

DS 8 (CCINP, Centrale) (4 heures)
Optique, Mécanique, Référentiels non-galiléens

La calculatrice est **autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	Indicateur
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respectés	Palier de Malus	Effet sur la note
0	0	aucun
1–2	1	–3.3%
3–4	2	–6.7%
5–6	3	–10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 : Expérimenter avec un morceau de scotch

Conditionné sous forme de rouleau, un ruban adhésif (généralement désigné par le terme "Scotch®") est constitué de deux couches solidaires l'une de l'autre : une couche *molle* sur la face interne (celle qui colle) et une couche *dure* sur la face externe du rouleau (qui paraît néanmoins souple car très fine). L'épaisseur de l'ensemble est de l'ordre de quelques dizaines de micromètres. On propose d'étudier dans ce problème quelques expériences mettant en jeu les propriétés –adhésives ou autres –des rubans adhésifs.

Ce problème est accompagné d'une annexe (à rendre avec la copie) qui regroupe certaines données numériques. Les deux parties sont indépendantes entre elles.

I – Pelage d'un ruban adhésif collé sur un substrat plan

I.A Principe de l'essai de pelage

Pour tester les propriétés d'adhésion d'un ruban adhésif, on réalise généralement des essais de pelage. Pour cela, on commence par coller le ruban adhésif à tester sur un support rigide. Puis on mesure la force $F_p = \|\vec{F}_p\|$ qu'il est nécessaire d'appliquer à l'extrémité du ruban pour le décoller du support tout en maintenant un angle θ constant entre le support et la portion de ruban décollée (FIGURE 1).

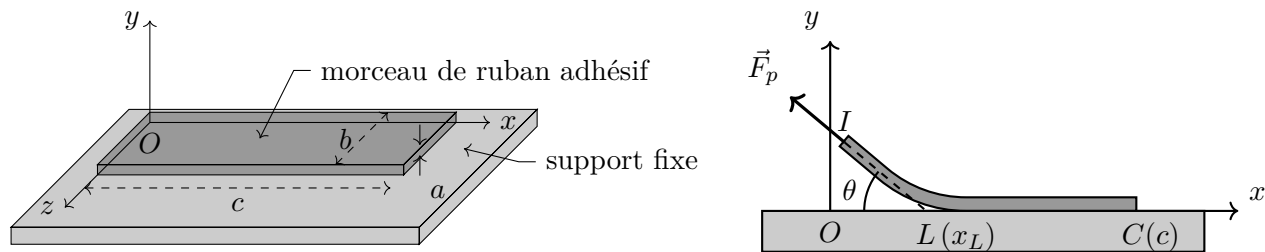


FIGURE 1 – Positionnement du ruban adhésif sur le support avant l'essai de pelage (gauche). Schéma de principe et paramétrage de l'essai de pelage; x_L désigne l'abscisse du front de pelage (droite).

- Q.1** Au niveau microscopique, les interactions qui permettent l'adhésion du ruban sur le support sont des liaisons de van der Waals. Citer un autre type de liaison chimique et comparer qualitativement l'énergie de liaison de ce type de liaison à celle d'une liaison de van der Waals.
- Q.2** En première approximation, la force de van der Waals entre deux molécules distantes de r dérive du potentiel de Lennard-Jones $E_{LJ}(r) = \frac{\alpha}{r^{12}} - \frac{\beta}{r^6}$, où α et β sont deux constantes positives.
- Identifier, en justifiant la réponse, le caractère attractif ou répulsif de chacun des deux termes figurant dans cette expression.
 - Représenter l'allure de E_{LJ} en fonction de r . Indiquer graphiquement à quoi correspond l'énergie de liaison entre les deux molécules.
 - Justifier qualitativement que le travail W_{adh} que doit fournir l'opérateur pour décoller le ruban adhésif du support est proportionnel à l'aire A de la surface de contact entre le ruban et son support.

Pour la suite du problème, on note $W_{adh} = \gamma A$, où γ est une constante positive caractéristique du ruban et du support mis en contact.

- Q.3** On considère dans cette question que le décollement se fait de façon quasi-statique et que le ruban est parfaitement inextensible. Le problème étant invariant par translation selon Oz , on raisonne dans le plan Oxy . On rappelle que l'angle θ reste constant au cours de cette opération.
- Exprimer le déplacement élémentaire $d\vec{\ell}_I$ du point I (point d'application de la force $\vec{F}_p$) lorsque le front de pelage (FIGURE 1) progresse de dx_L , ainsi que le travail δW_p de la force de pelage associé à cette progression.

b) En déduire l'expression de la force de pelage F_p en fonction de γ , b et θ .

Le dispositif utilisé en pratique est représenté sur la FIGURE 2. Le pelage est réalisé au moyen d'une tige horizontale, de rayon r_0 , en rotation autour de son axe, et sur laquelle s'enroule le ruban au cours de l'essai (l'axe de la tige est fixe dans le référentiel du laboratoire et situé à une hauteur ℓ_0 au-dessus du support). Le support sur lequel est collé l'autre extrémité du ruban est animé d'un mouvement de translation horizontale à la vitesse constante $\vec{V}_0$ dans le référentiel du laboratoire.

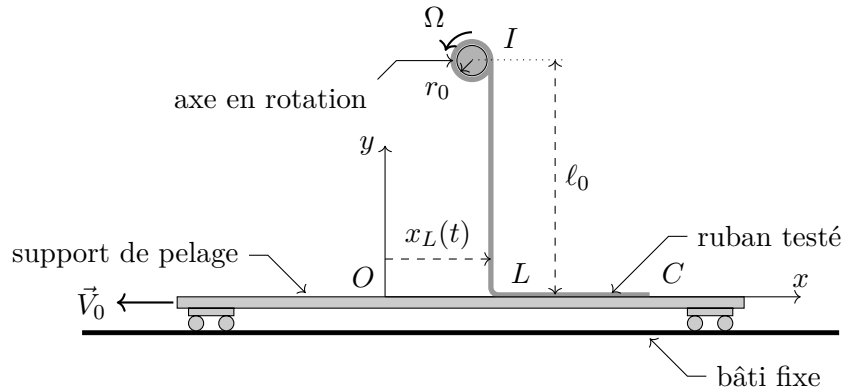


FIGURE 2 – Schéma du dispositif pratique utilisé pour l'essai de pelage. Le repère Oxy est lié au support de pelage. Les points I et L correspondent aux limites entre les parties collée et décollée du ruban

- Q.4** Le repère Oxy étant lié au support, quelle loi d'évolution $x_L(t)$ devrait-on observer si l'angle θ reste constant ?
- Q.5** On rappelle que le ruban est supposé inextensible. Comment doit-on choisir Ω et $\|\vec{V}_0\|$ pour maintenir un angle de pelage constant au cours de l'essai ?
- Q.6** Initialement, le ruban est positionné de sorte à avoir un angle de pelage $\theta \approx 90^\circ$. Commenter ce choix.

I.B Modélisation du comportement dynamique du ruban au cours de l'essai

La loi d'évolution de $x_L(t)$ prévue précédemment n'est pas toujours observée en pratique car le ruban présente un comportement légèrement élastique. Au début de l'essai, le ruban commence en effet par se tendre sans se décoller. Puis, lorsque la tension est suffisante, le décollement se produit brutalement, réduisant par conséquent la tension. Le décollement s'arrête alors spontanément, jusqu'à ce que la poursuite du mouvement tende suffisamment le ruban pour que le décollement reprenne, et ainsi de suite... Ce phénomène périodique, connu sous le nom de stick-slip (ou collé-glissé), est à l'origine du bruit caractéristique du décollement d'un ruban adhésif : scriiich.

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au support de pelage, la dynamique du front de pelage s'apparente à celle du système masse-ressort représenté sur la FIGURE 3. La portion de ruban au contact du support est modélisée par la masse m tandis que la portion décollée du ruban est modélisée par le ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 et dont l'extrémité I est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse $\vec{V}_p = -\vec{V}_0$. L'action du support sur le ruban est modélisée par une force de frottement $\vec{f} = f \vec{u}_x$ obéissant aux lois suivantes :

- la masse m ne glisse pas sur le support tant que $\|\vec{f}\| < F_p$;
- lorsque la masse m glisse sur le support, la force $\vec{f}$ s'oppose au glissement et $\|\vec{f}\| = (1 - \varepsilon) F_p$ (avec ε une constante telle que $0 < \varepsilon < 1$).

On néglige l'action de la pesanteur sur l'évolution du système.

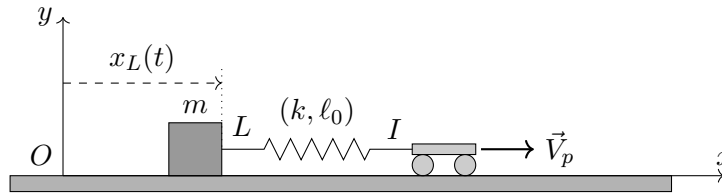


FIGURE 3 – Système modèle pour l'étude du mouvement stick-slip

- Q.7** Le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ lié au support de pelage peut-il être considéré comme galiléen ?
- Q.8** À l'instant $t = 0$, on a $x_L(0) = 0$ et $\ell(0) = \ell_0$. Exprimer la longueur $\ell(t)$ du ressort pour $t > 0$, en fonction de ℓ_0 , $V_p = \|\vec{V}_p\|$, $x_L(t)$ et t .
- Q.9** On suppose de plus que $\dot{x}_L(0) = 0$. Montrer que l'évolution du système pour $t > 0$ commence nécessairement par une phase de stick (le ruban se tend sans se décoller). Déterminer à quel instant t_0 se termine cette phase.
- Q.10** Établir l'équation du mouvement de la masse m lors de la phase suivante (phase de slip). Identifier la pulsation propre ω_0 du système.
- Q.11** La solution de l'équation précédente s'écrit sous la forme

$$x_L(t') = C_1 \cos(\omega_0 t') + C_2 \sin(\omega_0 t') + V_p t' + C_3 \quad \text{avec} \quad t' = t - t_0$$

Déterminer les expressions des constantes C_1 , C_2 et C_3 correspondant à cette phase du mouvement.

Une simulation numérique permet de représenter l'évolution de la solution mathématique $x_L(t')$ précédente pour différentes valeurs de la vitesse de pelage V_p . Les paramètres choisis pour réaliser cette simulation sont :

$$\varepsilon = 0,15 \quad \frac{F_p}{k} = 1,0 \text{ mm} \quad \omega_0 = 1,0 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Les courbes correspondant à $V_p = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $V_p = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ sont reproduites sur les FIGURE A et FIGURE B du document-réponse. Ces courbes sont accompagnées des portraits de phase du système, pour lesquels on représente $v_L(t') = \frac{dx_L}{dt'}(t')$ en fonction de $\ell(t') - \ell_0$.

- Q.12** Faire apparaître, sur chacun des deux portraits de phase du document-réponse, le point représentatif de l'instant $t' = 0$. Indiquer, en le justifiant, quel est le sens de parcours de ces portraits de phase.
- Q.13** En justifiant votre raisonnement par des considérations graphiques précises, indiquer, pour chacune des deux vitesses de pelage, si la phase de slip perdure indéfiniment ou si elle cesse à un instant t'_1 que l'on identifiera clairement sur les courbes.
- Q.14** Dans le(s) cas où la phase de slip cesse, représenter (directement sur les FIGURE A et/ou FIGURE B du document réponse) l'allure de la solution physique $x_L(t')$ réellement obtenue et du portrait de phase associé.

II – Mesure de la biréfringence d'un ruban adhésif

Dans toute cette partie, l'air est assimilé au vide et on note c la célérité de la lumière dans le vide.

II.A Préambule : Mesure d'une différence d'indice optique à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zehnder

On dispose de deux lames transparentes à faces parallèles, de même épaisseur e (connue avec précision) et d'indices optiques différents :

- une lame *de référence* ($\mathcal{L}_0$), d'indice optique n_0 connu ;
- une lame *d'essai* ($\mathcal{L}_e$), d'indice optique $n_e = n_0 + \Delta n$ (avec $\Delta n > 0$).

Afin de mesurer Δn , on place chacune de ces lames dans un des bras d'un interféromètre de Mach-Zehnder (FIGURE 4).

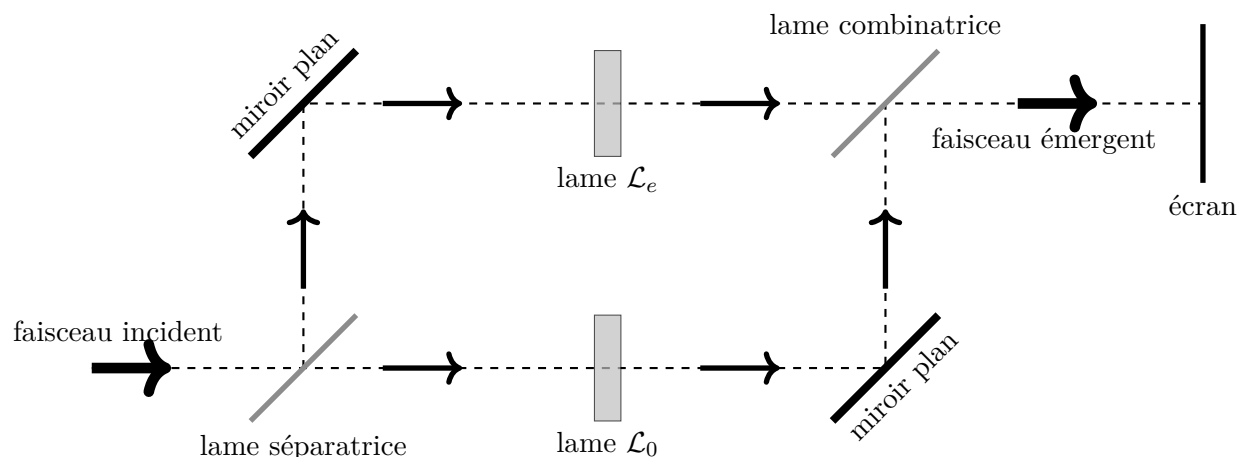


FIGURE 4 – Schéma de principe de l'interféromètre de Mach-Zehnder et placement des lames étudiées.

De façon simple, l'interféromètre de Mach-Zehnder est constituée de deux lames semi-réfléchissantes et de deux miroirs plans (tous ces éléments sont parallèles entre eux). La lame semi-réfléchissante placée en entrée du dispositif est appelée lame séparatrice ; elle permet de diviser le faisceau incident en deux faisceaux secondaires orthogonaux entre eux et de même intensité. Les deux miroirs plans (un dans chaque bras de l'interféromètre) permettent d'orienter les faisceaux secondaires vers la sortie du dispositif. La lame semi-réfléchissante placée en sortie du dispositif, rigoureusement identique à la lame séparatrice, est appelée combinatrice car elle permet de superposer les deux faisceaux secondaires en direction de l'écran (ou d'un photodétecteur).

- Q.15** L'interféromètre de Mach-Zehnder est un interféromètre à division d'amplitude. Citer le nom d'un autre interféromètre de ce type et dater approximativement son invention.
- Q.16** Pourquoi n'est-il pas nécessaire d'accoler une lame compensatrice à la lame séparatrice dans ce dispositif ?
- Q.17** Le faisceau incident est un faisceau de lumière parallèle. On suppose que les deux lames sont orientées de façon à être éclairées sous incidence normale. Déterminer la différence de marche δ entre les deux faisceaux en sortie de l'interféromètre.
- Q.18** Dans le cas où le faisceau incident est monochromatique de longueur d'onde λ , exprimer l'intensité lumineuse I obtenue sur l'écran en sortie du dispositif (on se placera dans le cadre du modèle scalaire de la lumière et on notera I_0 l'intensité lumineuse obtenue sur l'écran en masquant l'un des deux miroirs). Décrire brièvement ce que l'on observe sur l'écran.
- Q.19** Pour quelle(s) longueur(s) d'onde, l'intensité I est-elle maximale ?
- Q.20** Proposer un protocole de mesure de Δn à l'aide de ce dispositif (et de tout le matériel classique d'un laboratoire d'optique).

II.B Propagation d'une onde polarisée à travers un morceau de Scotch®

Le Scotch® est un milieu biréfringent, c'est-à-dire que son indice de réfraction n'est pas unique : il dépend de la direction de polarisation de l'onde lumineuse qui le traverse. Pour la suite, on considère un morceau de Scotch® assimilé à une lame plane à faces parallèles, orthogonales à l'axe Oz , d'épaisseur e . On envoie sur cette lame une onde lumineuse plane, progressive (selon $+Oz$), monochromatique, polarisée rectilignement, et on admet que :

- pour une polarisation rectiligne selon Ox , l'onde se propage à la vitesse $v_0 = \frac{c}{n_0}$ dans la lame, sans changer de direction de polarisation ;
- pour une polarisation rectiligne selon Oy , l'onde se propage à la vitesse $v_e = \frac{c}{n_e}$ dans la lame, avec $n_e = n_0 + \Delta n$, sans changer de direction de polarisation.

Les axes Ox et Oy sont appelés lignes neutres de la lame. L'origine de l'axe Oz est choisie au niveau de la face d'entrée de la lame. On néglige tout phénomène de réflexion partielle au niveau des faces de la lame.

Q.21 En notation complexe, le champ électrique associé à l'onde incidente (dans le domaine $z < 0$) s'écrit $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$, où ω est la pulsation de l'onde et $\vec{E}_0$ un vecteur constant.

- Exprimer le vecteur d'onde $\vec{k}$ correspondant à la situation étudiée.
- Justifier que les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{E}_0$ sont nécessairement orthogonaux entre eux.

Q.22 On suppose dans cette question que l'onde incidente est polarisée rectilignement selon Ox . Expliciter, en notation complexe, le champ électrique associé à l'onde au niveau de la face de sortie de la lame (en $z = e$), puis en un point quelconque du domaine $z > e$.

Q.23 L'onde incidente est désormais polarisée rectilignement selon la première bissectrice des axes Ox et Oy : $\vec{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{u}_x + \vec{u}_y)$ (avec $E_0 = \|\vec{E}_0\|$).

- En admettant que la biréfringence du Scotch® est un phénomène linéaire, donner en notation complexe l'expression du champ électrique obtenu dans le domaine $z > e$.
- Après avoir traversé la lame, l'onde est-elle toujours polarisée rectilignement ?
- Montrer que, si $\Delta n e = p\lambda$ avec p un entier et λ la longueur d'onde de l'onde dans le vide, l'onde émergente est polarisée rectilignement dans la même direction que l'onde incidente.

II.C Analyse d'une expérience

Au cours de l'année scolaire 2011/2012, un groupe de quatre élèves d'une classe de terminale a réalisé une expérience de mesure de la biréfringence d'un ruban adhésif. Le principe de cette mesure est décrit dans le document annexe (situé à l'intérieur du document réponse).

Q.24 Présentation du dispositif.

- Comment peut-on s'assurer expérimentalement qu'un polariseur et un analyseur sont croisés (*i.e.* orientés selon des directions orthogonales entre elles) ?
- Comment procéder pour orienter les lignes neutres du ruban adhésif à 45° par rapport aux axes du polariseur et de l'analyseur ?

Q.25 Étalonnage du spectrogoniomètre.

- En admettant que le réseau est éclairé sous incidence normale tout au long de l'expérience et que les relevés effectués correspondent au spectre d'ordre 1, déterminer le pas a du réseau utilisé.
- En pratique, quelles sont les principales sources d'incertitude sur la valeur de a ainsi obtenue ?

Q.26 Mesure de la biréfringence du Scotch®

- D'après l'étude réalisée dans la partie II.B, à quoi correspondent les *raies d'absorption* observées ?

- b) "En observant les spectres de la lumière après l'analyseur pour une ou deux épaisseurs de Scotch[®], on remarque que les spectres sont continus. On observe à partir de trois épaisseurs une première raie d'absorption." En déduire une estimation de la valeur maximale de Δn sachant que l'épaisseur d'une couche du ruban adhésif utilisé est $e = 28,0 \mu\text{m}$.
- c) À partir des différents résultats présentés dans le document et de ceux établis précédemment, proposer une autre valeur expérimentale de Δn pour le ruban adhésif étudié. Comparer à celle obtenue par les auteurs du document et commenter.

Q.27 Le dispositif {polariseur – ruban adhésif – analyseur} est en fait analogue à l'interféromètre de Mach-Zehnder étudié dans la partie II.A.

- a) À quoi correspondent les deux bras de l'interféromètre? Quel élément permet ici de réaliser la division d'amplitude?
- b) Justifier la partie *en italique* dans l'affirmation suivante : "La plaque de verre est orientée de sorte que les lignes neutres du Scotch[®] soient orientées de 45° par rapport aux axes du polariseur et de l'analyseur (*car c'est dans cette position que les contrastes sont les plus importants*)".

Exercice 2 : Étude d'une pièce sur un plateau

Dans tout le problème, le référentiel terrestre ($\mathcal{R}_0$) est supposé galiléen et on le munit du repère d'espace (O, x_0, y_0, z_0) de vecteurs unitaires $(\vec{u}_{x0}, \vec{u}_{y0}, \vec{u}_z)$ et tel que (Oz) soit la verticale ascendante. Par rapport à ce référentiel, on considère un disque $\mathcal{D}$ horizontal en acier, de rayon R et de centre O pouvant tourner autour de l'axe vertical (Oz) passant par son centre O . On désigne par $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ le vecteur rotation du disque dans $\mathcal{R}_0$. Le disque se situe à une hauteur h du sol horizontal. On note $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ le référentiel lié au disque, associé à la base de projection $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Le mouvement de rotation du disque par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est repéré par l'angle $\varphi = (\vec{u}_{x0}, \vec{u}_x)$, orienté de $\vec{u}_{x0}$ vers $\vec{u}_x$ (voir FIGURE 5). On choisit les axes x_0 et x confondus à l'instant de la mise en mouvement du disque qui sera pris comme origine des temps ($\varphi(t=0) = 0$ et $\Omega(t=0) = 0$). Le mouvement donné au disque est un mouvement de rotation uniformément accéléré, caractérisé par l'accélération angulaire $\ddot{\varphi} = \alpha > 0$.

Le seul champ de forces externe est le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, supposée uniforme et dirigée selon la verticale descendante.

Le but du problème est l'étude du mouvement d'une pièce de monnaie posée sur le disque (posée à plat donc côté pile ou face et non pas sur la tranche). Cette pièce en cuivre est assimilée à un point matériel M , de masse m . Elle est placée sur le disque avant sa mise en mouvement en $A(a, 0, 0)$ avec $0 < a < R$. Le contact entre M et $\mathcal{D}$ est caractérisé par un coefficient de frottement solide statique μ_s et un coefficient de frottement solide dynamique μ_d . La force de contact entre la pièce et le disque est notée $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ avec $\vec{N} = N\vec{u}_z$ la composante normale et $\vec{T} = T_x\vec{u}_x + T_y\vec{u}_y$ la composante tangentielle.

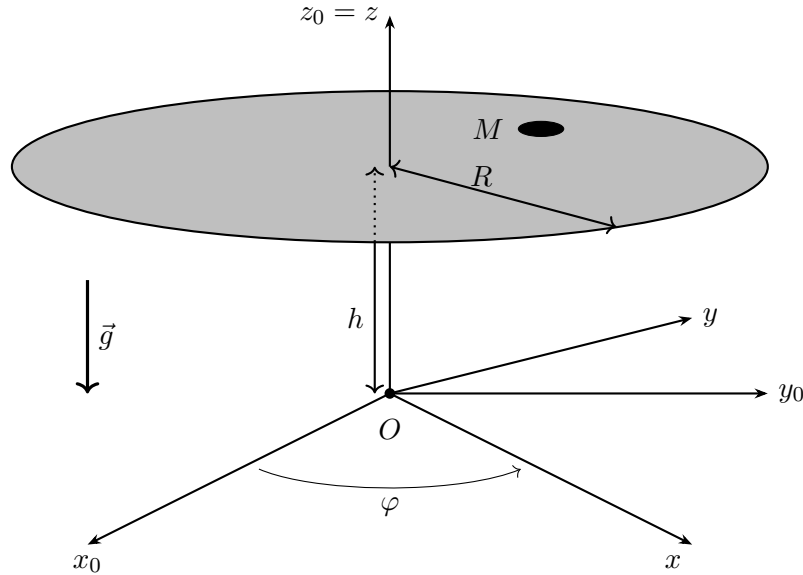


FIGURE 5 – Modélisation du disque en perspective.

Pour les applications numériques, on prendra : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $R = h = 1 \text{ m}$, $a = 0,1 \text{ m}$, $m = 0,01 \text{ kg}$, $\mu_s = 0,53$ et $\mu_d = 0,36$.

I – Mouvement sur le disque

On s'intéresse dans cette partie au mouvement de M dans $\mathcal{R}$, c'est-à-dire, au mouvement de la pièce par rapport au disque. On note $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$. Le mouvement se décompose en deux parties : la mise en mouvement de la pièce pendant laquelle elle est fixe par rapport au disque puis le glissement de la pièce sur le disque.

I.A Mise en mouvement

Phase précédant le mouvement de la pièce, on suppose dans cette partie que M est immobile dans $\mathcal{R}$.

- Q.1** Exprimer $\varphi(t)$, $\Omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\Omega}{dt}$ en fonction de α .
- Q.2** Définir la notion de point coïncident. En utilisant les propriétés de ce point, déterminer l'accélération d'entraînement du point M dans $\mathcal{R}$.
- Q.3** Donner alors l'expression de la force d'inertie d'entraînement centrifuge et de la force d'inertie d'entraînement tangentielle dans $\mathcal{R}$. Les exprimer en fonction de m , a , α et t . Justifier que la force d'inertie de Coriolis est nulle.
- Q.4** Appliquer vectoriellement le principe fondamental de la dynamique à la pièce M placée en A dans le référentiel $\mathcal{R}$ et en déduire trois équations.
- Q.5** Déterminer l'expression de $\|\vec{T}\|$ au cours du temps.
- Q.6** Rappeler les lois de Coulomb sur le frottement entre deux solides. En déduire la condition pour que M soit en équilibre dans $\mathcal{R}$ au point A .
- Q.7** On souhaite qu'au démarrage du disque (à $t = 0^+$), le point M reste immobile. Exprimer l'accélération maximale α_m du disque pour que cette condition soit réalisée. Réaliser l'application numérique.
- Q.8** On suppose dans cette question $\alpha < \alpha_m$.
 a) Exprimer, en fonction de α et du rapport $\beta = \frac{\alpha_m}{\alpha}$, le temps t_0 au bout duquel le point M se met en mouvement.
 b) Exprimer, en fonction de α et β , la vitesse angulaire de rotation Ω_0 atteinte par le disque lorsque le point M se met en mouvement.
- Q.9** Calculer de même, l'accélération maximale α_1 pour que le point M reste immobile pendant au moins une rotation du disque. Effectuer l'application numérique de α_1 et calculer $\beta_1 = \alpha_m/\alpha_1$.

On suppose désormais, et pour toute la suite que $\alpha \leq \alpha_1$ de sorte que la pièce ne commence à glisser qu'après le premier tour.

- Q.10** Montrer qu'alors β^2 peut être considéré comme grand devant 1.
- Q.11** En déduire une expression approchée de Ω_0 et de t_0 puis faire les applications numériques pour $\alpha = \alpha_1$.
- Q.12** On étudie la réaction tangentielle à la fin de cette première phase c'est-à-dire en $t = t_0^-$. Exprimer T_x et T_y à cet instant. Comparer les deux composantes en exprimant $\left| \frac{T_x}{T_y} \right|$. Effectuer l'application numérique.

I.B Analyse du mouvement

Dès que le point M se met en mouvement, la vitesse de rotation du disque est maintenue constante à la valeur Ω_0 qu'elle avait à ce moment là. Le point M , immobile jusqu'à présent par rapport au disque se trouve toujours

en A .

- Q.13** Donner l'expression des forces d'inertie dans $\mathcal{R}$ (force d'inertie d'entraînement centrifuge et force d'inertie de Coriolis). Donner leur expression dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ en fonction de $m, \Omega_0, x, y, \dot{x}$ et $\dot{y}$.
- Q.14** Montrer que dans le cas étudié, la composante tangentielle $\vec{T}$ de la réaction du disque s'écrit sous la forme $\vec{T} = Kmg \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ avec $\vec{v}$ la vitesse de M dans $\mathcal{R}$. Préciser la constante K .
- Q.15** Écrire les équations différentielles du mouvement de M vérifiées par x et y .
- Q.16** En $t = t_0^+$, c'est-à-dire au début de cette phase de mouvement, l'accélération est suivant $\vec{u}_x$. Dédire des équations précédentes, l'expression de l'accélération initiale. Donner son expression en fonction de $\varepsilon = \mu_s - \mu_d$ et de g . On remarquera que $\Omega_0 \approx \sqrt{\alpha_m}$.

On envisage désormais l'existence d'une rainure sur le disque selon l'axe x . Une pièce au centre de la pièce coulisse dans cette rainure. La pièce est désormais guidée selon l'axe x . On suppose que ce guidage se fait sans frottement supplémentaire dans le sens du mouvement. Le terme de réaction supplémentaire dû au guidage est $\vec{R}' = R'\vec{u}_y$. La réaction due au disque se fait toujours avec frottement, elle s'écrit désormais $\vec{R} = N\vec{e}_z + T\vec{u}_x$ puisque le glissement est selon $\vec{u}_x$. Le point M est toujours initialement immobile en A et on prend l'origine des temps au démarrage du mouvement de M c'est-à-dire en t_0 .

- Q.17** Appliquer vectoriellement le principe fondamental de la dynamique du point à la pièce M dans le référentiel $\mathcal{R}$ et en déduire trois équations.
- Q.18** Déterminer $x(t)$ et l'exprimer en fonction de a, Ω_0, t et $\delta = a \frac{\mu_d}{\mu_s}$.
- Q.19** À quel instant t_1 la pièce arrive-t-elle au bord du disque ? Faire l'application numérique avec $\Omega_0 = \sqrt{\alpha_m}$.
- Q.20** Déterminer la vitesse v_1 de la pièce lorsqu'elle arrive au bord du disque puis faire l'application numérique.

II – Sortie du disque

On étudie la suite du mouvement dans le cadre du mouvement guidé décrit ci-dessus : pièce guidée selon l'axe x , vitesse de rotation $\Omega = \Omega_0$ du disque constante.

- Q.21** Déterminer la vitesse initiale $\vec{V}_1$ de M par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ au début de la chute, c'est-à-dire en $t = t_1$. En déduire sa norme et faire l'application numérique.
- Q.22** Exprimer la durée de chute t_c ainsi que la distance D parcourue depuis le bord du disque puis faire les applications numériques.

• • • FIN • • •

Annexe du DS 8 (CCINP, Centrale)
(À détacher et à rendre avec la copie)

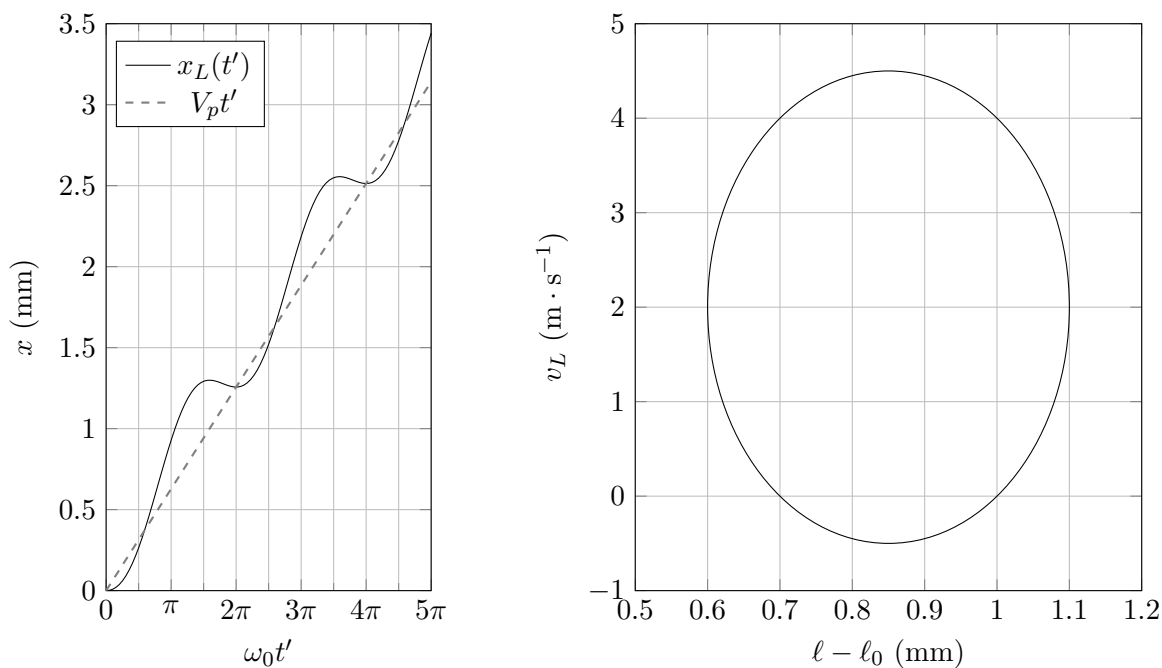


FIGURE A – Résultats de la simulation numérique pour $V_p = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

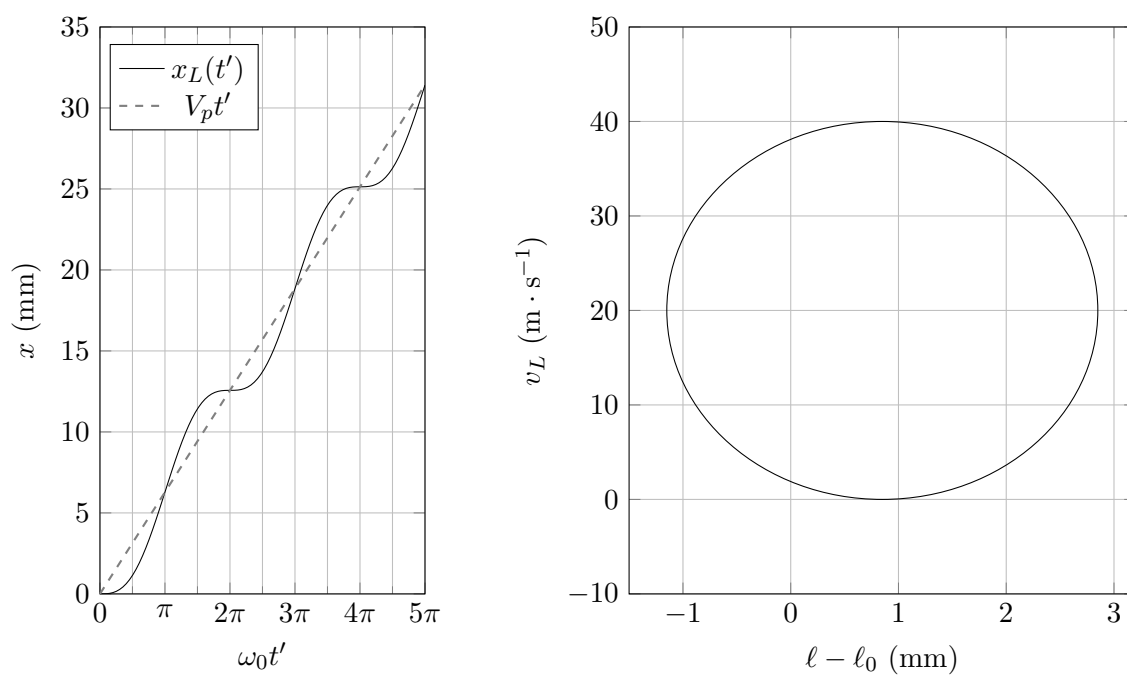


FIGURE B – Résultats de la simulation numérique pour $V_p = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Annexe – Une expérience de mesure de la biréfringence du Scotch[®]

Présentation du dispositif

Afin d'observer le phénomène de biréfringence du Scotch[®], nous avons réalisé une boîte dans laquelle nous avons glissé deux polariseurs croisés de part et d'autre d'une plaque de verre circulaire pouvant pivoter autour d'un axe horizontal. Sur cette plaque de verre est collé du Scotch[®] avec différentes épaisseurs (voir photo ci-dessous). L'ensemble est éclairé par un faisceau parallèle de lumière blanche.

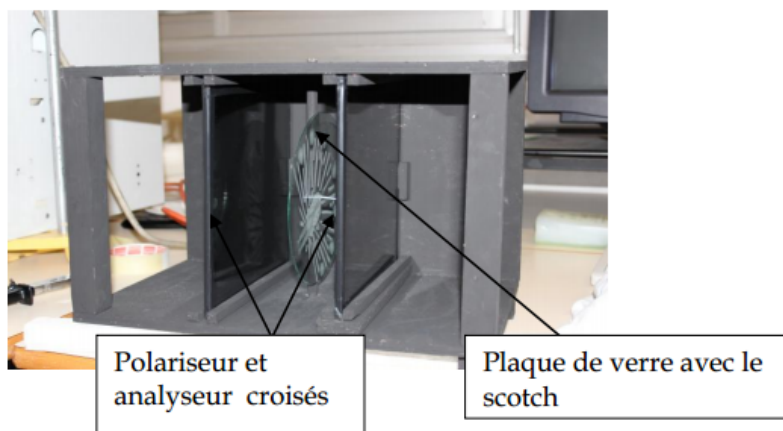


FIGURE C – Notre boîte (la lumière entre par la gauche et sort par la droite).

Nous avons commencé par analyser spectralement la lumière à la sortie de l'analyseur et ce pour une, deux, trois, ..., épaisseurs de Scotch[®]. Pour chaque épaisseur, la plaque de verre est orientée de sorte que les lignes neutres du Scotch[®] soient orientées de 45° par rapport aux axes du polariseur et de l'analyseur (car c'est dans cette position que les contrastes sont les plus importants). Puis nous avons mesuré la différence d'indice entre les deux lignes neutres du Scotch[®].

Observations des spectres

Pour faire cette étude, nous avons utilisé un spectrogoniomètre. La lumière entre dans le collimateur et se dirige vers la plate-forme sur laquelle on place un réseau (ou un prisme) qui décompose la lumière. Le spectre de cette lumière peut ensuite être observé à l'aide d'une lunette. Avec un tel appareil, on peut, en pointant la lunette sur une raie d'émission ou d'absorption, relever la position de cette dernière.

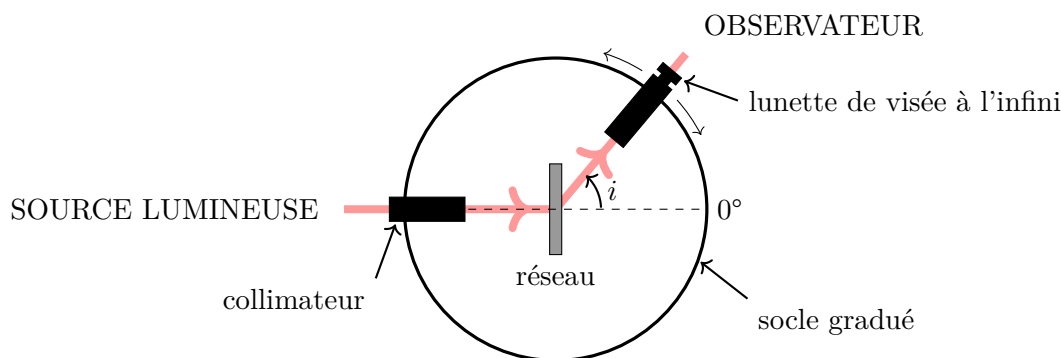


FIGURE D – Schéma du spectrogoniomètre (vue de dessus).

En observant les spectres de la lumière après l'analyseur pour une ou deux épaisseurs de Scotch[®], on remarque que les spectres sont continus. On observe à partir de trois épaisseurs une première raie d'absorption. Nous avons alors décidé de porter le nombre d'épaisseurs de Scotch[®] à dix afin d'observer plusieurs raies d'absorption.

Étalonnage du spectrogoniomètre

Nous avons tout d'abord mesuré avec la graduation du socle les positions des raies d'émission d'une lampe à vapeur de zinc et d'une lampe à vapeur de mercure. Nous avons ensuite calculé le sinus des angles trouvés à l'aide du goniomètre pour chaque raie d'émission et y avons associé les longueurs d'onde correspondantes grâce aux tables de valeurs.

Source	Valeur de l'angle sur le goniomètre (en °)	Sinus de cet angle	Longueur d'onde de la raie d'émission (en nm)
Lampe à vapeur de zinc	16,33	0,281	468,0
	16,48	0,284	472,0
	16,78	0,289	480,0
	22,37	0,380	637,0
Lampe à vapeur de mercure	15,23	0,263	435,8
	19,12	0,328	546,1
	20,23	0,346	576,6
	20,28	0,347	579,1

À l'aide d'un logiciel de traitement des données, nous avons tracé la courbe d'étalonnage du sinus des angles en fonction des longueurs d'onde correspondantes. Cette courbe est une droite.

Mesure de la biréfringence du Scotch®

Nous avons ensuite repris l'analyse spectrale de la lumière sortant de l'analyseur après avoir traversé dix épaisseurs de Scotch®. Nous avons ainsi pu mesurer les valeurs des angles pour les raies d'absorption et avons calculé leur sinus. Grâce à la courbe d'étalonnage nous avons alors déterminé les longueurs d'onde correspondant à ces raies.

Valeur de l'angle sur le goniomètre (en °)	Sinus de cet angle	Longueur d'onde correspondante (en nm)
15,13	0,261	433,4
17,25	0,297	494,9
20,03	0,343	573,2
24,03	0,407	680,0

Grâce à ces mesures nous avons la possibilité désormais de déterminer la différence des indices dans le Scotch®. À l'aide de notre simulation informatique utilisant un logiciel de géométrie dynamique et pour les longueurs d'onde ci-dessus, nous avons recherché la différence d'indice entre l'indice n_0 et l'indice n_e pour laquelle il y a absorption de la radiation par le système {polariseur-Scotch®-analyseur}. Nous avons considéré l'indice n_0 comme égal à 1, et nous avons joué sur la valeur de l'indice n_e jusqu'à obtenir l'extinction de la lumière. Voilà les valeurs obtenues :

Longueur d'onde (en nm)	Indice n_e
433,4	1,0175
494,9	1,0146
573,2	1,012 53
680,0	1,011 18

Nous avons finalement fait la moyenne de toutes ces valeurs, et nous obtenons :

$$\Delta n = n_e - n_0 = 0,0139$$