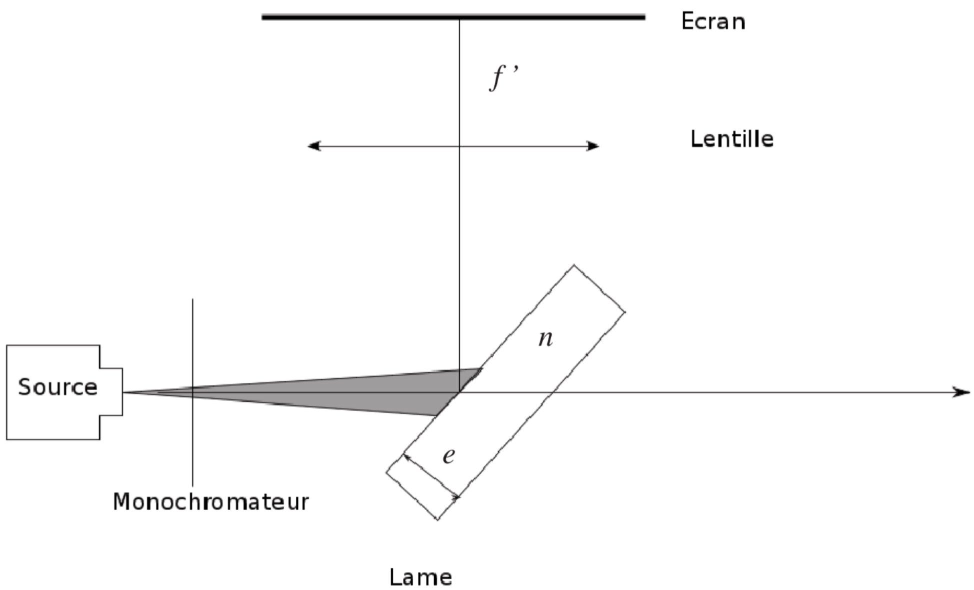

FIGURE 1 – Caractérisation de la lame par mesure interférentielle

Q.9 Donner l'expression de l'éclairement (formule de Fresnel) pour des interférences à deux ondes cohérentes de même amplitude, en justifiant le cadre de son application. À quelles conditions les interférences sont-elles constructives ?

Première expérience : On se place à la longueur d'onde constante $\lambda = 532\,\mathrm{nm}$ et on observe dans le plan focal image de la lentille dont la distance focale image est $f' = 1\,\mathrm{m}$.

Q.10 Quelle est l'allure de la figure d'interférence ? Justifier votre réponse.

Q.11 L'angle d'incidence étant proche de 45°, on pose $i = \dfrac{\pi}{4} + \alpha$ avec $\alpha \to 0$. En différenciant l'expression de la différence de marche donnée ci-dessus pour $\lambda = cste$, déterminer l'expression de la variation élémentaire $\mathrm{d}\delta$ de la différence de marche, en fonction de e, n et de la variation élémentaire $\mathrm{d}\alpha$.

Q.12 Rappeler ce que représente l'interfrange.

Q.13 Montrer que l'interfrange moyen Δx vérifie la relation $-\dfrac{2e}{f'}\dfrac{\Delta x}{\sqrt{n^2 - 0,5}} = \lambda$.

Q.14 En exploitant au mieux la FIGURE C (document réponse) exprimer une première relation entre e et n.

Deuxième expérience : On se place maintenant à incidence constante $i_0 = 45°$ et on fait varier λ à l'aide du monochromateur. On relève alors un spectre cannelé. Les longueurs d'onde éteintes sont notées λ_p.

Q.15 Établir la relation : $2e\sqrt{n^2 - 0,5} = \dfrac{\lambda_1 \lambda_p}{\lambda_p - \lambda_1}(p-1)$, λ_1 et λ_p étant respectivement les longueurs d'onde correspondant à la première et à la p-ième cannelure.

Q.16 En exploitant au mieux la FIGURE D (document réponse), trouver une seconde relation entre n et e.

Q.17 Comment peut-on en déduire e et n ? Aucun calcul n'est demandé.

Exercice 2 : Chute d'une tartine

Préoccupé dès le petit-déjeuner par un problème résistant à sa sagacité, un physicien pose distraitement sa tartine beurrée en déséquilibre au bord de la table, côté beurré vers le haut (Figure 1). La tartine tombe et atterrit sur le côté beurré, ce qui ne manque pas d'attirer l'attention du physicien. Il répète l'expérience avec méthode et circonspection et observe la répétitivité du phénomène avant de le modéliser.

Ce problème propose une étude simplifiée de la chute d'une tartine beurrée posée sur le bord d'une table afin de déterminer la face qui rencontre le sol. Pourquoi est-ce toujours la face beurrée ?

Une tartine, modélisée par un parallélépipède rectangle, homogène, de longueur $2a$, largeur $2b$, épaisseur $2e$, de centre d'inertie G, de masse m, est posée sur le bord d'une table :

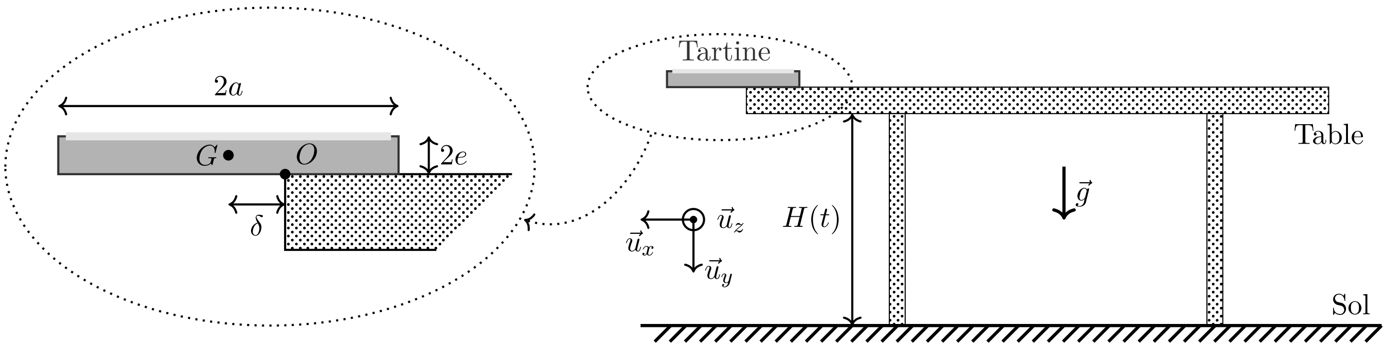

Figure 1 – Tartine posée sur le bord d'une table juste avant sa chute.

Le mouvement est décrit dans le repère $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ direct et supposé galiléen : O est sur le bord de la table, l'axe (Ox) est horizontal dirigé vers l'extérieur de la table ; l'axe (Oz) est porté par le rebord de la table et l'axe (Oy), vertical, est dirigé vers le bas. Les petits côtés de la tartine sont parallèles à (Oz).

Le mouvement est découpé en deux phases : une première phase lors de laquelle la tartine amorce sa rotation en restant en contact avec la table puis une phase de chute libre.

I – Étude de la première phase

En $t = 0$, la tartine est horizontale, sa vitesse est nulle et le point G se trouve dans le plan (xOy) décalé de δ selon l'axe (Ox) par rapport à l'origine O. La tartine amorce une rotation **sans glissement** autour de l'arête (Oz) du bord de la table. On attache les axes $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ à la tartine, de sorte à repérer sa position à un instant t quelconque par l'angle θ entre les axes $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_r$ (voir Figure 2).

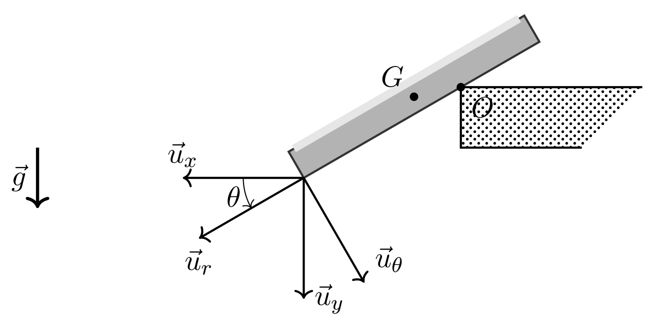

Figure 2 – Tartine amorcant sa rotation.

On note $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ la vitesse de rotation. Le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe (Gz), parallèle à (Oz) et passant par G vaut $J_G = \frac{1}{3}m(a^2 + e^2)$. Celui par rapport à l'axe (Oz) vaut $J_O = J_G + m(e^2 + \delta^2)$.

I.A Cinématique

Q.1 Exprimer le vecteur rotation $\vec{\omega}$ de la tartine en fonction de $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ dans la base orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Q.2 Exprimer les coordonnées de G dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Q.3 Exprimer la vitesse $\vec{v}_G$ de G dans cette base en fonction de e, δ et ω. Que devient cette vitesse dans le cas $\delta = 0$?

Q.4 Exprimer l'accélération $\vec{a}_G$ de G dans cette même base. Que devient cette accélération dans le cas $\delta = 0$?

I.B Dynamique

La réaction de la table en O est notée $\vec{R} = T\vec{u}_r + N\vec{u}_\theta$ avec T la réaction tangentielle et N la réaction normale.

Q.5 Écrire, en utilisant les notations définies plus haut, les deux relations issues du théorème du mouvement du centre de masse dans le repère galiléen $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, en projection sur la base mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Q.6 Écrire, en utilisant les notations définies plus haut, la relation issue du théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.

Q.7 Écrire aussi le théorème du moment cinétique par rapport au point G et vérifier que le résultat obtenu est identique au résultat précédent.

Q.8 En déduire l'expression de ω^2 en fonction de θ, J_O et des autres constantes figurant dans l'énoncé.

I.C Energétique

Q.9 Retrouver l'expression de ω^2 par une étude énergétique. Justifier avec précision l'utilisation du théorème utilisé et expliquer le calcul avec soin.

I.D Approximation du léger déséquilibre

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème, on tient compte du fait que la chute de la tartine a été causée par un très léger déséquilibre. La valeur de δ/a est faible : dans les circonstances courantes, ce coefficient de surplomb ne dépasse guère 0,02. On fait donc pour simplifier $\delta = 0$. On pose $\eta = e/a$.

Q.10 Montrer que l'on a $\omega^2 = \omega_0^2(1 - \cos\theta)$ et donner l'expression de ω_0^2 en fonction de η, g et a.

I.E Vérification des hypothèses pour la première phase

On note f le coefficient de frottement (statique et dynamique) entre la table et la tartine.

Q.11 Établir les expressions de $\dfrac{T}{mg}$ et $\dfrac{N}{mg}$ en fonction de θ et η.

Q.12 Quel est le signe de $\dfrac{N}{mg}$ pour $\theta = 0$? Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$? Commenter la signification physique.

Q.13 Étudier le signe de $\dfrac{T}{mg}$ puis commenter.

Q.14 Donner l'allure, sur un même graphique, des courbes représentant $\left|\dfrac{T}{mg}\right|$ et $f\left|\dfrac{N}{mg}\right|$ en fonction de θ. La tartine peut-elle quitter le coin de la table sans glisser ? Justifier avec précision.

I.F Transition vers la deuxième phase du mouvement

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème, l'épaisseur de la tartine étant petite, la valeur de $\eta = e/a$ est faible : on travaille donc pour simplifier au premier ordre en η (on néglige les termes du deuxième ordre). La tartine commence à glisser pour $\theta_0 = \pi/4$.

Q.15 Déterminer le coefficient de frottement f entre la table et la tartine.

II – Étude de la seconde phase

On s'intéresse maintenant à la chute de la tartine. À partir du moment où elle commence à glisser, la tartine perd très vite le contact avec la table conservant quasiment la même orientation et la même vitesse angulaire qu'au début de cette phase très brève de glissement. On considère donc ici que la tartine est en chute libre dès $\theta_0 = \pi/4$. On prend l'origine des temps au début de la chute libre. On néglige les frottements de l'air sur la tartine et on suppose, bien entendu, qu'il n'y a pas de contact ultérieur de la tartine avec la table.

II.A La chute

Q.16 Écrire le principe fondamental de la dynamique au point G ainsi que le théorème du moment cinétique.

Q.17 Écrire la conservation de l'énergie mécanique totale. Pourquoi se conserve-t-elle ?

Q.18 Quelle est la loi d'évolution ultérieure de l'angle θ ? Donner alors l'expression de θ en fonction de t, θ_0 et ω_0 (notation définie plus haut).

Q.19 Écrire les équations littérales du mouvement de G en fonction de g, t, θ_0, ω_0 et e.

II.B L'arrivée au sol

On considère que, lorsque la tartine atteint le sol, à l'instant τ, elle ne subit pas de rebond et que toute son énergie cinétique devient négligeable.

Q.20 Quels sont les angles limites θ_1 et θ_2 (avec $\theta_2 > \theta_1$) tels que la tartine atterrisse côté pain, en admettant qu'elle fasse moins d'un tour avant de toucher le sol ? Faire un schéma représentant 5 ou 6 des positions de la tartine (dont les positions initiale et finale) dans le plan xOy pour cette chute dans le cas limite θ_2, en indiquant clairement la face beurrée.

Q.21 En négligeant toutes les dimensions de la tartine devant h (hauteur de la table), évaluer la durée de la chute τ en fonction de h et g. Évaluer également l'angle θ_f dont a tourné la tartine depuis sa position d'équilibre initiale.

Q.22 Applications numériques : calculer τ et θ_f en degrés pour $h = 75\,\mathrm{cm}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, $a = 4\,\mathrm{cm}$ et $e = 4\,\mathrm{mm}$. Conclusion ?

Q.23 Comment les considérations précédentes seraient-elles modifiées sur la planète Mars, où le champ de pesanteur vaut $g_M = 3{,}7\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$?

Q.24 Il est raisonnable de penser que la taille d'un éventuel organisme humanoïde marchant sur deux jambes est conditionnée par la valeur du champ de pesanteur de la planète où il vit. Quelle serait l'ordre de grandeur de la taille d'un martien ? Vérifierait-il lui aussi, sous les mêmes hypothèses, que sa tartine beurrée tombe presque toujours sur le côté tartiné ?

• • • FIN • • •

Annexe du DS 7 (CCINP, Mines)
(À détacher et à rendre avec la copie)

Q.3 et **Q.4**

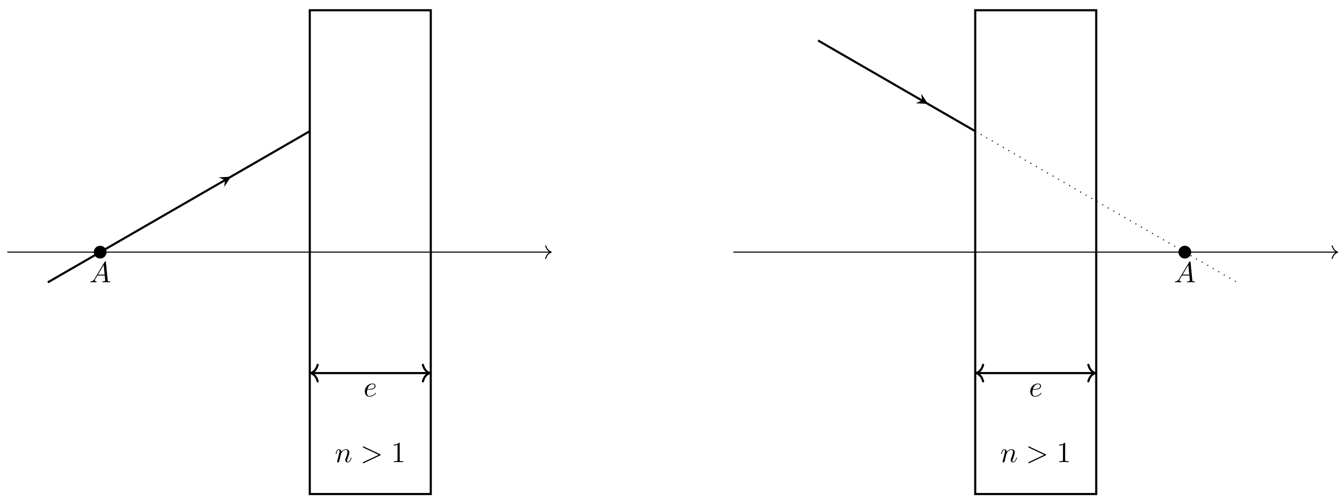

FIGURE A – Tracé de rayons

Q.6

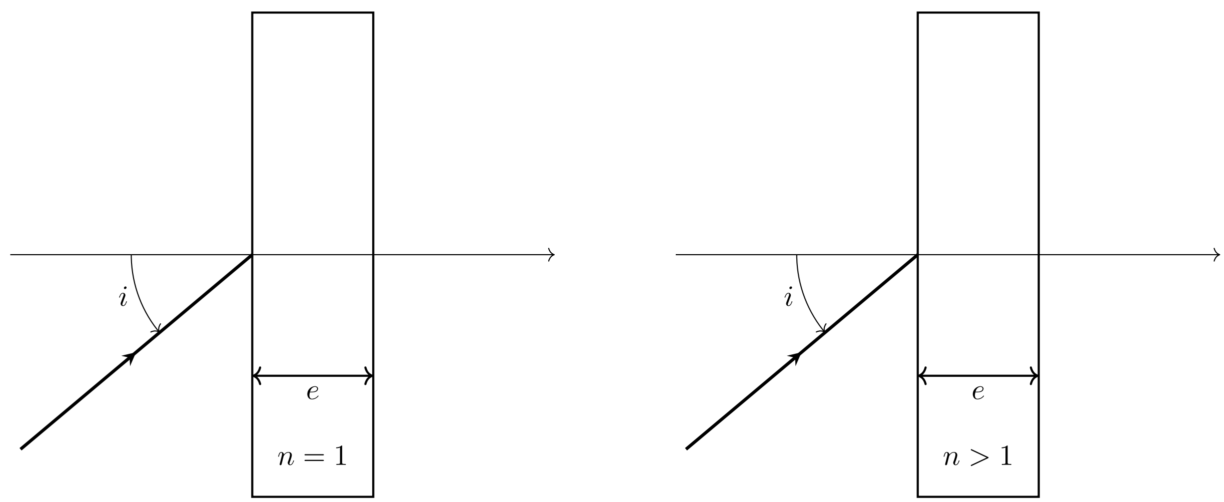

FIGURE B – Différences de marches

Q.14

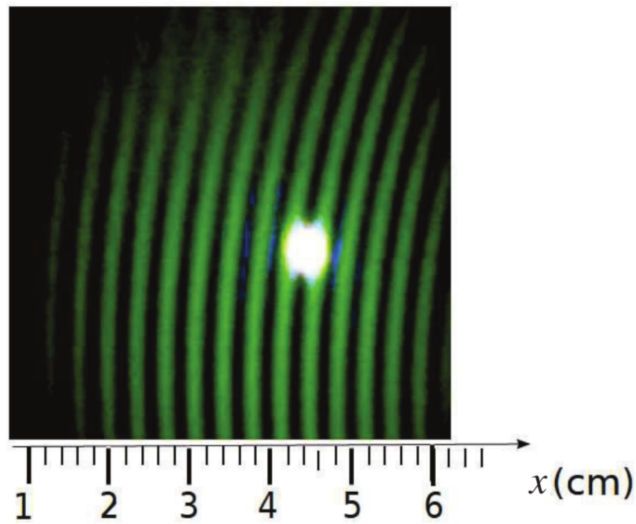

FIGURE C – Figure d'interférence

Q.16

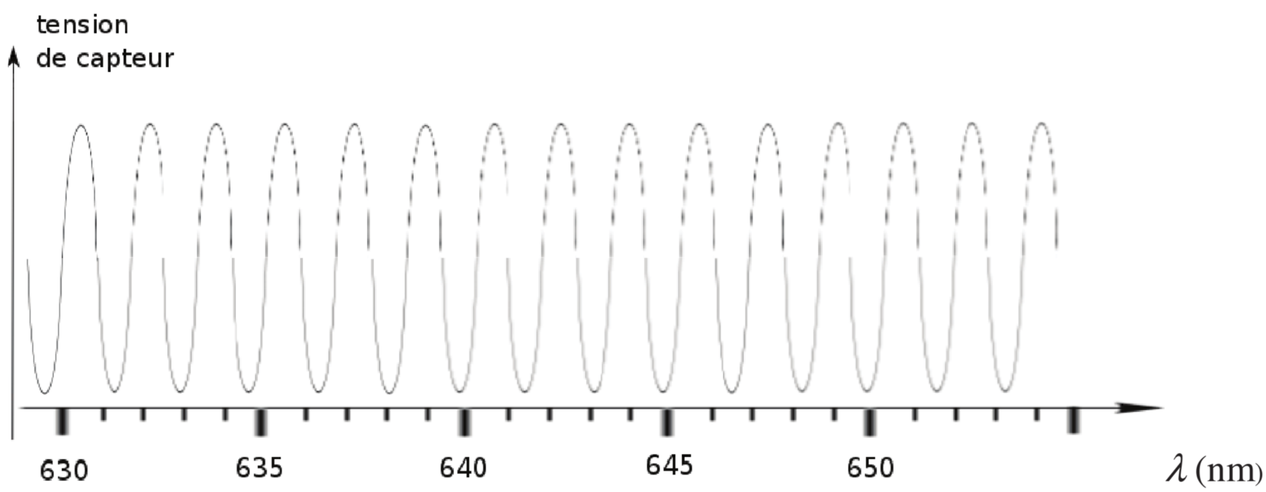

FIGURE D – Spectre cannelé