

DS 8 (4 heures)
Optique, Mécanique, Référentiels non-galiléens

La calculatrice est **autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	Indicateur
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respectés	Palier de Malus	Effet sur la note
0	0	aucun
1-2	1	-3.3%
3-4	2	-6.7%
5-6	3	-10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 : De l'éther luminifère à la relativité restreinte

Après le succès des théories ondulatoires de Young et de Fresnel, il restait aux physiciens à expliquer la propagation de la lumière. En 1873, Maxwell publie la forme définitive de ses équations de l'électromagnétisme. À l'instar d'une onde mécanique, la lumière est conçue comme la vibration d'un "milieu support" présent partout dans l'univers : l'éther luminifère. Puis en 1905, Einstein fonde la théorie de la relativité restreinte sur le principe de relativité (qui énonce que toutes les lois physiques sont invariantes par changement de référentiel galiléen (ou inertiel)) et sur le postulat de l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide : le caractère absolu du temps est remis en question, la transformation de Galilée est remplacée par celle de Lorentz, l'éther luminifère peut enfin être abandonné. La question de son existence restera cependant une des grandes quêtes de la Physique jusque dans les années 1930.

Les parties I – et III – de ce problème abordent deux expériences à propos de l'éther restées célèbres dans l'histoire des sciences. La partie II – traite des lois de transformation du champ électromagnétique lors d'un changement de référentiel.

Point de vue général : on souhaite reprendre les raisonnements historiques à propos de l'éther tenus par les physiciens pré-relativistes. On introduit pour cela le référentiel de l'observateur noté (R_{obs}) et on considère l'éther comme un fluide en mouvement à la vitesse \vec{w} dans (R_{obs}), ce qui définit le référentiel de l'éther (R_{eth}). La lumière, qui est une oscillation de l'éther, se propage dans celui-ci de manière isotrope : quelle que soit sa direction, le vecteur vitesse de propagation de la lumière dans (R_{eth}), noté \vec{c} , a pour norme $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (valeur qui sera arrondie à $3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pour les applications numériques).

Consigne : en nous plaçant à l'époque des physiciens pré-relativistes, nous utiliserons la transformation galiléenne des vitesses et ferons comme si nous ne savions pas que c est une constante universelle de la Physique.

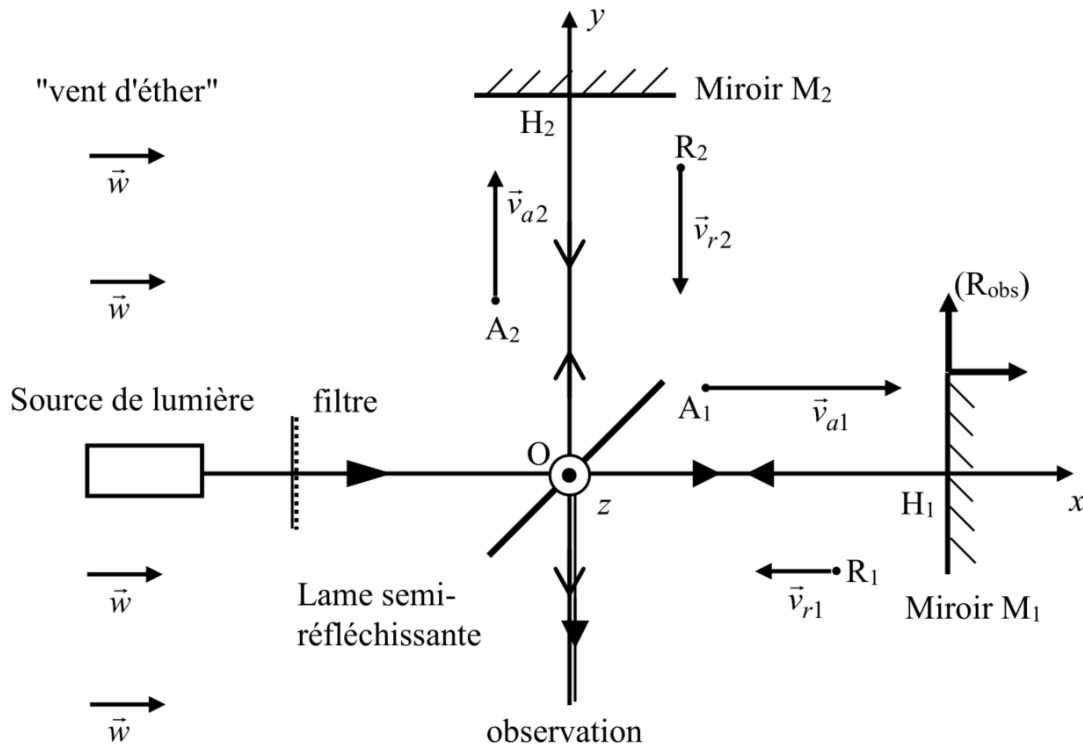
I – L'expérience de Michelson et Morley (1887)

Le schéma de principe du dispositif que Michelson et Morley utilisèrent en 1887 est représenté en FIGURE 1. Il s'agit d'un interféromètre de Michelson réglé au contact optique avec L la longueur commune des bras de l'interféromètre : $L = OH_1 = OH_2$. L'ensemble Séparatrice-Compensatrice est modélisé comme une lame semi-réfléchissante d'épaisseur nulle, placée à 45° du faisceau incident et n'introduisant aucun déphasage supplémentaire sur les trajets lumineux. Les deux faisceaux lumineux obtenus après division d'amplitude suivent des trajets selon les axes (Ox) et (Oy) perpendiculaires. On observe les franges d'interférences à l'aide d'un oculaire micrométrique placé à la sortie de l'appareil.

À l'entrée de l'interféromètre, un filtre interférentiel isole la raie H_α du rayonnement solaire. On note ν la fréquence de la lumière monochromatique ainsi obtenue. Le référentiel d'observation (R_{obs}) est ici le référentiel terrestre dans lequel les miroirs M_1 et M_2 sont immobiles. L'air est assimilé au vide et nous considérerons qu'il n'a aucune influence sur la propagation. En revanche, l'ensemble du dispositif baigne dans l'éther en mouvement à la vitesse $\vec{w} = w\vec{e}_x$ uniforme avec $w > 0$ (mouvement appelé "vent d'éther").

Configuration α : l'interféromètre est positionné de telle sorte que le trajet lumineux sur le bras n°1 soit colinéaire au vent d'éther. Le bras n°2 est perpendiculaire à cette direction.

Configuration β : on fait subir à l'ensemble $S =$ Source, interféromètre, observateur une rotation de 90° autour de l'axe (Oz) dans le sens horaire, de telle sorte que ce soit le bras n°2 qui devienne colinéaire au vent d'éther.

FIGURE 1 – Schéma de l'interféromètre de Michelson dans la configuration α

L'interféromètre est dans la configuration α (FIGURE 1). On appelle A_1 , un point quelconque entre O et H_1 sur le trajet lumineux aller du bras n°1 et R_1 un point sur le trajet retour. On note de même A_2 et R_2 deux points entre O et H_2 sur les trajets aller et retour du bras n°2. En utilisant l'indice $i = 1$ ou 2 pour indiquer la voie de l'interféromètre et l'indice $\varepsilon = a$ ou r pour indiquer le sens aller ou retour, on note $\vec{v}_{\varepsilon i}$ la vitesse de la lumière dans (R_{obs}) et $\vec{c}_{\varepsilon i}$ sa vitesse dans (R_{eth}). Par souci de lisibilité, les quatre points A_1, A_2, R_1 et R_2 et les vitesses $\vec{v}_{\varepsilon i}$ ont été représentées hors des trajets des rayons lumineux.

Q.1 Reproduire la FIGURE 1 et la compléter en dessinant les "triangles des vitesses" reliant les vecteurs $\vec{v}_{\varepsilon i}$, $\vec{c}_{\varepsilon i}$ et \vec{w} aux points A_1, A_2, R_1 et R_2 en supposant qu'une loi de composition galiléenne des vitesses s'applique. Attribuer à chaque expression fournie ci-dessous la norme $v_{\varepsilon i}$ correspondante :

$$c - w \quad ; \quad \sqrt{c^2 - w^2} \quad ; \quad c + w \quad ; \quad \sqrt{c^2 + w^2}$$

Q.2 En déduire l'expression de la différence $\tau(\alpha) = \tau_2(\alpha) - \tau_1(\alpha)$ des durées de parcours de la lumière arrivant à l'oculaire en suivant la voie 1 (respectivement 2) dans la configuration α . Faire un développement limité de $\tau(\alpha)$ à l'ordre 2 en $\frac{w}{c}$. Donner alors l'expression de l'ordre d'interférence $p(\alpha)$ en fonction de la fréquence ν , de L , de c et du rapport $\frac{w}{c}$ (on rappelle que l'ordre d'interférence de deux signaux lumineux cohérents entre eux et présentant un déphasage φ est égal à $\frac{\varphi}{2\pi}$).

Q.3 Avec le moins possible de calculs, donner de même les expressions :

- de la différence $\tau(\beta) = \tau_2(\beta) - \tau_1(\beta)$ des durées de parcours de la lumière arrivant à l'oculaire en suivant la voie 1 (respectivement 2) dans la configuration β ;
- du développement limité de $\tau(\beta)$ à l'ordre 2 en $\frac{w}{c}$;
- de l'ordre d'interférence $p(\beta)$ en fonction de ν, L, c et du rapport $\frac{w}{c}$.

- Q.4** Soit $\Delta p = p(\beta) - p(\alpha)$ la variation de l'ordre d'interférence produite lors du passage de l'interféromètre de la configuration α à la configuration β . Montrer que $\Delta p = 2L \frac{\nu}{c} \left(\frac{w}{c}\right)^2$.
- Q.5** De manière à visualiser un petit nombre de franges d'interférence à l'oculaire micrométrique, on règle l'interféromètre en coin d'air à partir de la configuration α en opérant une toute petite rotation du miroir M_1 autour de son diamètre H_1z . La figure d'interférences se présente alors comme un ensemble de franges rectilignes parallèles équidistantes d'interfrange i . En supposant la variation Δp de l'ordre d'interférence obtenue à la question précédente inchangée par ce nouveau réglage, indiquer quelle modification de la figure d'interférences est attendue lors du passage de la configuration α à la configuration β . Exprimer cette modification à l'aide de Δp et i .
- Q.6** En faisant l'hypothèse d'un éther immobile dans le référentiel héliocentrique et ne subissant aucun effet d'entraînement par l'atmosphère terrestre, Michelson et Morley comptaient observer cette modification avec une vitesse de vent d'éther de norme $w = 30,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ environ.
- Rappeler la définition du référentiel héliocentrique.
 - Énoncer, sans les démontrer, les trois lois de Képler pour une planète autour du Soleil.
 - Expliquer à quelle caractéristique terrestre correspond la valeur $w = 30,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ escomptée par Michelson et Morley. Retrouver cette valeur à partir de G (constante de Newton), M_S (masse du Soleil) et T_{an} (durée de l'année terrestre). Faire l'application numérique avec $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ et $T_{an} = 365,25$ jours.
- Q.7** Pour passer de la configuration α à la configuration β , Michelson et Morley avaient monté leur interféromètre sur une table en granit posée au-dessus d'un flotteur en bois sur un bain de mercure, ce qui leur permettait d'opérer une rotation de l'ensemble en toute simplicité. Une grande longueur des bras de l'interféromètre (obtenue par un rallongement des trajets à l'aide de plusieurs jeux de miroirs) et un oculaire micrométrique avaient été prévus afin d'assurer une détection confortable des modifications attendues de la figure d'interférences. La sensibilité du dispositif était de l'ordre du centième d'interfrange.
- Avec $w = 30,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, $L = 11,2 \text{ m}$ et $\nu = 4,57 \times 10^{14} \text{ Hz}$, donner la valeur numérique de Δp , variation de l'ordre d'interférence escomptée par Michelson et Morley, exprimée précédemment. Commenter.
- Q.8** Donner une estimation numérique de la vitesse d'éther minimale que le dispositif permettait de mesurer a priori. Quelle(s) objection(s) aurait-on pu faire quant au résultat de l'expérience finalement annoncé négatif par Michelson et Morley? Pourquoi l'expérience fut-elle reconduite à différents moments de l'année?

Le résultat négatif de l'expérience de Michelson et Morley a révélé la mise en défaut de la transformation de Galilée. Cette dernière conduit également à des lois erronées de changement de référentiel pour le champ électromagnétique. C'est l'objet de la partie II – ci-après.

II – Électromagnétisme et relativité

Soit (R') un référentiel en translation rectiligne uniforme à la vitesse \vec{V}_e par rapport à un référentiel (R) . Un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) est présent dans (R) .

- Q.9** Rappeler l'expression de la force électromagnétique exprimant l'action du champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) sur une particule de charge q animée d'une vitesse \vec{v} dans (R) .
- Q.10** Expliciter la formule de transformation galiléenne des vitesses reliant la vitesse \vec{v}' de la particule dans (R') à sa vitesse \vec{v} dans (R) et à \vec{V}_e .

Q.11 Dans (R') , le champ électromagnétique précédent est caractérisé par les champs (\vec{E}', \vec{B}') . En utilisant l'invariance de la force électromagnétique entre les référentiels (R) et (R') , montrer que la loi de composition des vitesses utilisée à la question précédente est compatible avec les lois suivantes de transformation « classique » des champs :

$$\begin{cases} \vec{E} &= \vec{E}' - \vec{V}_e \wedge \vec{B}' \\ \vec{B} &= \vec{B}' \end{cases}$$

On considère, dans le vide, un fil rigide rectiligne cylindrique de rayon a et infiniment long, chargé avec une densité volumique ρ_f uniforme (FIGURE 2). On note $\lambda_f = \pi a^2 \rho_f$ la densité linéique de charge et (R') le référentiel du fil. La direction du fil est confondue avec l'axe (Oz) d'un référentiel (R) dans lequel le fil est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V}_e = V_e \vec{e}_z$. On repère un point M à l'extérieur du fil par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) (avec $r > a$). On note ε_0 la permittivité diélectrique et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

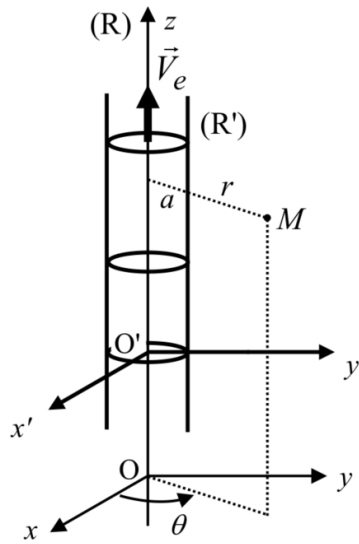


FIGURE 2 – Fil chargé en mouvement à la vitesse \vec{V}_e dans (R)

On cherche à calculer les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} créés par le fil dans (R) en tout point à l'extérieur du fil, à partir de leurs homologues \vec{E}' et \vec{B}' dans (R') .

Q.12 Justifier que $\vec{B}' = \vec{0}$. En déduire \vec{B} d'après les lois « classique » de transformation des champs.

Q.13 Par l'application du théorème de Gauss, calculer \vec{E}' à l'extérieur du fil. En déduire \vec{E} .

Q.14 Quelle est, en fonction de λ_f et V_e , l'expression de l'intensité du courant électrique vue par un observateur dans (R) ? À l'aide du théorème d'Ampère, exprimer \vec{B} . Commenter par rapport à ce qui précède.

En fait, les lois de transformation des champs selon la relativité restreinte sont les suivantes :

$$\begin{cases} \vec{E}_{\parallel} &= \vec{E}'_{\parallel} \\ \vec{E}_{\perp} &= \gamma \left(\vec{E}'_{\perp} - \vec{V}_e \wedge \vec{B}'_{\perp} \right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{B}_{\parallel} &= \vec{B}'_{\parallel} \\ \vec{B}_{\perp} &= \gamma \left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} \vec{V}_e \wedge \vec{E}'_{\perp} \right) \end{cases}$$

avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_e^2}{c^2}}}$ et où l'indice \parallel désigne la composante des champs dans la direction définie par \vec{V}_e et l'indice

\perp leur composante perpendiculaire à \vec{V}_e . Avec ces notations, on a donc $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ et $\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}$.

- Q.15** En utilisant ces lois de transformation et en considérant exacts les champs \vec{E}' et \vec{B}' obtenus précédemment, donner les expressions correctes des champs \vec{E} et \vec{B} .
- Q.16** Quelle est alors, en fonction de λ_f et γ , la valeur de la densité linéique de charge λ vue par un observateur dans (R) ? Ce résultat correspond-il à une contraction ou à une dilatation des longueurs si on considère qu'il y a conservation de la charge électrique?

En 1924, la théorie de la relativité restreinte a presque vingt ans, mais les physiciens n'ont toujours pas tranché définitivement la question de l'éther, surtout qu'en 1913, un jeune physicien français, Georges Sagnac, découvre un effet qui va relancer le débat : en faisant circuler sur un même trajet fermé, mais en sens inverse, deux rayons lumineux émis à partir d'une source, Sagnac mesure un décalage des franges d'interférences lorsque le plateau sur lequel repose l'ensemble du dispositif est mis en rotation à la vitesse de quelques tours par seconde. Le décalage mesuré est proportionnel à la vitesse angulaire du plateau et à l'aire de la boucle suivie par la lumière. Cet effet, qui semble révéler une anisotropie de la vitesse de la lumière dans un référentiel en rotation, serait-il la preuve tant attendue de l'existence de l'éther? Michelson, Gale et Pearson mettent alors sur pied une version modifiée de l'expérience de 1887 dans le but de tester les deux théories (éther luminifère et relativité restreinte) en mesurant l'effet Sagnac dû à la rotation de la Terre. Cette rotation étant bien plus lente que la rotation du plateau utilisé par Sagnac, il fallait construire un interféromètre aux dimensions "gigantesques". La partie III – traite de cette expérience "hors normes".

III – L'expérience de Michelson-Gale-Pearson (1924) : mesure de l'effet Sagnac

La Terre est supposée sphérique de rayon R_T et animée d'un mouvement de rotation uniforme d'Ouest en Est autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_T$. Seul l'hémisphère nord a été représenté en FIGURE 3. Un point quelconque sur cet hémisphère est repéré par ses coordonnées géographiques : latitude φ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$) comptée à partir de l'équateur vers le Nord et longitude θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) comptée à partir du méridien de Greenwich vers l'Ouest.

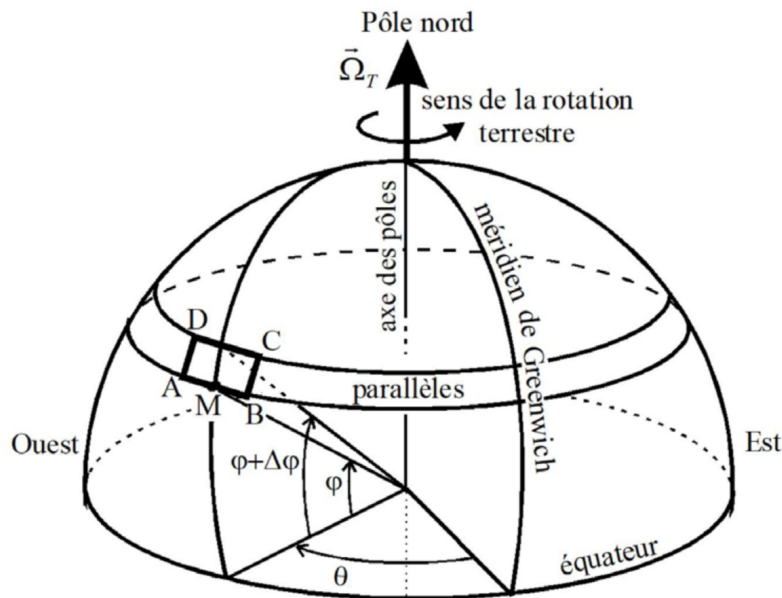


FIGURE 3 – Coordonnées géographiques d'un point M dans l'hémisphère nord et interféromètre de Michelson-Gale-Pearson à boucle rectangulaire $ABCD$

- Q.17** Rappeler la définition du référentiel géocentrique (R_g) . Quel est le mouvement de la Terre dans (R_g) ? Relier la norme Ω_T du vecteur $\vec{\Omega}_T$ à la durée T_j du jour terrestre.

Dans cette partie, on fait l'hypothèse d'un éther immobile dans (R_g) et on étudie les effets du "vent d'éther" dus à la rotation terrestre.

Q.18 Dans quelle direction et dans quel sens "souffle le vent d'éther" pour un observateur terrestre ? On note $\vec{w}(\varphi) = w(\varphi)\vec{e}$ la vitesse du vent d'éther à la latitude φ , avec \vec{e} le vecteur unitaire adéquat de sorte que $w(\varphi)$ soit positive. Exprimer $w(\varphi)$ en fonction de R_T , Ω_T et φ .

La FIGURE 4 représente schématiquement le dispositif de Michelson-Gale-Pearson utilisé en 1924. Celui-ci s'inspire de l'interféromètre à boucle fermée utilisé par Sagnac en 1913.

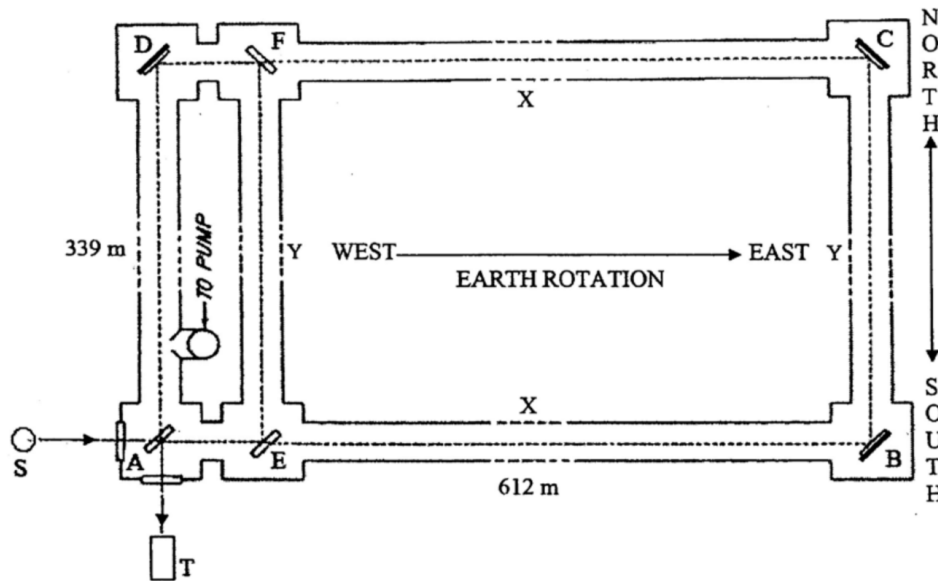


FIGURE 4 – Schéma de l'interféromètre utilisé dans l'expérience de Michelson-Gale-Pearson

Il s'agit d'un interféromètre à boucle rectangulaire, de largeur $Y = AD = BC = 339\text{ m}$ et de longueur $X = AB = DC = 612\text{ m}$ installé sur un vaste champ à Clearing, en Illinois. Les côtés longs, AB et DC , de ce rectangle sont dirigés d'Ouest en Est, en suivant deux parallèles de latitudes respectives φ et $\varphi + \Delta\varphi$ (FIGURE 3). Les petits côtés AD et BC qui complètent le rectangle occupent la direction Sud-Nord locale.

Cette "piste" rectangulaire était conçue à partir de tubes en fonte hermétiquement liés, dans lesquels un dispositif de pompage avait été prévu pour assurer un vide de bonne qualité.

On peut remarquer dans la partie gauche de la FIGURE 4 un tube supplémentaire EF , formant avec AD une boucle rectangulaire $Aefd$ d'aire beaucoup plus petite que le rectangle principal $ABCD$. Nous évoquerons plus loin le rôle de ce rectangle secondaire.

Aux sommets A , E et F , sont placées des lames semi-réfléchissantes orientées à 45° par rapport aux côtés et en B , C et D se trouvent trois miroirs plans également inclinés à 45° afin d'assurer des trajets lumineux parallèles aux axes de symétrie des tubes. Pour simplifier l'étude, on considèrera que les lames ont toutes une épaisseur nulle.

Un rayon de lumière issu d'une source S est divisé en deux rayons, l'un transmis et l'autre réfléchi par la lame A . Les deux rayons de lumière sont ainsi injectés en sens inverse le long du rectangle $ABCD$, en se réfléchissant sur les miroirs aux coins B , C et D , pour revenir sur la lame A et finalement interférer dans le plan focal image de l'objectif d'un télescope T .

- Q.19** a) On note τ_0 la durée que met la lumière à parcourir la distance cumulée $2Y$ entre les deux latitudes φ et $\varphi + \Delta\varphi$ (il est inutile de chercher à déterminer sa valeur). À l'aide de deux lois de composition galiléenne des vitesses aux latitudes φ et $\varphi + \Delta\varphi$, exprimer en fonction de τ_0 , c , X et des composantes de vitesse du vent d'éther $w(\varphi)$ et $w(\varphi + \Delta\varphi)$, la durée de parcours τ_1 de la lumière dans son trajet $ABCD$.
- b) Faire le développement limité de τ_1 à l'ordre 1 en $\frac{w(\varphi)}{c}$ et en $\frac{w(\varphi + \Delta\varphi)}{c}$, puis à l'ordre 1 en $\Delta\varphi$ (on rappelle que $w(\varphi + \Delta\varphi) \approx w(\varphi) + \dot{w}(\varphi)\Delta\varphi$ où $\dot{w}(\varphi)$ désigne la dérivée de $w(\varphi)$). En faisant apparaître Y , établir que la durée τ_1 peut s'écrire sous la forme

$$\tau_1 = \tau_0 + \frac{2X}{c} + \frac{\Omega_T X}{c^2} f(Y, \varphi)$$

dans laquelle on explicitera $f(Y, \varphi)$.

- c) Exprimer de même la durée de parcours τ_2 de la lumière effectuant le trajet $ADCBA$ en fonction de τ_0 , c , X , $w(\varphi)$ et $w(\varphi + \Delta\varphi)$. Un calcul non demandé analogue à celui de la question précédente conduit à $\tau_2 = \tau_0 + \frac{2X}{c} - \frac{\Omega_T X}{c^2} f(Y, \varphi)$.

- Q.20** On suppose la lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 . On note $\Omega_n = \Omega_T \sin \varphi$ la composante du vecteur $\vec{\Omega}_T$ sur la direction de la normale au plan $ABCD$ orientée vers le ciel (zénith local) et $S = XY$ l'aire du rectangle $ABCD$ délimité par le trajet lumineux. Établir que le déphasage $\Delta\Phi$ entre les deux rayons lumineux à leur arrivée en A est $\Delta\Phi = \frac{4\pi}{\lambda_0 c} S \Omega_n$.

- Q.21** Quel est l'ordre d'interférence p correspondant ?

- Q.22** Dans l'expérience de Sagnac, un décalage des franges (donc une variation Δp de l'ordre d'interférence) est observé par rapport à la situation où le plateau est immobile. Quelle est la difficulté de la mesure d'une variation Δp dans le cas de la Terre sur le même principe ? Expliquer le rôle du rectangle $AEFD$, d'aire beaucoup plus petite que S .

- Q.23** On donne $\varphi = 41^\circ 48' \text{N}$, $\lambda_0 = 0,500 \mu\text{m}$ et $\Omega_T = 7,29 \times 10^{-5} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer Δp .

L'expérience de 1924 a donné $(\Delta p)_{exp} = 0,26\dots$. L'effet Sagnac dû à la rotation de la Terre existe donc bel et bien, mais seule la relativité peut en donner le calcul correct.

Formulaire

- Développements limités à l'ordre 2 au voisinage de zéro de deux fonctions utiles :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$$

$$(1+x)^\gamma = 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} x^2 + o(x^2)$$

- Relations de trigonométrie :

$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

Exercice 2 : Étude d'une pièce sur un plateau

Dans tout le problème, le référentiel terrestre (\mathcal{R}_0) est supposé galiléen et on le munit du repère d'espace (O, x_0, y_0, z_0) de vecteurs unitaires $(\vec{u}_{x_0}, \vec{u}_{y_0}, \vec{u}_{z_0})$ et tel que (Oz_0) soit la verticale ascendante. Par rapport à ce référentiel, on considère un disque \mathcal{D} horizontal en acier, de rayon R et de centre O pouvant tourner autour de l'axe vertical (Oz_0) passant par son centre O . On désigne par $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_{z_0}$ le vecteur rotation du disque dans \mathcal{R}_0 . Le disque se situe à une hauteur h du sol horizontal. On note $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ le référentiel lié au disque, associé à la base de projection $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Le mouvement de rotation du disque par rapport à (\mathcal{R}_0) est repéré par l'angle $\varphi = (\vec{u}_{x_0}, \vec{u}_x)$, orienté de \vec{u}_{x_0} vers \vec{u}_x (voir FIGURE 5). On choisit les axes x_0 et x confondus à l'instant de la mise en mouvement du disque qui sera pris comme origine des temps ($\varphi(t=0) = 0$ et $\Omega(t=0) = 0$). Le mouvement donné au disque est un mouvement de rotation uniformément accéléré, caractérisé par l'accélération angulaire $\dot{\varphi} = \alpha > 0$.

Le seul champ de forces externe est le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\vec{u}_{z_0}$, supposée uniforme et dirigée selon la verticale descendante.

Le but du problème est l'étude du mouvement d'une pièce de monnaie posée sur le disque (posée à plat donc côté pile ou face et non pas sur la tranche). Cette pièce en cuivre est assimilée à un point matériel M , de masse m . Elle est placée sur le disque avant sa mise en mouvement en $A(a, 0, 0)$ avec $0 < a < R$. Le contact entre M et \mathcal{D} est caractérisé par un coefficient de frottement solide statique μ_s et un coefficient de frottement solide dynamique μ_d . La force de contact entre la pièce et le disque est notée $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ avec $\vec{N} = N\vec{u}_z$ la composante normale et $\vec{T} = T_x\vec{u}_x + T_y\vec{u}_y$ la composante tangentielle.

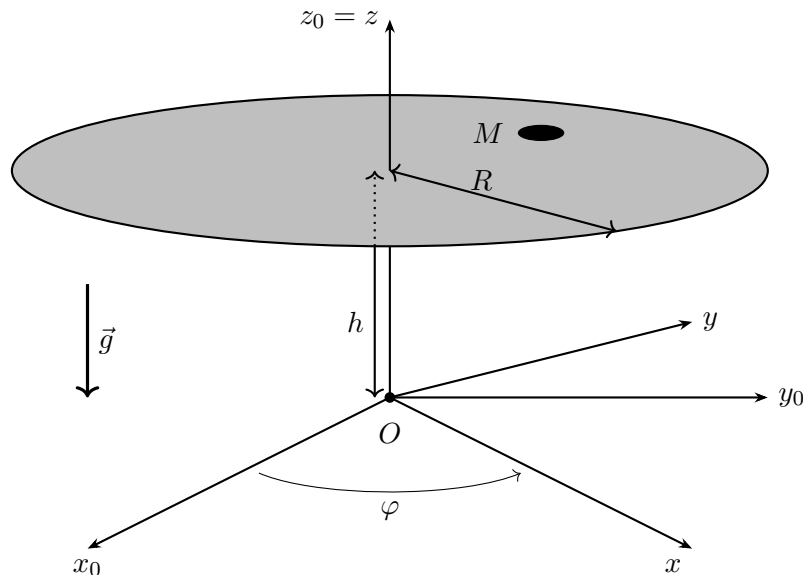


FIGURE 5 – Modélisation du disque en perspective.

Pour les applications numériques, on prendra : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $R = h = 1 \text{ m}$, $a = 0,1 \text{ m}$, $m = 0,01 \text{ kg}$, $\mu_s = 0,53$ et $\mu_d = 0,36$.

I – Mouvement sur le disque

On s'intéresse dans cette partie au mouvement de M dans \mathcal{R} , c'est-à-dire, au mouvement de la pièce par rapport au disque. On note $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$. Le mouvement se décompose en deux parties : la mise en mouvement de la pièce pendant laquelle elle est fixe par rapport au disque puis le glissement de la pièce sur le disque.

I.A Mise en mouvement

Phase précédent le mouvement de la pièce, on suppose dans cette partie que M est immobile dans \mathcal{R} .

- Q.1** Exprimer $\varphi(t)$, $\Omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\Omega}{dt}$ en fonction de α .
- Q.2** Définir la notion de point coïncident. En utilisant les propriétés de ce point, déterminer l'accélération d'entraînement du point M dans \mathcal{R} .
- Q.3** Donner alors l'expression de la force d'inertie d'entraînement centrifuge et de la force d'inertie d'entraînement tangentielle dans \mathcal{R} . Les exprimer en fonction de m , a , α et t . Justifier que la force d'inertie de Coriolis est nulle.
- Q.4** Appliquer vectoriellement le principe fondamental de la dynamique à la pièce M placée en A dans le référentiel \mathcal{R} et en déduire trois équations.
- Q.5** Déterminer l'expression de $\|\vec{T}\|$ au cours du temps.
- Q.6** Rappeler les lois de Coulomb sur le frottement entre deux solides. En déduire la condition pour que M soit en équilibre dans \mathcal{R} au point A .
- Q.7** On souhaite qu'au démarrage du disque (à $t = 0^+$), le point M reste immobile. Exprimer l'accélération maximale α_m du disque pour que cette condition soit réalisée. Réaliser l'application numérique.
- Q.8** On suppose dans cette question $\alpha < \alpha_m$.
- Exprimer, en fonction de α et du rapport $\beta = \frac{\alpha_m}{\alpha}$, le temps t_0 au bout duquel le point M se met en mouvement.
 - Exprimer, en fonction de α et β , la vitesse angulaire de rotation Ω_0 atteinte par le disque lorsque le point M se met en mouvement.
- Q.9** Calculer de même, l'accélération maximale α_1 pour que le point M reste immobile pendant au moins une rotation du disque. Effectuer l'application numérique de α_1 et calculer $\beta_1 = \alpha_m/\alpha_1$.

On suppose désormais, et pour toute la suite que $\alpha \leq \alpha_1$ de sorte que la pièce ne commence à glisser qu'après le premier tour.

- Q.10** Montrer qu'alors β^2 peut être considéré comme grand devant 1.
- Q.11** En déduire une expression approchée de Ω_0 et de t_0 puis faire les applications numériques pour $\alpha = \alpha_1$.
- Q.12** On étudie la réaction tangentielle à la fin de cette première phase c'est-à-dire en $t = t_0^-$. Exprimer T_x et T_y à cet instant. Comparer les deux composantes en exprimant $\left| \frac{T_x}{T_y} \right|$. Effectuer l'application numérique.

I.B Analyse du mouvement

Dès que le point M se met en mouvement, la vitesse de rotation du disque est maintenue constante à la valeur Ω_0 qu'elle avait à ce moment là. Le point M , immobile jusqu'à présent par rapport au disque se trouve toujours

en A .

- Q.13** Donner l'expression des forces d'inertie dans \mathcal{R} (force d'inertie d'entraînement centrifuge et force d'inertie de Coriolis). Donner leur expression dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ en fonction de $m, \Omega_0, x, y, \dot{x}$ et \dot{y} .
- Q.14** Montrer que dans le cas étudié, la composante tangentielle \vec{T} de la réaction du disque s'écrit sous la forme $\vec{T} = Kmg \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ avec \vec{v} la vitesse de M dans \mathcal{R} . Préciser la constante K .
- Q.15** Écrire les équations différentielles du mouvement de M vérifiées par x et y .
- Q.16** En $t = t_0^+$, c'est-à-dire au début de cette phase de mouvement, l'accélération est suivant \vec{u}_x . Déduire des équations précédentes, l'expression de l'accélération initiale. Donner son expression en fonction de $\varepsilon = \mu_s - \mu_d$ et de g . On remarquera que $\Omega_0 \approx \sqrt{\alpha_m}$.

On envisage désormais l'existence d'une rainure sur le disque selon l'axe x . Une pointe au centre de la pièce coulisse dans cette rainure. La pièce est désormais guidée selon l'axe x . On suppose que ce guidage se fait sans frottement supplémentaire dans le sens du mouvement. Le terme de réaction supplémentaire dû au guidage est $\vec{R}' = R'\vec{u}_y$. La réaction due au disque se fait toujours avec frottement, elle s'écrit désormais $\vec{R} = N\vec{e}_z + T\vec{u}_x$ puisque le glissement est selon \vec{u}_x . Le point M est toujours initialement immobile en A et on prend l'origine des temps au démarrage du mouvement de M c'est-à-dire en t_0 .

- Q.17** Appliquer vectoriellement le principe fondamental de la dynamique du point à la pièce M dans le référentiel \mathcal{R} et en déduire trois équations.
- Q.18** Déterminer $x(t)$ et l'exprimer en fonction de a, Ω_0, t et $\delta = a \frac{\mu_d}{\mu_s}$.

Q.19 À quel instant t_1 la pièce arrive-t-elle au bord du disque? Faire l'application numérique avec $\Omega_0 = \sqrt{\alpha_m}$.

Q.20 Déterminer la vitesse v_1 de la pièce lorsqu'elle arrive au bord du disque puis faire l'application numérique.

II – Sortie du disque

On étudie la suite du mouvement dans le cadre du mouvement guidé décrit ci-dessus : pièce guidée selon l'axe x , vitesse de rotation $\Omega = \Omega_0$ du disque constante.

- Q.21** Déterminer la vitesse initiale \vec{V}_1 de M par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ au début de la chute, c'est-à-dire en $t = t_1$. En déduire sa norme et faire l'application numérique.
- Q.22** Exprimer la durée de chute t_c ainsi que la distance D parcourue depuis le bord du disque puis faire les applications numériques.

• • • FIN • • •