# FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES : CALCUL DIFFÉRENTIEL (avec réponses)

**CONSEIL POUR RÉUSSIR LA DIGESTION DE CE CHAPITRE : REVOIR TOUTES LES DÉFINITIONS DU CHAPITRE $\boxed{\text{EVN}}$ , SURTOUT NORMES ET CONTINUITÉ.**

• Dans ce chapitre, sauf mention du contraire, **$f$ désignera toujours une fonction d'un ouvert $U$ d'un espace vectoriel quelconque $E$ de dimension $p$ vers un espace vectoriel $F$ de dimension $n$ sur $\boxed{\mathbb{K}=\mathbb{R}}$**. *Très souvent $E$ sera égal à $\mathbb{R}^p$ et $n$ ou $p$ seront égaux à 2 ou 3.*

On comprendra la plupart des résultats de ce chapitre **si et seulement si** , on le comprend dans le cas le cas le plus simple : $\boxed{p=2 \text{ et } n=1}$.

• D'autre part lorsqu'une base $b=(e_1,\dots,e_p)$ de $E$ est fixée, pour un vecteur $x$ de $E$ de coordonnées $(x_1,\dots,x_p)$ dans cette base, on identifie $f(x)=f\Big(\sum\limits_{i=1}^{p} x_i e_i\Big)=f(x_1,\dots,x_p)$.

Autrement dit on identifie $f$ de $E$ dans $F$ avec $f_b$ de $\mathbb{K}^p$ dans $F$ définie par $f_b:(x_1,\dots,x_p)\longmapsto f(\sum\limits_{i=1}^{p} x_i e_i)$.

Cette identification justifie le terme : **"plusieurs variables"** .

**Exemples** :

• $f:\mathbb{R}_2[X]\longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$, $P\longmapsto P'$ sera identifié à $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}_1[X]$, $(x,y,z)\longmapsto y+2zX$ à l'aide de la base $b=(1,X,X^2)$.

• $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$, $A\longmapsto \det A$ sera identifié à $f:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}$, $(x,y,z,t)\longmapsto xt-yz$ à l'aide de la base $b=(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2})$.

## A) APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES - DÉRIVÉE SELON UN VECTEUR

### 1°) *Application différentiable*

***Définition 1***

Soit $f:U\longrightarrow F$ où $U$ est un ouvert de $E$, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $a\in U$. On dit que $f$ est **différentiable** en $a$ s'il existe une **application linéaire** $u\in\mathcal{L}(E,F)$ telle que :

$\boxed{f(a+\vec{h})=f(a)+u(\vec{h})+o(\vec{h})}$ pour $\vec{h}$ qui tend vers $\vec{0}$ dans $E$.

**Remarque 0** : Pourquoi mets on une flèche sur $h$ et pas sur $a$ ? $a$ est "vu" comme un point et $h$ comme un vecteur.

**Remarque 1** : On montre facilement que cette *définition* est **indépendante des normes choisies** sur $E$ et sur $F$ car ils sont de dimension finie et donc que les normes sont toutes 2 à 2 équivalentes.

**Remarque 2** : $u$ est **continue** car linéaire et $E$ de dimension finie.

**Remarque 3** : (rappel **EVN**) $o(\vec{h})=\|\vec{h}\|\varepsilon(\vec{h})$ avec $\lim\limits_{\vec{h}\to 0_E}\varepsilon(\vec{h})=0_F$.

On peut donc aussi noter $f(a+\vec{h})=f(a)+u(\vec{h})+o(\|\vec{h}\|)$.

**Remarque 4** : La relation $f(a+\vec{h})=f(a)+u(\vec{h})+o(\vec{h})$ est appelé DL (**développement limité**) de $f$ en $a$ à l'ordre 1.

**Remarque 5** : $U$ étant ouvert, il existe un réel $r>0$ tel que pour tout $\vec{h}$ de $E$, $\|\vec{h}\|\leqslant r\Longrightarrow a+\vec{h}\in U$.

**Lemme** : $\boxed{u \text{ est } \textbf{unique}}$

*Démonstration 1* : Soit $u$ et $v$ deux applications linéaires telles que pour $\vec{h}$ qui tend vers 0, $f(a+\vec{h})=f(a)+u(\vec{h})+o(\vec{h})=f(a)+v(\vec{h})+o(\vec{h})$ donc $(u-v)(\vec{h})=o(\vec{h})=\|\vec{h}\|\varepsilon(\vec{h})$. Soit $\vec{x}\in E$, fixé quelconque et soit $t>0$, pour $\vec{h}=t\vec{x}$, on a : $(u-v)(t\vec{x})=\|t\vec{x}\|\varepsilon(t\vec{x})=t\|\vec{x}\|\varepsilon(t\vec{x})$ d'où $(u-v)(\vec{x})=\|\vec{x}\|\varepsilon(t\vec{x})$ or $\lim\limits_{t\to0}\varepsilon(t\vec{x})=0$ car $\lim\limits_{\vec{h}\to 0}\varepsilon(\vec{h})=0$ donc $\lim\limits_{t\to 0}(u-v)(\vec{x})=0$ soit $(u-v)(\vec{x})=0$ c'est-à-dire $u(\vec{x})=v(\vec{x})$ et donc $\underline{u=v}$.

***Définition 2*** : $u$ s'appelle $\boxed{\textbf{la différentielle de } f \textbf{ en } a.}$ $u$ est aussi appelée **application linéaire tangente**. Elle est notée $\boxed{\mathrm{d}f(a)}$ ou $f'(a)$ ou $\mathrm{d}f_a$.

$$\text{On a donc} \qquad \boxed{f(a+\vec{h}) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(\vec{h}) + o(\vec{h}) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}f(a) \in \mathcal{L}(E,F)}$$

**Rappel (équa. diff.)** : On note parfois $\mathrm{d}f(a)(\vec{h}) = \mathrm{d}f(a) \cdot \vec{h} = \mathrm{d}f(a)\vec{h}$ .

**Cas où $E = \mathbb{R}$** : Toute fonction linéaire $u$ de $\mathbb{R}$ dans $F$ est de la forme $u : t \longmapsto tb$ avec $b \in F$ et la relation $f(a+h) = f(a) + u(h) + o(h)$ devient $f(a+h) = f(a) + hb + o(|h|)$ et $o(|h|) = o(h)$ d'où $f(a+h) = f(a) + hb + o(h)$ ce qui équivaut à la **dérivabilité de $f$ en $a$** avec $b = f'(a)$.

On a donc $\boxed{f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1) \text{ aussi noté } \mathrm{d}f(a)\cdot 1}$ et $\mathrm{d}f(a) : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow F \\ t \longmapsto tf'(a) \end{cases}$ .

**2°) *Exemples***

a) Déterminer la différentielle en tout point $a = (\alpha, \beta)$ de $\mathbb{R}^2$ de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto xy \end{cases}$

**Réponse** : Soit $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{h} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on cherche à "éclater" $f(a+\vec{h})$ en 3 termes : $f(a)$ , un "morceau" linéaire et un petit o : $f(a+\vec{h}) = (\alpha+u)(\beta+v) = [\alpha\beta] + [\alpha y + \beta x] + [xy]$.

Posons $u : (x,y) \longmapsto \alpha y + \beta x$ et $\varphi(x,y) = xy$. On a clairement $u$ linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que $\varphi(x,y) = o(\vec{h})$ où $\vec{h} = (x,y)$. Prenons la norme infinie canonique de $\mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$, donc : $|\varphi(x,y)| \leqslant \|\vec{h}\|_\infty^2 = o(\|\vec{h}\|_\infty)$.

**Conclusion**: $\boxed{f \text{ est différentiable en } a = (\alpha,\beta) \text{ et } \mathrm{d}f(a) : (x,y) \longmapsto \beta x + \alpha y}$

b) Déterminer la différentielle en tout point $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto M^3 \end{cases}$

**Réponse** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on cherche à "éclater" $f(A+H)$ en 3 termes : $f(H)$ , un "morceau" linéaire et un petit o : $f(A+H) = (A+H)^3 = AAA + AAH + AHA + HAA + AHH + HAH + HHA + HHH$ **attention** : A et H ne commutent pas ! Donc $f(A+H) = [A^3] + [A^2H + AHA + HA^2] + [AH^2 + HAH + H^2A + H^3]$.

Posons $u : H \longmapsto A^2H + AHA + HA^2$ et $\varphi(H) = AH^2 + HAH + H^2A + H^3$.

On montre facilement que $u$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $\varphi(H) = o(H)$.

Prenons une norme d'algèbre quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\varphi(H)| \leqslant 3\|A\|\|H\|^2 + \|H\|^3 = O(\|H\|^2) = o(H)$.

**Conclusion**: $\boxed{f \text{ est différentiable en } A \text{ et } \mathrm{d}f(A) : H \longmapsto A^2H + AHA + HA^2}$

**3°) *Dérivée selon un vecteur***

**L'idée** pour étudier $f$ de $U$ dans $F$ en $a$ est de s'approcher de $a$ selon une direction $\vec{h} \in E$, $\vec{h} \neq 0$. On paramètre la droite passant par $a$ et de direction $\vec{h}$ et on considère $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow F \\ t \longmapsto f(a+t\vec{h}) \end{cases}$

On se ramène donc à l'étude **d'une fonction d'une seule variable**, notion que l'on maitrise beaucoup mieux (dérivation, DL, intégration...)

**Lemme** : $\boxed{\forall a \in U, \quad \forall \vec{h} \in E,\ \vec{h} \neq 0, \quad \exists r > 0 \text{ tel que} \quad \forall t \in [-r,r] \ : \quad a + t\vec{h} \in U.}$

*Démonstration 2* : On munit $E$ d'une norme $\|\|$. Comme $U$ est ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que $\mathcal{B}_F(a, r_0) \subset U$. On a : $\|a + t\vec{h} - a\| = |t| \ \|\vec{h}\|$, donc pour $r = \dfrac{r_0}{\|\vec{h}\|}$, on a : $\forall t \in [-r,r] : |t| \ \|\vec{h}\| \leqslant r_0$ d'où $a + t\vec{h} \in \mathcal{B}_F(a, r_0) \subset U$.

***Définition*** :

Soient $f$ de $U$ dans $F$ et $a \in U$. Soit $\vec{h} \in E$, $\vec{h} \neq 0$.

On dit que $f$ est **dérivable en $a$ selon $\vec{h}$** si $\varphi : \begin{cases} [-r,r] \longrightarrow F \\ t \longmapsto f(a+t\vec{h}) \end{cases}$ est dérivable en $t = 0$.

$\varphi'(0)$ s'appelle alors **la dérivée de $f$ en $a$ selon $\vec{h}$.** On la note $\boxed{\mathrm{D}_{\vec{h}}f(a)}$. On a donc : $\boxed{\mathrm{D}_{\vec{h}}f(a) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \dfrac{f(a+t\vec{h}) - f(a)}{t}}$.

**Exemples** : a) Déterminer la dérivée selon $i$ en tout point $a$ de $\mathbb{C}$ de $f : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto e^z \end{cases}$

**Réponse** : $\varphi(t) = f(a+ti) = e^{a+ti}$ qui est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(t) = ie^{a+ti}$. Donc $\varphi'(0) = ie^a$.

**Conclusion**: $\boxed{\mathrm{D}_i f(a) = e^a i}$.

b) Déterminer la dérivée selon $E_{i,j}$ en tout point $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A \longmapsto A^2 \end{cases}$

**Réponse** : $\varphi(t) = f(A+tE_{i,j}) = (A+tE_{i,j})^2 = A^2 + tAE_{i,j} + tE_{i,j}A + t^2E_{i,j}^2$. Donc $\varphi'(0) = AE_{i,j} + E_{i,j}A$.

**Conclusion**: $\boxed{\mathrm{D}_{E_{i,j}} f(A) = AE_{i,j} + E_{i,j}A}$.

c) Déterminer la dérivée selon $(0,1)$ en tout point $a = (x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto 3xy^2 + x^7 + \sin(xy) \end{cases}$

Que constatez - vous ?

**Réponse** :

On peut dériver $f(\ (x,y)+t(0,1)\ )$ et évaluer en 0, faire un DL de $f(\ (x,y)+t(0,1)\ )$ à l'ordre 1 ou bien "carrément" avec la définition : $\dfrac{f(\ (x,y)+t(0,1)\ ) - f(x,y)}{t} = \dfrac{3x(y+t)^2 + \sin(x(y+t)) - 3xy^2 - \sin(xy)}{t}$

$\underset{t\to 0}{=} \dfrac{3xy^2 + 6xyt + o(t) + \sin(xy+xt)) - 3xy^2 - \sin(xy)}{t} \underset{t\to 0}{=} \dfrac{6xyt + o(t) + \sin(xy)\cos(xt) + \cos(xy)\sin(xt) - \sin(xy)}{t}$

$\underset{t\to 0}{=} \dfrac{6xyt + o(t) + \sin(xy)(1+o(t) + \cos(xy)(xt+o(t)) - \sin(xy)}{t} \underset{t\to 0}{=} \dfrac{6xyt + \cos(xy)xt + o(t))}{t}$

$\underset{t\to 0}{=} 6xy + \cos(xy)x + o(1)) \underset{0}{\longrightarrow} 6xy + \cos(xy)x$, c'est exactement la dérivée partielle bien connue : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

**Proposition** :

> Soit $f : U \longrightarrow F$, $a \in U$, $U$ un ouvert de $E$.
>
> **Si** $f$ est **différentiable** en $a$ **alors** :
>
> i) $f$ est **continue** en $a$ et ii) $f$ est **dérivable selon tout vecteur** $\overrightarrow{h}$ et $\boxed{\mathrm{D}_{\overrightarrow{h}} f(a) = \mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h})}$.

*Démonstration 3* :

i) $f(a+\overrightarrow{h}) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h}) + o(\overrightarrow{h}) \underset{\overrightarrow{h}\to 0}{\longrightarrow} f(a) + \mathrm{d}f(a)(0) + 0 = f(a)$ (car $\mathrm{d}f(a)$ est continue car linéaire en dimension finie). On a donc $f$ continue en $a$.

ii) Soit $\overrightarrow{h_0} \in E$, $\overrightarrow{h_0} \neq 0$. $f(a+t\overrightarrow{h_0}) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(t\overrightarrow{h_0}) + o(\|t\overrightarrow{h_0}\|) = f(a) + t\,\mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h_0}) + \|t\overrightarrow{h_0}\|\varepsilon(t\overrightarrow{h_0}) =$

$= f(a) + t\,\mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h_0}) + |t|\|h_0\|\varepsilon(t\overrightarrow{h_0})$ et donc pour tout $t \neq 0$,

on a : $\dfrac{f(a+th_0) - f(a)}{t} = \mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h_0}) + \dfrac{|t|}{t}\|\overrightarrow{h_0}\|\varepsilon(t\overrightarrow{h_0}) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h_0}) + 0 = \mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h_0})$. Conséquence : $\underline{\mathbf{D}_{\overrightarrow{h_0}} f(a) = \mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h_0})}$.

**Réciproque Fausse** : Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \dfrac{y^2}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ (0,y) \longmapsto 0 \end{cases}$

Montrer que $f$ est dérivable selon toutes les directions en $(0,0)$, que $f$ n'est pas continue en $(0,0)$ et donc non différentiable en $(0,0)$.

Soit $h = (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, étudions pour $t \in [-1,1] - \{0\}$ : $\dfrac{f((0,0)+th) - f(0,0)}{t} = \dfrac{f(t\alpha, t\beta)}{t}$.

**Premier cas** : $\alpha = 0$, on a alors $\dfrac{f((0,0)+th) - f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\rightarrow} 0$

**Deuxième cas** : $\alpha \neq 0$, on a alors $\dfrac{f((0,0)+th) - f(0,0)}{t} = \dfrac{(t\beta)^2}{t \times t\alpha} \underset{t\to 0}{\rightarrow} \dfrac{\beta^2}{\alpha}$

**Conclusion**: $\boxed{f \text{ est dérivable selon toutes les directions en } (0,0)}$.

$u_n = (0,0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ et $f(u_n) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. et $v_n = (\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ et $f(v_n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$.

**Conclusion**: $\boxed{f \text{ n'est pas continue en } (0,0) \text{ et donc non différentiable en } (0,0)}$.

**Définition** : On appelle **ligne de niveau** de la fonction $f$ tout ensemble de la forme $\boxed{X_k = \{M \in U \text{ tel que } f(M) = k\}}$ où $k \in \mathbb{R}$. Tracer $X_k$ pour $k = 0, 1, 2, -1/2$ de l'exemple ci-dessus.

### 4°) *Dérivées partielles*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $E$. On appelle **j-ème dérivée partielle de** $f$ **en** $a$ selon $\mathcal{B}$, la dérivée de $f$ en $a$ selon le vecteur $e_j$.

On la note $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) \text{ ou } \mathrm{D}_j f(a)}$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial j}(a)$ ou $f'_j(a)$. On a donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \dfrac{f(a + te_j) - f(a)}{t}}$.

**Exemples** Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow F$, $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $a = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Alors $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \dfrac{f(\alpha, \beta, \gamma + t) - f(\alpha, \beta, \gamma)}{t}}$.

**Exemple** : Soit $f$ définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par $f(M) = \det M$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial E_{i,j}}(M)$.

**Réponse** :

$$\varphi(t) = \det(A + tE_{i_0,j_0}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & a_{i_0,j_0} + t & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$ que l'on développe par rapport à la $i_0$-ième ligne :

$\det(A + tE_{i_0,j_0}) = c + (-1)^{i_0+j_0}(a_{i_0,j_0} + t)\Delta_{i_0,j_0}$ où $c$ est une constante (tout les autres termes du développement) et $\Delta_{i_0,j_0}$ le mineur du déterminant de $A$ indépendant de $t$. On en déduit que $\varphi'(t) = (-1)^{i_0+j_0}\Delta_{i_0,j_0}$ et donc que $\varphi'(0) = (-1)^{i_0+j_0}\Delta_{i_0,j_0}$. **Conclusion**: $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial E_{i,j}}(M) = (-1)^{i_0+j_0}\Delta_{i_0,j_0}}$ joli, non ?

Pb : **det** est-elle différentiable ? $\det(A + H)$= trichotomie —> lourd !! Heureusement il va y avoir un théorème....

**Expression de la différentielle dans une base**

**Proposition** : Soit $f : U \longrightarrow F$, $U$ un ouvert de $E$, **différentiable** en $a \in U$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $E$. Alors $\forall \overrightarrow{h} \in E$, $\overrightarrow{h} = \sum\limits_{j=1}^{p} h_j e_j$, on a $\boxed{\mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h}) = \sum\limits_{j=1}^{p} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)}$

*Démonstration 4* : $\mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h}) = \mathrm{d}f(a)\left(\sum\limits_{j=1}^{p} h_j e_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{p} h_j \, \mathrm{d}f(a)(e_j)$ car $\mathrm{d}f(a)$ est linéaire. D'après la **proposition** ci-dessus, on a : $\mathrm{d}f(a)(e_j) = \mathrm{D}_j f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, donc $\mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h}) = \sum\limits_{j=1}^{p} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

**Remarque** : Si $f$ de $U \subset E$ dans $F$ est différentiable en tout point de l'ouvert $U$, alors $\mathrm{d}f$ est une application qui va de $U$ dans $\mathcal{L}(E, F)$. Notons $\mathrm{d}x_{j_0}$ l'application qui à $\overrightarrow{h} = \sum\limits_{j=1}^{p} h_j e_j$, associe $h_{j_0}$ (appelée fonction $j_0$-ième coordonnée).

On a alors : $\boxed{\mathrm{d}f(a) = \sum\limits_{j=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, \mathrm{d}x_j}$ **(forme différentielle)**

Autrement dit, $(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_p)$ est la base de $E^*$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1, p]\!]^2$ , $\mathrm{d}x_j(e_i) = \delta_{i,j}$.

## 5°) *Fonction de classe $C^1$*

***Définition*** : Soit $f : U \longrightarrow F$, $U$ un ouvert de $E$.
On dit que $f$ **est de classe $C^1$ ou continument différentiable sur** $U$, si $f$ est différentiable sur $U$ et si $\mathrm{d}f$ est continue sur $U$.

**Théorème fondamental** :

Soit $f : U \longrightarrow F$, $U$ ouvert de $E$, $p = \dim E$. Si **les $p$ dérivées partielles de** $f$ (pour une base $\mathcal{B}_0$ de $E$) sont définies et **continues** sur $U$ , alors $f$ **est différentiable en tout point de** $U$ .

*Démonstration (non exigible) 5* : Faisons-la dans le cas où $\dim E = p = 2$ avec $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$. Soit $a = (\alpha, \beta)$. Soit $h = (h_1, h_2)$. L'idée est de découper $f(a + h) - f(a)$ en $p$ morceaux :

$f(a + h) - f(a) = f(\alpha + h_1, \beta + h_2) - f(\alpha, \beta + h_2) + f(\alpha, \beta + h_2) - f(\alpha, \beta)$

Ensuite on sait que **si** $f$ est différentiable en $a$ **alors** $\mathrm{d}f(a)(h) = h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Donc évaluons $\varphi(h) = f(a+h) - f(a) - \left( h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$.

$\varphi(h) = f(\alpha + h_1, \beta + h_2) - f(\alpha, \beta + h_2) + f(\alpha, \beta + h_2) - f(\alpha, \beta) - \left( h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$

$= \left[ f(\alpha + h_1, \beta + h_2) - f(\alpha, \beta + h_2) - \left( h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) \right) \right] + \left[ f(\alpha, \beta + h_2) - f(\alpha, \beta) - \left( h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) \right) \right]$.

Posons $\varepsilon_1(h) = \left[ f(\alpha + h_1, \beta + h_2) - f(\alpha, \beta + h_2) - \left( h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) \right) \right]$ et $\varepsilon_2(h) = \left[ f(\alpha, \beta + h_2) - f(\alpha, \beta) - \left( h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) \right) \right]$

grâce au **théorème** des accroissements finis il existe $c_1 \in ]\alpha, \alpha + h_1[$ tel que $\varepsilon_1(h) = h_1 \left[ \dfrac{\partial f}{\partial x}(c_1, \beta + h_2) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) \right]$.

Or $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $U$, donc en $a$, d'où : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta_1 > 0$ tel que $\forall (u, v) \in U$ :

$\|(u, v) - (\alpha, \beta)\|_\infty \leqslant \eta_1 \Longrightarrow \left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(u, v) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) \right| \leqslant \varepsilon$

Donc pour $|h_1| \leqslant \eta_1$ et $|h_2| \leqslant \eta_1$, on a $|c_1 - \alpha| \leqslant \eta_1$ d'où $|\varepsilon_1(h)| \leqslant \varepsilon \times |h_1| \leqslant \varepsilon \times \|(h_1, h_2)\|_\infty$

On fait exactement pareil pour $\varepsilon_2(h)$ d'où il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour $|h_1| \leqslant \eta_2$ et $|h_2| \leqslant \eta_2$, on a $|c_2 - \beta| \leqslant \eta_2$ d'où $|\varepsilon_2(h)| \leqslant \varepsilon \times |h_2| \leqslant \varepsilon \times \|(h_1, h_2)\|_\infty$. <u>**Conséquence**</u> : Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, pour $|h_1| \leqslant \eta$ et $|h_2| \leqslant \eta$, on a : $|\varepsilon_1(h)| \leqslant \varepsilon \times \|(h_1, h_2)\|_\infty$ et $|\varepsilon_2(h)| \leqslant \varepsilon \times \|(h_1, h_2)\|_\infty$ donc $|\varphi(h)| = \left| f(a+h) - f(a) - \left( h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \right) \right| \leqslant 2\, \varepsilon \times \|(h_1, h_2)\|_\infty$.

Ceci est la *définition* de $f(a+h) - f(a) - \left( h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \right) = o(\|(h_1, h_2)\|_\infty)$ quand $h$ tend vers 0.

<u>**Conclusion**</u> : $f$ est bien **différentiable** en $a = (\alpha, \beta)$.

<u>**Corollaire**</u> : <u>***Définition* "bis" de : $f$ est de classe $C^1$ sur $U$**</u> :

$f$ est de classe $C^1$ sur $U$ **ssi pour toute base** $\mathcal{B}$ de $E$, les dérivées partielles existent et sont continues sur $U$.

<u>*Démonstration 6*</u> : $\Longrightarrow$] Si $f$ est de classe $C^1$ sur $U$ alors elle est différentiable sur $U$ et $\mathrm{d}f$ est continue sur $U$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $E$. $\forall j \in [\![1, p]\!]$, l'application $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ va de $U$ dans $F$ et pour tout $x \in U$,

$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \mathrm{d}f(x)(e_j)$ (démo.3).

Comme $\mathrm{d}f$ est continue sur $U$ et que l'application $\Phi : \mathcal{L}(E, F) \times E \longrightarrow$ , $(u, x) \longmapsto u(x)$ est bilinéaire donc continue, par composition $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ est continue sur $U$.

$\Longleftarrow$] Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $E$ fixée. Par le **théorème fondamental** $f$ est différentiable en tout point de $U$ et donc dérivable en tout point de $U$ selon toutes les directions de $E$, donc dans les directions définies par les vecteurs de la base $\mathcal{B}_0$. Enfin $\mathrm{d}f : U \longrightarrow F$ , $x \longmapsto \mathrm{d}f(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, \mathrm{d}x_j$ . Comme les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ sont continues sur $U$ et $\mathrm{d}x_j$ constante (par rapport à $x$) , par **théorèmes généraux**, $\mathrm{d}f$ est continue de $U$ dans $F$.

<u>**Exemple**</u> : L'application **det** est $C^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>**Réponse**</u> : En effet , on a vu plus haut que les dérivées partielles par rapport à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ existaient et valaient $\dfrac{\partial f}{\partial E_{i,j}}(M) = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(M)$. Toutes ces dérivées partielles sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car l'expression de $\dfrac{\partial f}{\partial E_{i,j}}(M)$ est composées de sommes, différences et produits des éléments de $M$.

Enfin si on note $f(M) = \det M$ , $\mathrm{d}f(M)(H) = \displaystyle\sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} h_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(M) = \mathrm{Tr}(\ H^{\mathbf{T}} \times \mathrm{com}(M)\ )$.

<u>**Exemple important**</u> : <u>**Application linéaire**</u>

<u>**Proposition**</u> : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application **linéaire**. Alors $f$ est de classe $C^1$ sur $E$ et $\forall a \in E$ $\boxed{\mathrm{d}f(a) = f}$

<u>*Démonstration 7*</u> : $f(a+h) - f(a) = f(h) = f(h) + 0 = f(h) + o(h)$ et comme $f$ est linéaire, on a $\mathrm{d}f(a) = f$. Comme $\mathrm{d}f : U \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est constante, elle est continue sur $E$, d'où $f$ est $C^1$ sur $E$.

6°) <u>***Opérations sur les fonctions différentiables et les fonctions de classe $C^1$***</u>.

a) <u>**Opérations algébriques**</u>

<u>**Théorème**</u> : Soient $f, g : U \subset E \longrightarrow F$ différentiables (resp. $C^1$) sur $U$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda f + g$ est différentiable (resp. $C^1$) sur $U$ et $\mathrm{d}(\lambda f + g) = \lambda\, \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$.

*Démonstration 8* :

Soit $a \in U$, posons $u = \mathrm{d}f(a)$ et $v = \mathrm{d}g(a)$. Par trichotomie, $f(a+h) = f(a)+u(h)+o(h)$ et $g(a+h) = g(a)+v(h)+o(h)$ (n'oubliez pas de mettre les petites flèches sur les $h$) . On a alors $(\lambda f+g)(a+h) = (\lambda f+g)(a)+(\lambda u+v)(h)+o(h)$, comme $\lambda u + v$ est linéaire, on en déduit que $\lambda f + g$ est différentiable sur $U$ et pour tout $a \in U$ et tout $x \in E$ , $\mathrm{d}(\lambda f + g)(a)(x) = \lambda\,\mathrm{d}f(a)(x) + \mathrm{d}g(a)(x)$ et donc $\mathrm{d}(\lambda f + g) = \lambda\,\mathrm{d}f + \mathrm{d}g$ qui est bien sûr continue sur $U$ par TG si $f$ et $g$ sont $C^1$ sur $U$. On peut donc conclure que $\lambda f + g$ est $C^1$ sur $U$ si $f$ et $g$ sont $C^1$ sur $U$.

b) **B(f,g)**

**Proposition** :

> Soit $U$ un ouvert de $E$. Soient $f : U \longrightarrow F_1$ et $g : U \longrightarrow F_2$ où $E$, $F_1$ et $F_2$ sont 3 EV.
>
> Soit $B$ une application bilinéaire de $F_1 \times F_2$ dans $G$.
>
> Si $f$ et $g$ sont différentiables (resp. $C^1$) sur $U$, alors $B(f, g)$ est différentiable (resp. $C^1$) sur $U$ et
>
> $\forall a \in U :\ \mathrm{d}B(f, g)(a)(h) = B(\,\mathrm{d}f(a)(h), g(a)) + B(f(a),\, \mathrm{d}g(a)(h))$ .

*Démonstration 9* :

Soit $a \in U$, posons $u = \mathrm{d}f(a)$ et $v = \mathrm{d}g(a)$. Par trichotomie, $f(a + h) = f(a) + u(h) + o(h)$ et $g(a + h) = g(a) + v(h) + o(h)$ (n'oubliez pas de mettre les petites flèches sur les $h$) .

$B(f(a+h), g(a+h)) = B(\ f(a)+u(h)+o(h)\ ,\ g(a)+v(h)+o(h)\ ) = [B(\ f(a), g(a))]+[B(f(a), v(h))+B(u(h), g(a))]+ +[B(f(a) + u(h) + o(h), o(h)) + B(o(\|h\|, g(a) + v(h) + o(h))]$. Il y a bien 9 termes par bilinéarité et 3 paquets (entre $[\ \bullet\ ]$ ) : la constante $B(\ f(a), g(a))$, la partie linéaire et le petit o. Posons : $w(h) = B(f(a), v(h)) + B(u(h), g(a))$ et

$\varphi(h) = [B(f(a) + u(h) + o(h), o(h)) + B(o(\|h\|, g(a) + v(h) + o(h))$. On montre facilement que $w$ est linéaire de $E$ dans $G$. $B$ étant bilinéaire en dimension finie , elle est continue sur $F_1 \times F_2$ et par caractérisation , il existe $k \geqslant 0$ tel que $\forall (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ , $\|B(x_1, x_2)\| \leqslant k\|x_1\| \cdot \|x_2\|$ (attention il y a ici 3 normes différentes notées pareil !)

On en déduit que $\forall h \in E : \|\varphi(h)\| \leqslant k\|f(a) + u(h) + o(h)\| \cdot \|o(h)\| + k\|o(h)\| \cdot \|g(a) + v(h) + o(h)\|$ , d'où par théorème d'encadrement $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} = 0$ : on a donc $\varphi(h) = o(h)$. On peut donc conclure que $B(f, g)$ est différentiable en $a$ et $\mathrm{d}B(f, g)(a)(h) = B(\,\mathrm{d}f(a)(h), g(a)) + B(f(a),\, \mathrm{d}g(a)(h))$ . En particulier si $f$ et $g$ sont de classe $C^1$ sur $U$, alors cette expression est continue sur $U$ par TG et $B(f, g)$ est de classe $C^1$ sur $U$.

**Exemple** : Montrer que $f : A \longmapsto A^{-1}$ est $C^1$ sur $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ puis déterminer l'expression de $\mathrm{d}f(A)(H)$.

• Tout d'abord $U = \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ est ouvert comme image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par l'application **det** continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• L'expression $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\ \mathrm{com(A)}^{\mathbf{T}}$, montre que les coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $A^{-1}$ sont des fractions rationnelles $r_{i,j}$ des coefficients de la matrice de départ $A$. On a donc $A^{-1} = (r_{i,j}(A))$ Chaque fonction $r_{i,j}$ est donc de classe $C^1$ sur $U$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_{\alpha,\beta}}(A) = \left(\dfrac{\partial r_{i,j}}{\partial x_{\alpha,\beta}}(A)\right)$ et donc **$f$ est $C^1$ sur $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$**.

• On a $\forall A \in U : A \times f(A) = I_n$. Utilisons la proposition précédente avec $B(M, N) = M \times N$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\Phi(A) = B(A, f(A))$. D'abord $\Phi$ est constante sur $U$ (égale à $I_n$) donc sa différentielle est nulle (pensez à la trichotomie). Ensuite $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) :\ \mathrm{d}\Phi(A)(H) = B(A,\, \mathrm{d}f(A)(H) + B(\,\mathrm{d}Id(A)(H), f(A)) = A\,\mathrm{d}f(A)(H) + HA^{-1}$.

On en déduit que $A\,\mathrm{d}f(A)(H) + HA^{-1} = (0)$ , d'où par composition, $\boxed{\mathrm{d}f(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}}$.

c) **Composition**

**Proposition** :

> Soient $f : U \subset E \longrightarrow V \subset F$ et $g : V \subset F \longrightarrow G$ où $E$, $F$ et $G$ sont 3 EV et $U$ et $V$ 2 ouverts.
>
> Si $f$ est différentiable en $a \in U$ et si $g$ est différentiable en $b = f(a) \in V$ alors
>
> $g \circ f : U \subset E \longrightarrow G$ est différentiable en $a$ et l'on a : $\boxed{\mathrm{d}(g \circ f)(a) = [\,\mathrm{d}g(b)] \circ [\,\mathrm{d}f(a)] = \,\mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)}$.
>
> En particulier si $f$ et $g$ sont de classe $C^1$ respectivement sur $U$ et $V$, alors $g \circ f$ est de classe $C^1$ sur $U$.

*Démonstration 10* :

$f(a + h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)$ et $g(b + k) = g(b) + v(k) + \|k\|\varepsilon_2(k)$ avec $u = \mathrm{d}f(a)$ et $v = \mathrm{d}g(b)$.

Donc $g \circ f(a+h) = g[f(a+h)] = g[f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)] = g[b + u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)]$

$= g(b) + v(\ u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\ ) + \left\|\ u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\ \right\|\ \varepsilon_2\left(u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\ \right)$

$= g(b) + v(\ u(h)) + \|h\|v(\varepsilon_1(h)\ ) + \left\|\ u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\ \right\|\ \varepsilon_2\left(u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\ \right)$

$= g(b) + v(u(h)) + \varphi(h)$ avec $\varphi(h) = \|h\|v(\varepsilon_1(h)) + \left\|\ u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\ \right\|\ \varepsilon_2\left(u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\ \right)$

Donc $\|\varphi(h)\| \leqslant \|h\|\ \|v(\varepsilon_1(h))\| + \left\|\ u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\ \right\|\ \left\|\ \varepsilon_2\left(u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\ \right)\right\|$.

Or $\left\|\ u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\ \right\| \leqslant \|u(h)\| + \|h\|\ \|\varepsilon_1(h)\| \leqslant |||u|||\ \|h\| + \|h\|\ \|\varepsilon_1(h)\|$

Ensuite $u$ est continue (car linéaire en dimension finie), donc il existe un nombre $k \geqslant 0$ tel que $\|u(h)\| \leqslant k \cdot \|h\|$. Donc $\|\varphi(h)\| \leqslant \|h\|\ \|v(\varepsilon_1(h))\| + \left[\ k\ \|h\| + \|h\|\|\varepsilon_1(h)\|\ \right] \left\|\varepsilon_2\left(u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\ \right)\right\| = o(h)$ par **théorèmes généraux** vu que $\lim\limits_0 \varepsilon_1 = \lim\limits_0 \varepsilon_2 = 0$. On en déduit donc que $g \circ f(a+h) = g(f(a)) + v(u(h)) + o(h)$ d'où $\boxed{g \circ f \text{ est différentiable en } a}$ et $\boxed{\mathrm{d}(g \circ f)(a) = v \circ u = \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}f(a)}$. Enfin, par composée $a \longmapsto \mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)$ est bien continue sur $U$. **Conclusion** : $\boxed{g \circ f \text{ est } C^1 \text{ sur } U}$.

d) **TG encore et toujours ! !**

**Corollaire** : Tout "**cocktail**" de fonctions usuelles est donc de classe $C^1$ sur son domaine de définition (attention aux racines carrées et aux valeurs absolues). On retrouve donc une fois de plus le label "T.G.".

**Exemple** :

$f$ définie par $f(x,y,z) = \dfrac{e^{xyz} + \sin(x + 3z^2)}{x + 2y - 3z}$ est de classe $C^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^3 - P\big/ x + 2y - 3z = 0$ par T.G. !

e) **Applications Fondamentales**

**Théorème 1** :

Soient $g : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow F$ de classe $C^1$ sur $U$ et soit $u_1$, ..., $u_p$ , $p$ fonctions d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^1$ tel que $\forall t \in I$ : $\Big(u_1(t), \ldots, u_p(t)\Big) \in U$.

Alors $G : \begin{cases} I \longrightarrow F \\ t \longmapsto g(\ u_1(t), \ldots, u_p(t)\ ) \end{cases}$ est **de classe** $C^1$ **sur** $I$ et $\forall t \in I$ : $\boxed{G'(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} u_j'(t) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}\Big(u_1(t), \ldots, u_p(t)\Big)}$.

*Démonstration 11* : Soit $f : \begin{cases} I \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^p \\ t \longmapsto (u_1(t), \ldots, u_p(t)) \end{cases}$

$f$ est de classe $C^1$ sur $I$ et donc par composition, $G = g \circ f$ est aussi de classe $C^1$ sur $I$ dans $F$. Comme $G$ est une fonction **d'une variable**, la différentielle de $G$ est définie par la formule : $dG(a)(t) = G'(a)t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ou si l'on veut $G'(a) = \mathrm{d}G(a)(1)$. Soit $a \in I$, posons $b = (u_1(a), \ldots, u_p(a))$, on a alors

$\mathrm{d}G(a)(1) = \mathrm{d}(g \circ f)(a)(1) = [\mathrm{d}g(b)] \circ [\mathrm{d}f(a)]\,(1) = [\mathrm{d}g(b)]\,(f'(a)) = [\mathrm{d}g(b)]\,(u_1'(a), \ldots, u_p'(a))$.

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule $\mathrm{d}f(a)(h) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ avec $h = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} h_j e_j$ à la fonction $g$ :

$\mathrm{d}G(a)(1) = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{p} u_j'(a) \frac{\partial g}{\partial x_j}(u_1(a), \ldots, u_p(a))\right)$ et donc $G'(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} u_j'(a) \frac{\partial g}{\partial x_j}(u_1(a), \ldots, u_p(a))$

**Exercice 1** : Écrire ce **théorème** avec $p = 2$, "$x_1 = x$ et $x_2 = y$".

**Exercice 2** : Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \end{cases}$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$, $u$ et $v$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et soit

$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) \longmapsto f(u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)) \end{cases}$ Montrer que $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$, calculer $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha,\beta)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial \beta}(\alpha,\beta)$.

**Réponse** :

$F$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par TG et $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)) \times \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)) \times \dfrac{\partial v}{\partial \alpha}(\alpha,\beta)$

et $\dfrac{\partial F}{\partial \beta}(\alpha,\beta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)) \times \dfrac{\partial u}{\partial \beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)) \times \dfrac{\partial v}{\partial \beta}(\alpha,\beta)$ .

**Exercice 3** : Dériver formellement $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ .

**Réponse** : Posons $F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$. L'idée est de "différentier" (au sens usuel du terme) les $x$ des bornes et le $x$ à l'intérieur de l'intégrale. Pour cela on introduit une fonction de deux variables : $G(x,y) = \displaystyle\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ .

Par le programme de MPSI, $\dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y) = f(x,v(y))\cdot v'(y) - f(x,u(y))\cdot u'(y)$ et avec le programme de MP, $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\int_{u(y)}^{v(y)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$. Enfin $F(x) = G(x,x)$ et donc

$F'(x) = \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,x) + \dfrac{\partial G}{\partial y}(x,x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} \dfrac{\partial f}{\partial x} f(x,t)\,\mathrm{d}t + f(x,v(x))\cdot v'(x) - f(x,u(x))\cdot u'(x)$ .

**Exercice 4** : Soit un fonction $f$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(y,x) = -f(x,y)$.

Qu'en déduire pour les dérivées partielles ?

f) **Règle de la chaine**

Calcul des dérivées partielles de $G : (u_1,\dots,u_m) \longmapsto f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_p(u_1,\dots,u_m))$.

La règle de la chaine est la notation : $\boxed{\forall k \in [\![1,m]\!] \quad , \quad \dfrac{\partial G}{\partial u_k} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}\cdot\dfrac{\partial x_j}{\partial u_k}}$

Cette écriture certes "abusive" (car on omet les points où l'on évalue les différentes dérivées partielles) est très simple à retenir (et à écrire).

### 7°) ***Caractérisation des fonctions constantes de classe $C^1$***

**Théorème 1** :

Soit $U$ un ouvert de $E$. Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ d'un ouvert $U$ dans $F$ et soit $(a,b) \in U^2$.

Soit $\gamma$ est une application de classe $C^1$ de $[0,1]$ dans $U$ (arc de classe $C^1$) tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Alors on a : $\boxed{f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}$

Rappel : le $\cdot$ signifie comme pour les équa. diff. : $\mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))$ .

*Démonstration 12* : Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de $E$. On peut donc identifier $E$ à $\mathbb{R}^p$ et noter $a = (a_1,\dots,a_p)$ (en fait $a$ de coordonnées $(a_1,\dots,a_p)$ ), $b = (b_1,\dots,b_p)$ et $f(x_1,\dots,x_p)$ pour tout $x = (x_1,\dots,x_p) \in U$. Notons enfin $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\dots,\gamma_p(t))$. Posons $G(t) = f(\gamma(t))$. On a donc $G'(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \gamma_j'(t)\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma_1(t),\dots,\gamma_p(t))$ : on reconnait la dérivée de la fonction $F : t \longmapsto f(\gamma_1(t),\dots,\gamma_p(t))$ , soit $G(t) = F'(t)$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 F'(t)\,\mathrm{d}t = F(1) - F(0)$. Or $F(0) = f(\gamma_1(0),\dots,\gamma_p(0)) = f(\gamma(0)) = f(a)$ et de même $F(1) = f(b)$. On conclut $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.

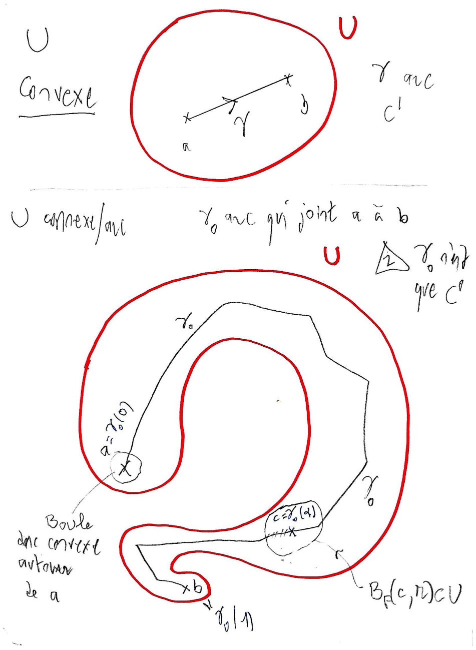
**Remarque** : l'introduction d'une base n'est pas indispensable si on maitrise bien les différentielles et notamment les composées : on reconnait directement que $G(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))$ est la dérivée de $f(\gamma(t))$.

**Corollaire** :

Si $U$ est un ouvert **connexe par arcs** de $E$ et $f : U \longrightarrow F$ de classe $C^1$ sur $U$ :

$f$ est **constante** sur $U \iff \mathrm{d}f$ est **nulle** sur $U \iff \forall j \in [\![1,p]\!]$ , $\forall x \in U$ , $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0$

*Démonstration 13* il faut que $\gamma$ soit $C^1$ dans le théorème précédent.




**Premier cas (exigible) : $U$ convexe**

Soit $(a,b) \in U^2$, montrons que $f(a) = f(b)$ à l'aide du théorème ci-dessus.

On considère l'arc $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ , $t \longmapsto (1-t)a + tb$. Cet arc est de classe $C^1$ à valeur dans $U$ par convexité, d'où : $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$, donc on a bien $f(a) = f(b)$.

**Deuxième cas (non exigible) : $U$ connexe par arc**

Soit $(a,b) \in U^2$, montrons que $f(a) = f(b)$ à l'aide du premier cas. Il existe donc une arc $\gamma_0$ qui n'est que $C^0$ de $[0,1]$ dans $U$ et tel que $\gamma_0(0) = a$ et $\gamma_0(1) = b$. L'idée c'est qu'autour de $a$ il y a une boule (donc convexe) dans $U$, donc le long de l'arc $\gamma_0$ dans cette boule la fonction est constante et on avance de proche en proche jusqu'à $b$. Précisons : Notons $X = \{t \in [0,1]$ tel que $f(\gamma_0(t)) = f(a)$ $\}$ On a $X$ non vide car $0 \in X$, $X \subset [0,1]$, donc possède une borne supérieure $\alpha$. D'autre part $X$ est un fermé relatif de $[0,1]$ comme image.... et donc un fermé de $\mathbb{R}$ car .... On a donc $\alpha \in X$. Supposons que $\alpha \neq 1$. Posons $c = \gamma_0(\alpha)$, il existe $r > 0$ tel que $B_o(c,r) \subset U$ (pour une norme choisie quelconque de $E$), car $U$ est ouvert. Ensuite par continuité de la fonction $\gamma_0$ en $\alpha$ : il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta] \subset [0,1]$ , $\|\gamma_0(t) - \gamma_0(\alpha)\| = \|\gamma_0(t) - c\| \leqslant r$. Or la boule $B_o(c,r) \subset U$ est ouverte et convexe et la différentielle de $f$ y est nulle donc la fonction $f$ est constante sur cette boule ouverte. On en déduit que $\forall t \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$ : $f(\gamma_0(t)) = f(c) = f(a)$, donc $\alpha + \eta \in X$ : absurde.

**8°) *Fonctions vectorielles de plusieurs variables***

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $E$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une base de $F$. Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$. Notons $(f_1, \ldots f_n)$ les fonctions coordonnées de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$ : $f : \left\{ \begin{array}{l} U \subset E \longrightarrow F \\ x \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \longmapsto f(x) \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_p) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_p) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \end{array} \right.$

**Théorème** :

$$\boxed{f \text{ est de } \textbf{classe } C^1 \text{ sur } U \text{ SSI } \forall i \in [\![1,n]\!] : f_i \text{ est de } \textbf{classe } C^1 \text{ sur } U \text{ et dans ce cas } \mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}f_i(a)(h)e'_i}.$$

*Démonstration 14* : $\Longrightarrow$] $f_i$ est de classe $C^1$ par composition : $f_i = \mathrm{d}y_i \circ f$ où $\mathrm{d}y_i$ est la fonction $i$-ième fonction coordonnée dans la base $\mathcal{B}'$ $(y = \displaystyle\sum_{k=1}^n y_k e'_k \in F \longmapsto y_i)$

$\Longleftarrow$] $f_i(a+h)e'_i = f_i(a)e'_i + u_i(h)e'_i + \|h\|\varepsilon_i(h)e'_i$ et donc : $\displaystyle\sum_{i=1}^n f_i(a+h)e'_i = \sum_{i=1}^n f_i(a)e'_i + \sum_{i=1}^n u_i(h)e'_i + \sum_{i=1}^n \|h\|\varepsilon_i(h)e'_i$.

**Matrice Jacobienne** : On appelle **Matrice Jacobienne** de $f : U \subset E \longrightarrow F$, dans les bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ de $E$ et $F$, $a \in U$,

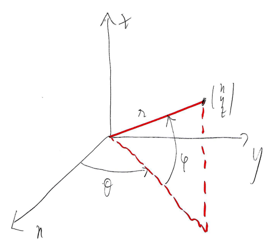
$$\boxed{J_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(a) = J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}}$$

**Jacobien cas $E = F$** : On appelle **Jacobien** de $f : U \subset E \longrightarrow E$, dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de $E$, au point $a$ de $U$, le déterminant de la matrice jacobienne que l'on note :

$$\boxed{\frac{D(f_1, \ldots, f_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)}(a) = det(J_f(a)) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_p}(a) \end{vmatrix}}$$

**Exemples** : Calculer la matrice Jacobienne et le Jacobien des fonctions suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases} \quad \text{et } g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \phi) \longmapsto \text{les coordonnées sphériques : } \begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \end{cases}$$



$J_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ et $\det(J_f(r, \theta)) = r$ (le même $r$ qui apparait dans les intégrales doubles : $\displaystyle\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\underline{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ )

**Proposition 1** : $\boxed{J_f(a) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(\mathrm{d}f(a)\right)}$

*Démonstration 15* : Exercice

$\mathrm{d}f(a)(h) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}f_i(a)(h)e'_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(a+h)e'_i = \sum_{i=1}^{n} f_i(a)e'_i + \sum_{i=1}^{n} u_i(h)e'_i + \sum_{i=1}^{n} \|h\|\varepsilon_i(h)e'_i$.

**Proposition 2 : Composée** :

> Soient $f : U \subset E \longrightarrow V \subset F$ et $g : V \subset F \longrightarrow G$ où $E$, $F$ et $G$ sont 3 EV et $U$ et $V$ 2 ouverts.
>
> Si $f$ et $g$ sont de classe $C^1$, alors $g \circ f : U \subset E \longrightarrow G$ et $\forall a \in U$, en posant $b = f(a)$, on a $J_{g\circ f}(a) = J_g(b) \times J_f(a)$

*Démonstration 16* Exercice (avec la démonstration 10 (composée de différentielles)).

## B) FONCTIONS NUMÉRIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES

### 1°) *Algèbre $C^1(U)$*

***Définition*** : Soit $U$ un ouvert de $E$. $\boxed{C^1(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f \text{ de classe } C^1 \text{ sur U }\}}$

**Théorème** : $\boxed{\left(\ C^1(U)\ ,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ \times\ \right) \text{ est une } \mathbb{R}\text{-}\mathbf{algèbre}}$

De plus si $f$ et $g$ sont dans $C^1(U)$, alors $\dfrac{\partial(f\cdot g)}{\partial x_j} =$

Si $\forall x \in U, f(x) \neq 0$ et $f$ $C^1$ sur $U$, alors $\dfrac{1}{f}$ est $C^1$ sur $U$ et on a sur $U$ : $\dfrac{\partial(\frac{1}{f})}{\partial x_j} =$

*Démonstration 17* :

- $\dfrac{\partial(f\cdot g)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}\cdot g + f\cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_j}$
- $\dfrac{\partial(\frac{1}{f})}{\partial x_j}(x) = -\dfrac{1}{f(x)^2}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$

**Exercice** : Déterminer $C^1(U)^*$ (ensemble des éléments inversibles).

**Réponse** : Grâce au théorème précédent, on a $C^1(U)^* = \left\{ f \in C^1(U) \text{ telle que } \forall x \in U\ ,\ f(x) \neq 0 \right\}$.

## 2°) *Gradient*

**Théorème-*Définition*** :

> Si $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel **euclidien** et si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est $C^1$ sur $U \subset E$, alors pour tout point $a \in U$, il existe un unique vecteur de $E$, noté $\nabla f(a)$ (ou grad $f(a)$ ), tel que :
> $\boxed{\forall \overrightarrow{h} \in E,\ \mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h}) = (\ \nabla f(a) \mid \overrightarrow{h}\ )}$ . On dit alors que $\boxed{\nabla f(a) \text{ est le } \textbf{gradient} \text{ de } f \text{ en } a}$.

*Démonstration 18* :

Par l'isomorphisme canonique entre l' espace euclidien $E$ et son dual $E^*$ (théorème de représentation de Riesz), pour toute forme linéaire $\ell$ de $E^*$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{v}$ de $E$ tel que $\forall \overrightarrow{h} \in E$, $\ell(\overrightarrow{h}) = (\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{h})$.

Or $\ell_0 : \overrightarrow{h} \longmapsto \mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h})$ est une forme linéaire de $E$ dans $\mathbb{R}$ donc il existe un unique vecteur $\overrightarrow{v}$ de $E$ tel que $\forall \overrightarrow{h} \in E$, $\ell_0(\overrightarrow{h}) = \mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h}) = (\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{h})$.

**Expression du gradient dans une base OTN** :

Soit $\mathcal{B}$ une base OTN de $E$ alors pour tout $a$ de $U$, on a : $\boxed{\nabla f(a) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}$

*Démonstration 19* :

Avec les notations ci-dessus, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base OTN de $E$ et que $\overrightarrow{h}$ a pour coordonnées $(h_1, \dots, h_p)$, alors on sait que $\mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$ : on reconnait l'expression du produit scalaire dans une base OTN des vecteurs $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ . Par unicité du gradient, on peut conclure.

**Remarque** : Les coordonnées du gradient sont donc indépendantes de la base OTN choisie.

**Interprétation géométrique du gradient** :

**Définition** :

> Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $U$. On appelle **graphe** de la fonction $f$ ou **surface d'équation cartésienne** $z = f(x, y)$ (dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$) , l'ensemble
> $\boxed{\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } z = f(x, y)\}\ . \quad \text{On le note } \quad \mathcal{S}\big/ z = f(x, y)}$.

Le gradient de $f$ en $a$ donne, lorsqu'il est non nul, la direction de plus grande croissance de $f$ ou autrement dit le gradient est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de $f$ en $a$ est maximale.

En effet, lorsque $\|u\| = 1$, $d(f)(a)(u) = (\mathrm{grad} f(a) | u)$ prend la plus grande valeur possible lorsque $u = \dfrac{\mathrm{grad} f(a)}{\|\mathrm{grad} f(a)\|}$ (c'est le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
De plus, pour cette valeur de $u$, $d(f)(a)(u) = \|\mathrm{grad} f(a)\|$.

Dans le cas $p = 2$, si on imagine un marcheur se promenant sur une surface $\mathcal{S}\Big/ z = f(x,y)$, le gradient de $f$ en un point indique la direction horizontale pour laquelle l'altitude augmente le plus. Pour gagner le sommet d'une montagne au plus vite, le marcheur a tout intérêt à suivre (lorsque c'est possible) cette direction à tout moment.

**Expression du gradient en coordonnées polaire dans un plan euclidien**

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (rapportée à son repère canonique OTN $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$) tel que $(0,0) \notin U$. Soit $f$ de $U$ dans $\mathbb{R}$, de classe $C^1$ sur $U$. Pour tout réel $\theta$, on note $\overrightarrow{u}_\theta = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}_\theta = \overrightarrow{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}} = -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j}$.

Soit $g$ définie par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer que $\forall a \in U$ (donc $a \neq O$) : $\boxed{\nabla f(a) = \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\,\overrightarrow{u}_\theta + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\,\overrightarrow{v}_\theta}$.

*Démonstration 20* : Dérivons partiellement $g$ à l'aide de la règle de la chaine :

$\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \sin\theta$ et

$\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times (-r\sin\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times (r\cos\theta)$.

D'où $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\,\overrightarrow{u}_\theta + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\,\overrightarrow{v}_\theta =$

$= [\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \sin\theta](\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}) +$

$+\dfrac{1}{r}[\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times (-r\sin\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times (r\cos\theta)](-\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j})$

$= \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\overrightarrow{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\overrightarrow{j} = \nabla f(a)$ avec $a = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

**Exercice** : Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. Soit $\mathcal{R} = (O, e_1, \ldots, e_p)$ un repère OTN de $E$. Soit $\varphi$ une fonction de classe $C^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère la fonction $f : E - \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}$ , $M \longmapsto \varphi(OM)$.

Déterminer le gradient de $f$ en tout point $M$ de $E - \{O\}$.

**Réponse** : On note $M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ et donc $f(M) = \varphi\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2}\right)$, d'où pour tout $j$ ,

$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(M) = \dfrac{2x_j}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2}}\varphi'\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2}\right) = \dfrac{x_j\varphi'(OM)}{OM}$. On en déduit $\boxed{\nabla f(M) = \dfrac{\varphi'(OM)}{OM}\overrightarrow{OM}}$.

**3°)** ***Vecteurs tangents à une partie d'un evn***

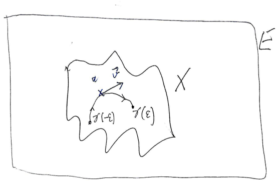
**a)** ***Définition 1***

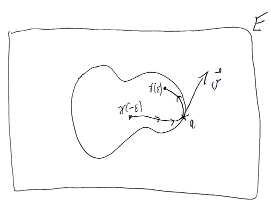
Soit $X$ est une partie de $E$ , $a$ un point de $X$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur de $E$.

On dit que **$\overrightarrow{v}$ est tangent à $X$ en $a$** , s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma$ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans $X$ : $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \longrightarrow X$

$t \longmapsto \gamma(t)$ tels que $\boxed{\gamma(0) = a \text{ et } \gamma'(0) = \overrightarrow{v}}$.

Définition : $\boxed{\mathcal{T}_a X = \{\overrightarrow{v} \text{ tangent à } X \text{ en } a\}}$



**Proposition** :

**a)** **Cône** Si $\overrightarrow{v}$ est tangent à $X$ en $a$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda\overrightarrow{v}$ est tangent à $X$ en $a$ .

**b)** Si $a \in \overset{o}{X}$ alors $\boxed{\mathcal{T}_a X = E}$.

**c)** **Tangent-tangente** Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $I$ alors pour tout $x_0 \in I$ posons $a = (x_0, f(x_0))$ et $X = \{(x, f(x))$ tel que $x \in I\}$ (le graphe de $f$). On a alors $\boxed{\mathcal{T}_a X = vect((1, f'(x_0)))}$.

**d)** **Vecteurs tangents à un SEA** Soit $a_0 \in E$ et $\mathcal{F} = a_0 + \overrightarrow{F}$ un sous-espace affine de direction le SEV $\overrightarrow{F}$. Pour tout point $a \in \mathcal{F}$, on a $\boxed{\mathcal{T}_a\mathcal{F} = \overrightarrow{F}}$.

**e)** **Vecteurs tangents à une sphère** Soit $E$ un espace euclidien et $S(a_0, r)$ la sphère de centre $a_0 \in E$ et de rayon $r > 0$. Soit $a \in S(a_0, r)$ on a $\boxed{\mathcal{T}_a S(a_0, r) = (a - a_0)^\perp}$.

**Réponse** : **a)** Soit $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma$ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans $X$ : tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$.

**Premier cas** : $\lambda \neq 0$. On considère l'arc $\gamma_1 : \left] -\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}, \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}\right[ \longrightarrow X$, défini par $\gamma_1(t) = \gamma(\lambda t)$. On a :

• $\forall t \in \left] -\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}, \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}\right[ : \gamma_1(t) \in X$, • $\gamma_1(0) = a$, • $\gamma_1$ est dérivable sur $\left] -\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}, \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}\right[$ et $\forall t \in \left] -\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}, \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}\right[ : \gamma_1'(t) = \lambda\gamma'(\lambda t)$, donc $\gamma_1'(0) = \lambda\overrightarrow{v}$ .

**Deuxième cas** : $\lambda = 0$. L'arc $\gamma_1 : \left] -1, 1\right[ \longrightarrow X$, défini par $\gamma_1(t) = \gamma(0) = a$ (le support est un point) convient $\gamma_1'(0) = \overrightarrow{0}$. On en déduit que $\mathcal{T}_a X$ est un cône (c'est-à-dire un ensemble stable par homothéties).

**b)** Si $a \in \overset{o}{X}$ alors il existe $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset X$. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul de $E$, On considère l'arc $\gamma : \left] -\dfrac{r}{\|\overrightarrow{v}\|}, \dfrac{r}{\|\overrightarrow{v}\|}\right[ \longrightarrow X$, défini par $\gamma(t) = a + t\overrightarrow{v}$. On a :

• $\forall t \in \left] -\dfrac{r}{\|\overrightarrow{v}\|}, \dfrac{r}{\|\overrightarrow{v}\|}\right[ : \gamma(t) \in X$, • $\gamma(0) = a$, • $\gamma$ est dérivable sur $\left] -\dfrac{r}{\|\overrightarrow{v}\|}, \dfrac{r}{\|\overrightarrow{v}\|}\right[$ et $\gamma'(t) = \overrightarrow{v}$, donc $\gamma_1'(0) = \overrightarrow{v}$ .

Comme $\overrightarrow{0}$ est un vecteur tangent à tout ensemble (voir le a) ), on conclut $\boxed{\mathcal{T}_a X = E}$.

**c)** Montrons que $(1, f'(x_0)) \in \mathcal{T}_a X$. Comme $I$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset I$. Soit $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow X$ défini par $\gamma(t) = (x_0 + t, f(x_0 + t))$ convient. Avec le **a)** on a donc $vect((1, f'(x_0))) \subset \mathcal{T}_a X$.

Réciproquement soit $\overrightarrow{v} \in \mathcal{T}_a X$, il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma$ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans $X$ tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$. Posons $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, on a $\gamma_1$ et $\gamma_2$ dérivable sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et $\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma_2(t) = f(\gamma_1(t))$. On en déduit que $\overrightarrow{v} = \gamma'(0) = (\lambda, \lambda f'(x_0)) \in vect((1, f'(x_0)))$ avec $\lambda = \gamma_1'(0)$.

**d)** Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{F}$, soit $\gamma : ]-1, 1[\longrightarrow \mathcal{F}$ défini par $\gamma(t) = a + t\overrightarrow{v}$. $\gamma$ vérifie $\gamma(0) = a$ , $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$ et $\forall t \in ]-1, 1[$ $\gamma(t) \in \mathcal{F}$. On en déduit $\overrightarrow{v} \in \mathcal{T}_a\mathcal{F}$ et donc $\overrightarrow{F} \subset \mathcal{T}_a\mathcal{F}$.

Réciproquement, soit $\overrightarrow{v} \in \mathcal{T}_a\mathcal{F}$, il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma$ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans $\mathcal{F}$ tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$. $\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[-\{0\} : \dfrac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = \dfrac{\gamma(t) - a}{t} \in \overrightarrow{F}$. Or $\overrightarrow{F}$ est fermé car SEV de dimension finie, donc $\gamma'(0) = \lim\limits_{\substack{t \to 0\\ \neq}} \dfrac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \in \overrightarrow{F}$. On en déduit que $\overrightarrow{v} = \gamma'(0) \in \overrightarrow{F}$ et donc $\mathcal{T}_a\mathcal{F} \subset \overrightarrow{F}$. On conclut que $\boxed{\mathcal{T}_a\mathcal{F} = \overrightarrow{F}}$.

**e)** Posons $X = S(a_0, r)$ et soit $\overrightarrow{v} \in \mathcal{T}_a X$, il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma$ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans $X$ tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$.

$\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ posons $g(t) = \gamma(t) - a_0$ : On a donc $\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , $\gamma(t) = a_0 + g(t)$ et $\|g(t)\| = r$.

On en déduit donc que $\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ : (g(t)|g(t)) = r^2$. En dérivant cette relation, on obtient

$(g'(t)|g(t)) + (g(t)|g'(t)) = 0$ et donc $(g'(t)|g(t)) = 0$. En $t = 0$, on obtient donc $(\gamma'(0)|\gamma(0) - a_0) = 0$, soit $(\overrightarrow{v}|a - a_0)$. D'où $\overrightarrow{v} \in (a - a_0)^\perp$.

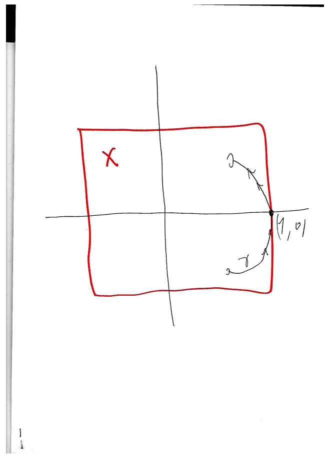
Réciproquement, soit $\overrightarrow{v} \in (a - a_0)^\perp$ , $\overrightarrow{v} \neq 0$. Posons $\overrightarrow{i} = \dfrac{a - a_0}{\|a - a_0\|}$ et $\overrightarrow{j} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$. On a donc $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ famille OTN. Posons $\gamma : ]-\pi, \pi[\longrightarrow X$ défini par $\gamma(t) = a_0 + r\cos t\,\overrightarrow{i} + r\sin t\,\overrightarrow{j}$. $\gamma$ vérifie $\gamma(0) = a_0 + r\overrightarrow{i} = a$ , $\gamma'(0) = r\overrightarrow{j}$ et $\forall t \in ]-1, 1[$ $\gamma(t) \in X$. On en déduit $r\overrightarrow{j} \in \mathcal{T}_a X$ et comme $r \neq 0$ donc $\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|\overrightarrow{j} \in \mathcal{T}_a X$ (avec a) ). On conclut que $\boxed{\mathcal{T}_a X = (a - a_0)^\perp}$.

**Exemples**

**a)** Soit $X = [-1, 1]^2$. Déterminer $\mathcal{T}_a X$ avec $a = (0, 0)$ , $a = (1, 0)$ , $a = (1, 1)$.

**Réponse** : • Comme $a = (0, 0) \in \overset{o}{X}$ alors $\boxed{\mathcal{T}_a X = \mathbb{R}^2}$.

- Soit $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma$ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans $X$ : tels que $\gamma(0) = a = (1, 0)$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$.




Montrons que $\overrightarrow{v}$ est de la forme $(0, \beta)$. Notons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$. On a $x(0) = 1$ , $y(0) = 0$, $x'(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta$. Comme la fonction $x$ vérifie $\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ : x(t) \leqslant 1 = x(0)$ , la valeur $t_0 = 0$ est un un maximum de la fonction $x$ sur l'intervalle ouvert $]-\varepsilon, \varepsilon[$, le cours de MPSI dit qu'alors $x'(0) = 0$ soit $\alpha = 0$. On en déduit que $\mathcal{T}_a X \subset \text{vect}((0, 1))$.

Réciproquement, soit $\overrightarrow{v} = (0, \beta)$, montrons que $\overrightarrow{v} \in \mathcal{T}_a X$. Soit l'arc $\gamma$ défini par $\gamma \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = \beta t \end{cases}$ sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ avec $\varepsilon = \min(\dfrac{1}{|\beta|}, 1)$ (le graphe de $\gamma$ est sur le dessin ci-dessus) . On a $\gamma$ à valeur dans $X$ , $\gamma(0) = a = (1, 0)$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$. On conclut $\boxed{\mathcal{T}_a X = \text{vect}((0, 1))}$.

- On fait le même raisonnement qu'au cas précédant sur $x$ et sur $y$ : $x'(0) = y'(0) = 0$. On conclut $\boxed{\mathcal{T}_a X = \{\overrightarrow{0}\}}$.

**b)** Tracer $\Gamma \begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = t\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ puis déterminer des vecteurs tangents à $X$ =support$(\Gamma)$ en $a = (0, 0)$.

$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ donc $M(-t) = s_{Ox}(M(t))$ et étude $/ \mathbb{R}^+$

| $t$ | $0$ | | $\alpha$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $x$ | $1$ | $\searrow$ | | | $0$ | $\searrow$ | $-1$ |
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

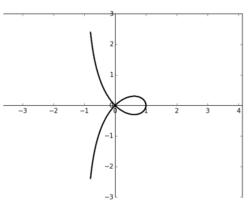
$x' = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$

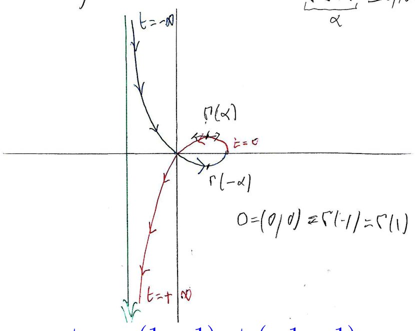
$y' = \dfrac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2}$

$X^2+4X-1 \to -2\pm\sqrt{5}$

d'où $y'(t)=0$ & $t>0$ $\iff t = \underbrace{\sqrt{-2+\sqrt{5}}}_{\alpha} \simeq 0{,}48$

D/ $x=-1$ asympt.






L'arc $\Gamma$ va fournir un arc pour les vecteurs $(1, -1)$ et $(-1, -1)$.

On considère l'arc $\gamma$ défini par $\gamma(t) = \Gamma(t-1)$ sur $]-1, 1[$. On a $\forall t \in ]-1, 1[ : \gamma(t) \in X$ =support$(\Gamma)$ , $\gamma(0) = a = (0, 0)$ et $\gamma'(0) = (x'(-1), y'(-1)) = (1, -1)$. On en déduit que $\overrightarrow{v} = (1, -1) \in \mathcal{T}_a X$, d'où $vect(1, -1) \subset \mathcal{T}_a X$. On fait de même avec $\gamma(t) = \Gamma(t+1)$ et $\overrightarrow{v} = (-1, -1)$ **Conclusion**: : $\boxed{vect(1, -1) \cup vect(-1, -1) \subset \mathcal{T}_a X}$.

**b)** ***Théorème fondamental***

> Soit $U$ un ouvert de $E$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe $C^1$ sur $U$.
> Soit $X = \{x \in U \text{ tel que } g(x) = 0\}$ et soit $a \in X$ tel que $\mathrm{d}g(a) \neq 0$, alors $\boxed{\mathcal{T}_a X = \ker \mathrm{d}g(a)}$.

*Démonstration 21* : HP

**Remarque** : Il y a une inclusion "facile" et une inclusion "HP".

Soit $\overrightarrow{v} \in \mathcal{T}_a X$ il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma$ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans $X$ tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$. Dérivons cette relation : $\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ :\ dg(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$. On a donc $dg(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0$, soit $dg(a) \cdot \overrightarrow{v} = 0$. On en déduit que $\overrightarrow{v} \in \ker\, dg(a)$ et donc $\mathcal{T}_a X \subset \ker\, dg(a)$. C'est l'autre inclusion qui n'est pas évidente.

### c) *Définition 2*

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $U$. On appelle **graphe** de la fonction $f$ ou **surface d'équation cartésienne** $z = f(x,y)$ (dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$) , l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } z = f(x,y)\} . \quad \text{On le note} \quad \mathcal{S}/z = f(x,y).$$

et plus généralement on appelle aussi surface tout ensemble du type :

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } F(x,y,z) = 0\}$$

**Exemples** :

a) Donner un exemple simple de surface.

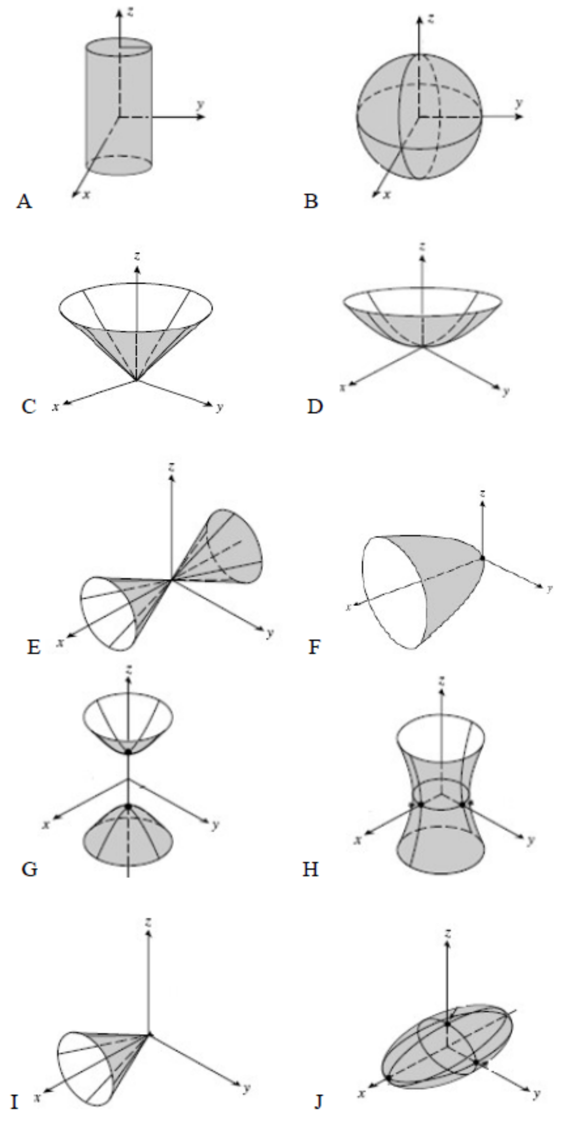
b) $\mathcal{S}/x^2 + y^2 + z^2 = 6$. On appelle cette surface une

c) Représenter la surface $\mathcal{S}/z = x^2 + y^2$.

d) Montrer que $\mathcal{C}/z^2 = x^2 + y^2$ est la réunion de 2 surfaces d'équation $\mathcal{S}/z = f(x,y)$ , représenter $\mathcal{C}$.

e) Représenter la surface $\mathcal{S}/x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

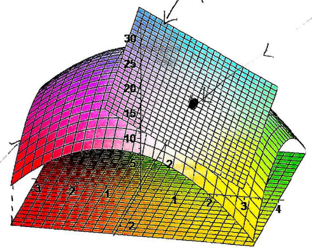
1. $z^2 = x^2 + y^2$ ______
2. $z^2 = -1 + x^2 + y^2$ ______
3. $z^2 = 9 - x^2 - y^2$ ______
4. $4 = x^2 + y^2$ ______
5. $z^2 = 1 + x^2 + y^2$ ______
6. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ______
7. $x = 1 + y^2 + z^2$ ______
8. $x^2 + 4y^2 = 36 - 9z^2$ ______
9. $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ ______
10. $z = x^2 + y^2$ ______



```
> p3:=plan(1,1.7,2):
  p4:=pied(1,1.7,3):
  display(p1,p2,p3,p4);
```

plan tangent à $\mathcal{S}$

point $M_0$



Surface $\mathcal{S} / z = 26 - x^2 - y^2$

$x \in [-3, 3]$

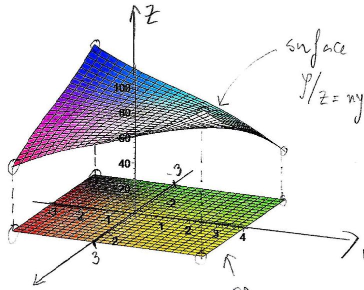
$y \in [-3, 4]$

Equation du plan tg en $a = (\alpha, \beta)$ :

$\mathcal{P}_a /$

```
> a:=3;
  p2:=plot3d([x,y,x*y*ln(x^2+y^2)+77.],x=-a..a,y=-a..a+1):
  p1:=plot3d([x,y,0],x=-a..a,y=-a..a+1):
  display(p1,p2);
```

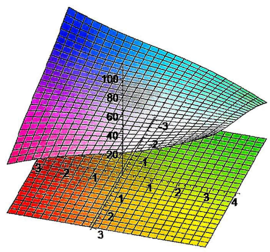
$a := 3$



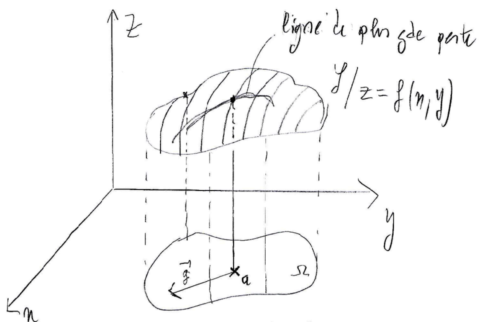

surface $\mathcal{S} / z = xy\ln(x^2+y^2)$

plan $\mathcal{P}_0 / z = 0$ pour $x \in [-3, 3]$, $y \in [-3, 4]$

```
> display(p1,p2);
```

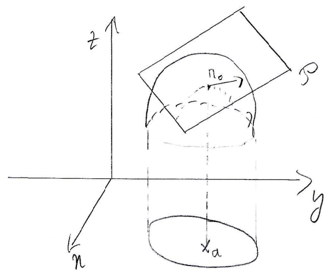


même surface et plan sous d'autres angles.




$a = (\alpha, \beta)$

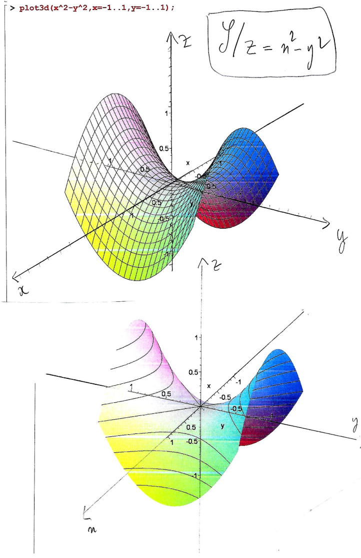
$\vec{g} = \nabla f(a)$

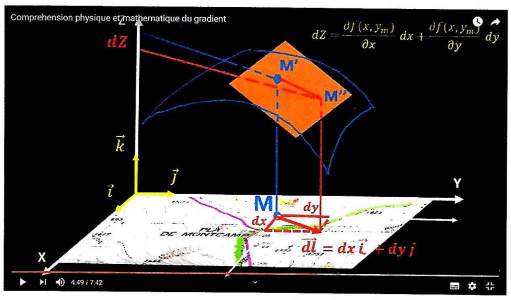



$\mathcal{P}$ plan tangent à $\mathcal{S} / z = f(x, y)$ en $a = (\alpha, \beta)$,

$M_0 = (\alpha, \beta, f(\alpha, \beta))$

```
> plot3d(x^2-y^2,x=-1..1,y=-1..1);
```



***Proposition***

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $C^1$ sur $U$. Soit $a = (\alpha, \beta) \in U$ , $A = (\ \alpha, \beta, f(\alpha, \beta)\ )$ et $\gamma = f(\alpha, \beta)$ .

Soit la surface $X \big/ z = f(x, y)$ (on a donc $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(x, y) \in U$ et $z = f(x, y)\}$ ) .

Alors **l'ensemble des vecteurs tangents à $X$ en $A$** est le plan vectoriel d'équation dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ : $\overrightarrow{\mathcal{P}} \big/ v_3 = v_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + v_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$

*Démonstration 22* : • **Démonstration avec le théorème fondamental**

On pose $g(x, y, z) = f(x, y) - z$, $g$ est de classe $C^1$ sur $U \times \mathbb{R}$ $\Big($les 3 dérivées partielles : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ , $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ , $\dfrac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = -1$ sont continues sur $U \times \mathbb{R}\Big)$ et $X = \{(x, y, z) \in U \times \mathbb{R}$ tel que $g(x, y, z) = 0\}$. On a ensuite $\mathrm{d}g(x, y, z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}z \neq 0$. On en déduit que $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{T}_A X \iff \overrightarrow{v} \in \ker \mathrm{d}g(\alpha, \beta, \gamma) \iff \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) v_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) v_2 - v_3 = 0$. D'où le résultat.

• **Démonstration sans le théorème fondamental**

Soit $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{T}_A X$ , il existe un arc $\Gamma : t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$ tel que $\Gamma(t) \in X$ pour $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\Gamma(0) = A$ et $\Gamma'(0) = \overrightarrow{v}$. On dérive par rapport à $t$ , l'expression $z(t) = f(x(t), y(t))$ : $z'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t)$ , donc en $t = 0$, $z'(0) = v_3 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) v_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) v_2$. On en déduit que $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \big/ v_3 = v_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + v_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$.

**Réciproquement** : $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ , soit $\Gamma$ défini par $\Gamma(t) = (\ \alpha + v_1 t, \beta + v_2 t, f(\alpha + v_1 t, \beta + v_2 t)\ )$. Cette fonction $\Gamma$ est définie sur un intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ car $(\alpha, \beta) \in U$, qui est ouvert , donc il existe une boule de centre $(\alpha, \beta)$ incluse dans $U$. Ensuite $\Gamma(0) = A$ et $\Gamma'(0) = \overrightarrow{v}$. **Conclusion**: $\mathcal{T}_A X = \overrightarrow{\mathcal{P}} \big/ v_3 = v_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + v_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$.

***Proposition-définition (même notation que ci-dessus)***

On appelle **plan tangent** à $X$ en $A$ , le plan affine $\mathcal{P}_X(A) = A + \mathcal{T}_A X$. Une équation cartésienne de ce plan tangent dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $\boxed{\mathcal{P} \big/ z - \gamma = (x - \alpha) \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - \beta) \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)}$.

*Démonstration 23* : Avec la proposition ci-dessus, l'équation de $\mathcal{P}$ est de la forme : $z = x \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + y \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) + C$.

On écrit que $A \in \mathcal{P}$ : $\gamma = \alpha \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + \beta \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) + C$.

Il ne reste plus qu'a soustraire ces deux égalités : $z - \gamma = (x - \alpha) \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - \beta) \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ .

***Définition***

Soit $E$ un espace euclidien , soit $U$ un ouvert de $E$. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

On appelle ligne de niveau de la fonction $f$ tout ensemble de la forme $X_k = \{M \in U$ tel que $f(M) = k\}$ où $k \in \mathbb{R}$.

**Théorème** :

Soit $E$ un espace euclidien , soit $U$ un ouvert de $E$.

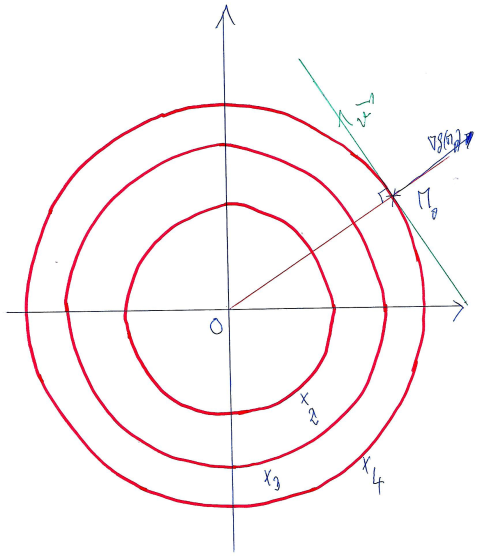
Soit $f$ une fonction $C^1$ sur $U$ et à valeurs réelles. Soit $X_k$ une ligne de niveau de la fonction $f$. Pour chaque point $M_0$ de $X_k$ tel que $\nabla f(M_0) \neq \overrightarrow{0}$, les vecteurs tangents à $X_k$ en $M_0$ sont **orthogonaux au gradient de $f$ en $M_0$**.

*Démonstration 24* : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base OTN de $E$. Soit $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in E$. Posons $g(M) = f(M) - k$, on a $g$ $C^1$ sur $U$. On a $\mathrm{d}g(M_0)(\overrightarrow{v}) = (\nabla f(M_0) | \overrightarrow{v})$ et donc $\mathrm{d}g(M_0) \neq 0$. Par le théorème fondamental, $\overrightarrow{v}$ est un vecteur tangent à $X_k$ en $M_0$ si et seulement si $\mathrm{d}g(M_0)(\overrightarrow{v}) = 0 \iff (\nabla f(M_0) | \overrightarrow{v}) = 0$. **Conclusion**: $\boxed{\mathcal{T}_{M_0} X = (\nabla f(M_0))^{\perp}}$

**Exemples** :

**i.)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ , $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$. Tracer les lignes de niveaux et les tangentes en un point $M_0$ de $X_k$.

**Réponse** : Les ligne de niveaux sont les cercles centrés en $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{k}$. Si $M_0 = (x_0, y_0) \in X_k$, $\nabla f(M_0) = (2x_0, 2y_0) \neq 0$ , donc les vecteurs tangents à $X_k$ en $M_0$ sont donc sur la droite $\mathrm{vect}(-y_0, x_0)$ et donc sont orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{OM_0}$.



**ii)** On peut retrouver très vite le résultat suivant : **Vecteurs tangents à une sphère**. Soit $E$ un espace euclidien et $S(a_0, r)$ la sphère de centre $a_0 \in E$ et de rayon $r > 0$. Soit $a \in S(a_0, r)$ on a $\mathcal{T}_a S(a_0, r) = (a - a_0)^{\perp}$.

Il suffit de poser $g(x) = (x - a_0 | x - a_0) - r^2$ et de retrouver $\mathrm{d}g(a)(\overrightarrow{h}) = 2(a - a_0 | \overrightarrow{h}) \neq 0$.

**iii)** $X = SL_n(\mathbb{R}) \subset E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = I_n$. Déterminer $\mathcal{T}_{I_n} X$.

**Réponse** :

On pose $g(M) = \det M - 1$, on a $g$ de classe $C^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par T.G. et $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } g(M) = 0\}$.

Déterminons $\mathrm{d}g(I_n)$.

**Première méthode** : (trichotomie) $\det(I_n + H) = \begin{vmatrix} 1 + h_{1,1} & & h_{i,j} \\ & \ddots & \\ h_{i,j} & & 1 + h_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} (1 + h_{j,j}) + O(\|H\|_\infty^2)$

$\Big(\prod_{j=1}^{n} (1 + h_{j,j})$ vient du terme $a_{1,1} \cdots a_{n,n}$ du développement du déterminant et $O(\|H\|_\infty^2)$ vient de tous les termes $a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ avec $\sigma \neq Id$ du développement du déterminant). On en déduit que

$\det(I_n + H) = 1 + \sum_{j=1}^{n} h_{j,j} + O(\|H\|_\infty^2) = \det I_n + Tr(H) + o(H)$ et donc que $\mathrm{d}g(I_n)(H) = Tr(H)$ et donc $\mathrm{d}g(I_n) \neq 0$.

**Deuxième méthode** : On a vu plus haut que $\dfrac{\partial g}{\partial E_{i,j}}(M) = (-1)^{i_0 + j_0} \Delta_{i_0, j_0}$ et que

$\mathrm{d}g(M)(H) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} h_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(M) = \mathrm{Tr}(\ H^{\mathbf{T}} \times \mathrm{com}(M)\ )$

On en déduit que $\mathrm{d}g(I_n)(H) = Tr(H^{\mathbf{T}} \times com(I_n)) = Tr(H^{\mathbf{T}}) = Tr(H)$. On peut alors conclure :

**Conclusion**: $\boxed{\mathcal{T}_{I_n} X \text{ est l'ensemble des matrices de trace nulle}}$.

**Démonstration sans le théorème fondamental** :

Soit $V$ une matrice de $\mathcal{T}_{I_n} X$ , il existe donc $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma$ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans $X = SL_n(\mathbb{R})$ : $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \longrightarrow X$ , $t \longmapsto \gamma(t)$ tels que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = V$.

On a $\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , $\det(\gamma(t)) = 1$. Notons la matrice $\gamma(t) = \Big( C_1(t) \quad | \, C_2(t) \quad | \quad \cdots \quad | \quad C_n(t) \Big)$ où $C_1(t), \ldots, C_n(t)$ sont les colonnes de la matrice $\gamma(t)$ et $f(t) = \det(\gamma(t)) = 1$ (car $\gamma(t) \in SL_n(\mathbb{R})$).

On a alors $f'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}_0} \Big( C_1(t) \quad | \, C_2(t) \quad | \quad \cdots \quad | \quad C_i'(t) \quad | \quad \cdots \qquad C_n(t) \Big)$, d'où

$f'(0) = 0 = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}_0} \Big( C_1(0) \quad | \, C_2(0) \quad | \quad \cdots \quad | \quad C_i'(0) \quad | \quad \cdots \qquad C_n(0) \Big)$, d'où

$$f'(0)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & V_{i,i} & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \dots & 0 & 1\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}V_{i,i}=\mathrm{Tr}(V).$$ On a donc $\mathcal{T}_{I_n}X \subset H$ où $H$ est le noyau de la forme linéaire trace (c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

**Voyons la réciproque**, soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{Tr}(V)=0$. On cherche un arc $\gamma$ tel que $\gamma(0)=I_n$ , $\gamma'(0)=V$ et qui reste dans $X$.

**Analyse** :

On sait que $V_{1,1}+\cdots+V_{n,n}=0$. On cherche une matrice $n\times n$, $\gamma(t)$ qui soit toujours de déterminant 1 et dans laquelle "il y a $V$ qui apparait en dérivant" ! Pas évident.

On fait des cas particuliers par exemple $n=2$ ou bien par exemple le cas d'une matrice $V$ très simple essayons $V=\mathrm{diag}(v_1,\dots,v_n)$ une matrice diagonale, on a donc $v_1+\cdots+v_n=0$. On cherche une matrice $\gamma(t)$ elle aussi diagonale $\gamma(t)=\mathrm{diag}(x_1(t),\dots,x_n(t))$. Il faut $x_1(t)\cdots x_n(t)=1$ sachant que $v_1+\cdots+v_n=0$, on pense à l'exponentielle : $\gamma(t)=\mathrm{diag}(e^{a_1(t)},\dots,e^{a_n(t)})$ et on doit avoir $a_1(t)+\cdots+a_n(t)=0$, comme $\gamma'(0)=\mathrm{diag}(a_1'(0)e^{a_1(0)},\dots,a_n'(0)e^{a_n(0)})=\gamma'(0)=\mathrm{diag}(a_1'(0),\dots,a_n'(0))=V$ , il suffit donc de prendre

$\gamma(t)=\mathrm{diag}(e^{V_{1,1}t},\dots,e^{V_{n,n}t})$ qui n'est rien d'autre que ......$\exp(t\cdot V)$.

**Synthèse** : Posons $\gamma(t)=\exp(t\cdot V)$. On a vu au chapitre équa. diff. que cette fonction était $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ , que $\gamma(0)=I_n$ et que $\gamma'(t)=V\times\exp(t\cdot V)$ et donc $\gamma'(0)=V$.

Voyons si $\gamma(t)$ reste dans $X$. On a vu lors de l'analyse que c'était vrai si $V$ était diagonale, d'où.....réduction on trigonalise $V$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ : $V=PTP^{-1}$ , d'où $e^V=Pe^TP^{-1}$, d'où la très belle et classique formule : $\det e^V=e^{Tr(T)}=e^{Tr(V)}=e^0=1$. **Conclusion**: $\boxed{\mathcal{T}_{I_n}X \text{ est l'ensemble des matrices de trace nulle}}$.

### 4°) ***Extremums locaux***

***Définitions*** : Soit $U$ un ouvert de $E$ , $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ et $a\in U$ :

* $f$ a un **maximum global** en $a$ si $\forall x\in U \quad : \quad f(a)\geqslant f(x)$.
* $f$ a un **minimum global** en $a$ si $\forall x\in U \quad : \quad f(a)\leqslant f(x)$.
* $f$ a un **maximum local** en $a$ si $\exists r>0 \;/\; \forall x\in B(a,r)\cap U \quad : \quad f(a)\geqslant f(x)$.
* $f$ a un **minimum local** en $a$ si $\exists r>0 \;/\; \forall x\in B(a,r)\cap U \quad : \quad f(a)\leqslant f(x)$.
* $f$ a un **maximum global strict** en $a$ si $\forall x\in U \;:\; x\neq a \Longrightarrow f(a)>f(x)$.
* On a de même **maximum local strict, minimum global strict, minimum local strict**.
* Un extremum est soit un maximum, soit un minimum.
* Bref, $2^3=8$ notions : Max/min - strict/large - local/global.

***Définition*** : $a$ est un **point critique** de $f$ si $\boxed{\forall j\in[\![1,p]\!] \quad , \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)=0}$ ou si $\boxed{\mathrm{d}f(a)=0}$ ou si $\boxed{\nabla f(a)=\overrightarrow{0}}$.

**Exemple** : Soit $f$ qui a tout point de la terre associe son altitude.

$f$ présente en $a=$ Mont-blanc un maximum local (et $f(a)=4809$ m)

$f$ présente en $a=$ Everest un maximum global (et $f(a)=8848$ m)

$f$ présente en $a=$ Fosse Marianne un minimum global (et $f(a)=-10984$ m)

$f$ présente en $a=$ Les Moëres (Nord) un minimum local (et $f(a)=-5$ m)

$f$ présente en $a=$ Fosse Calypso un minimum local (point le plus profond de la Méditerranée) (et $f(a)=-5267$ m)

$a=$ Col de l'Iseran (Alpes) est un point critique (et $f(a)=2764$ m)

**Théorème** : (**condition nécessaire**)

$\boxed{\text{Si } f \text{ de classe } C^1 \text{ sur } U, \text{ a un } \textbf{extremum local} \text{ en } a \in U \text{ et } U \text{ } \underline{\textbf{ouvert}} \text{ alors } a \text{ est un } \textbf{point critique}}$.

*Démonstration 25* :

Posons $a = (a_1, \ldots, a_p)$ un extremum local de $f$. Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Considérons $F$ définie par

$F : \mathbf{t} \longmapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, \mathbf{t}, a_{j+1}, \ldots, a_p)$. Comme $U$ est ouvert et que $a \in U$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_F(a, r) \subset U$ (pour la norme infinie). De même il existe $r' > 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{B}_F(a, r') \cap U$ , $f(x) \leqslant f(a)$ (SNALG). Si on pose $r'' = \min(r, r') > 0$, $\forall x \in \mathcal{B}_F(a, r'') \subset U$ , $f(x) \leqslant f(a)$. Donc $F$ est définie et de classe $C^1$ sur $]a_j - r'', a_j + r''[$ et a un extremum local en $a_j$ donc $F'(a_j) = 0$ (**condition nécessaire d'extrémalité d'une fonction d'une <u>variable réelle</u>**). Or $F'(a_j) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$.

**<u>Conclusion</u>** : $\boxed{\forall j \in [\![1, p]\!] \ : \ \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0.}$

**<u>Remarque</u>** : **Attention, la réciproque est fausse**.

***<u>Définition</u>*** : si $a$ est un **point critique** de $f$ et si $f$ n'a pas un extremum local en $a \in U$, alors $a$ est dit $\boxed{\textbf{point selle ou point col}}$.

**<u>Remarque pratique</u>** :

$*$ On couplera éventuellement ces points critiques avec la compacité.

$*$ Pour les extrémums globaux, il faut prendre l'expression $f(a + h) - f(a)$ pour tout $h \in E$ tel que $a + h \in U$. Dans le cas $E = \mathbb{R}^p$ et $U = \mathbb{R}^p$, il pourra être utile d'utiliser l'infini ou de passer en coordonnées polaires, sphériques....

$*$ C'est l'étude des **dérivées partielles secondes et de T.Y. à l'ordre 2** qui pourra (**souvent**) permettre de dire si un point critique est un extremum local ou un point col.

**<u>Exercices</u>** :

**a)** On considère $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(x, y) \longmapsto y^2(y^2 - x^4)$$

• Visualiser sur un dessin ($x$ en abscisses et $y$ en ordonnée), les trois domaines où $f$ est nulle, strictement positive, strictement négative.

• Montrer que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, $\varphi : t \longmapsto f(tu)$ admet un minimum local en 0.

• Montrer que $f$ n'admet pas de minimum local en 0. Conséquence ?

**b)** Déterminer les points critiques de $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$f(x, y) = x^3 + y^3$ , $f(x, y) = x^4 + y^4$ et $f(x, y) = x^2 - 2y^3 + xy$.

**c)** Déterminer les extrémums de $f$ la fonction :

$f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ ,

$x \longmapsto xy(1 - x - y)$ où $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \geqslant 0 \text{ , } y \geqslant 0 \text{ et } x + y \leqslant 1\}$

**d)** Déterminer les extrémums de la fonction det sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

### 5°) ***<u>Optimisation sous contrainte</u>***

On cherche à trouver les éventuelles maximums ou minimums d'un fonction $f$ définie sur un sous-ensemble par forcément ouvert de $U$.

Par exemple on cherche un maximum et un minimum global de $x^3 + y$ avec $(x, y)$ sur la sphère euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$ (c'est la contrainte). On cherche donc les extrémums de la fonction $f$ définie par $f(x, y) = x^3 + y$ sur l'ensemble $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 = 1\}$.

**<u>Premier point</u>** : Dans quels cas importants de tels extremums globaux existe-t-ils ?

Réponse : **Si $X$ est compact avec T.B.A. !**

**<u>Problème</u>** : Que valent-t-ils ? Un théorème va nous servir.

**Théorème d'optimisation sous une contrainte (T.O.C.)**

Soit $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $U$. On pose $X = \{x \in U \text{ tel que } g(x) = 0\}$.

Notons $f/X$ la restriction de $f$ sur $X$. Si $f/X$ admet un extremum local en un point $a \in X$ et si $\mathrm{d}g(a) \neq 0$, alors $\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mathrm{d}f(a) = \lambda\,\mathrm{d}g(a)}$ ($\lambda$ appelé multiplicateur de Lagrange).

*Démonstration 26* :

**Lemme (rappel)** :

Si $\ell$ et $\psi$ sont deux formes linéaires de $E$ dans $\mathbb{R}$ ($E$ un $\mathbb{K}$-ev quelconque) avec $\ell \neq 0$.

On a alors : $\ker \ell \subset \ker \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } \psi = \lambda \ell$.

*Démonstration 27* : Revoir le cours sur $E^*$, le dual de $E$.

On a par le théorème fondamental, $\mathcal{T}_a X = \ker \mathrm{d}g(a)$. Soit $\vec{v} \in \mathcal{T}_a X$, il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma$ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans $X$ tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \vec{v}$.

Considérons $\varphi$ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ par $\varphi(t) = f(\gamma(t))$. $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ par T.G.

Comme $f$ admet en $a$ un extremum local, la fonction $\varphi$ admet un extremum local en 0 sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ qui est ouvert. On a donc $\varphi'(0) = 0$ soit $\varphi'(0) = \mathrm{d}f(\varphi(0)) \cdot \gamma'(0) = \mathrm{d}f(a) \cdot \vec{v} = 0$. On en déduit que $\mathcal{T}_a X \subset \ker \mathrm{d}f(a)$.

On a donc $\ker \mathrm{d}g(a) \subset \ker \mathrm{d}f(a)$ et par le lemme $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{d}f(a) = \lambda\,\mathrm{d}g(a)$.

**Cas où $E$ est euclidien**

Soit $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $U \subset E$ et $E$ euclidien. On pose $X = \{x \in U \text{ tel que } g(x) = 0\}$.

Notons $f/X$ la restriction de $f$ sur $X$. Si $f/X$ admet un extremum local en un point $a \in X$ et si $\nabla g(a) \neq 0$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.

*Démonstration 28* : En appliquant le théorème ci-dessus, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{d}f(a) = \lambda\,\mathrm{d}g(a)$.
$\forall \vec{h} \in E\ (\nabla f(a)|\vec{h}) = \lambda(\nabla g(a)|\vec{h})$ d'où $\forall \vec{h} \in E : (\nabla f(a) - \lambda \nabla g(a)|\vec{h}) = 0$.

On en déduit que $\nabla f(a) - \lambda \nabla g(a) \in E^{\perp} = \{0\}$ et donc que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.

**Exemples**

**a)** Déterminer un maximum et un minimum global de $x^3 + y$ avec $(x, y)$ sur la sphère euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$.

**Réponse** : Posons $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ et $X = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 = 1\}$, on a $f$ et $g$ $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par T.G.

$\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ sur $X$. Par le théorème d'optimisation sous une contrainte, si $(u, v) \in X$ est un extremum de $f$ sur $X$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(u, v) = \lambda \nabla g(u, v) \Longleftrightarrow (3u^2, 1) = \lambda(2u, 2v). \Longleftrightarrow \begin{cases} 3u^2 = 2\lambda u \\ 1 = 2\lambda v \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u = 0 \text{ sinon } \lambda = \dfrac{3}{2}u \\ 1 = 2\lambda v \end{cases}$$

Si $u = 0$, alors $v = \pm 1$ et $f(0, 1) = 1$ et $f(0, -1) = -1$.

Si $u \neq 0$, alors $\lambda = \dfrac{3}{2}u = \dfrac{1}{2v}$, on a donc $u = \dfrac{1}{3v}$. Comme $(u, v) \in X$, $\dfrac{1}{9v^2} + v^2 = 1$. On en déduit 4 valeurs de $v$ : $\pm\sqrt{1/2 + 1/6\sqrt{5}}$ et $\pm\sqrt{1/2 - 1/6\sqrt{5}}$.

Avec une calculatrice, on trouve pour $f(u, v)$ : $-.9796036621, .9796036621, -1.172053752, 1.172053752$.

On en déduit avec TBA que $\max\limits_X f = f\left(\dfrac{1}{3\sqrt{1/2 - 1/6\sqrt{5}}}, \sqrt{1/2 - 1/6\sqrt{5}}\right) \cong 1.172053752$ et

$\min\limits_X f = f\left(-\dfrac{1}{3\sqrt{1/2 - 1/6\sqrt{5}}}, -\sqrt{1/2 - 1/6\sqrt{5}}\right) \cong -1.172053752$.

**Remarque 1** : Donner une autre méthode pour déterminer ces valeurs.

On paramètre le cercle $x = \cos t$ et $y = \sin t$ puis on étudie la fonction $\varphi(t) = f(\cos t, \sin t)$. On trouve alors le maximum pour $t_0 = 1/2 \arcsin(2/3)$.

**Remarque 2** : $(0, 1)$ est un maximum local. Pourquoi ? Au voisinage de $a$, le couple $(x, y)$ vérifie $y > 0$ et donc $f(x, y) = x^3 + \sqrt{1 - x^2}$ au voisinage de $a$. Posons $\varphi(x) = x^3 + \sqrt{1 - x^2}$ au voisinage de $x = 0$. $\varphi$ est dérivable et $\varphi'(x) =$

$3x^2 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{\sim} -x$. On dresse donc le tableau de variations sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ : $\varphi$ est strictement croissante sur $]-\varepsilon, 0]$ et $\varphi$ est strictement décroissante sur $[0, \varepsilon[$.

**b)** $\boxed{\text{L'exercice ccinp : EXERCICE 41 analyse}}$

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \longmapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 13\}$.

1. Justifier que $f$ atteint un maximum et un minimum sur $C$.

2. Soit $(u, v) \in C$ un point où $f$ atteint un de ses extremums.

(a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel $\lambda$ tel que le système $(S)$ suivant soit vérifié :

$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$$

(b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$. En déduire les valeurs possibles de $\lambda$.

3. Déterminer les valeurs possibles de $(u, v)$, puis donner le maximum et le minimum de $f$ sur $C$.

**c)** On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne canonique : $\|A\| = \sqrt{Tr(A^{\mathbf{T}}A)}$.

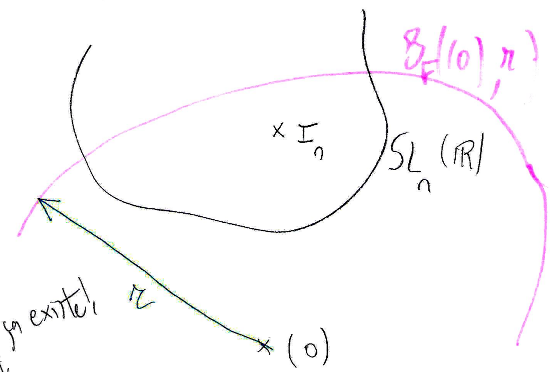
Déterminer un minimum global de $\|A\|^2$ sur $SL_n(\mathbb{R})$ (c'est la contrainte). Y-a-t-il un maximum global ?

**Réponse** :

On cherche donc les extrémums de la fonction $f$ définie par $f(M) = \|M\|^2$ sur l'ensemble $X = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\det M = 1\}$. Posons $g(M) = \det M - 1$, on a $f$ et $g$ $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par T.G. $\nabla g(M) = \left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\right) \neq (0)$ sur $X$ car sinon $comM = (0)$ et comme $\det M = 1$, $M$ est inversible et $M^{-1} = com(M)^{\mathbf{T}} \neq (0)$.

Par le théorème de d'optimisation sous une contrainte, si $A \in X$ est un extremum de $f$ sur $X$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(A) = \lambda \nabla g(A) \iff \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 : 2a_{i,j} = \lambda(-1)^{i+j}\Delta_{i,j} \iff 2A = \lambda com(A) \iff 2A = \lambda(A^{-1})^{\mathbf{T}} \iff 2A^{\mathbf{T}} = \lambda A^{-1} \iff 2A^{\mathbf{T}}A = \lambda I_n$. Et dans ce cas en passant au déterminant : $2^n \det(A)^2 = 2^n = \lambda^n$ donc $\lambda = \pm 2$. Or $\lambda = -2$ est impossible car si $A^{\mathbf{T}}A = -I_n$, en passant à la trace, on obtiendrait $\|A\|^2 = -n$ : absurde.

Donc $\lambda = 2$ et $A^{\mathbf{T}}A = I_n$. D'où les points extrémums $A$ de $f$ sont dans $O_n^+(\mathbb{R})$ et $f(A) = n$.




si ça existe

$$\min_X f = \inf_{M \in X} \|M - (0)\|^2 = d((0), SL_n(\mathbb{R}))^2$$

Soit $r > 0 \setminus I_n \in B_F((0), r)$ (par ex : $r = \|I_n\|$)

On montre que $d((0), SL_n(\mathbb{R})) = d((0), \underbrace{SL_n(\mathbb{R}) \cap B_F((0), r)}_{K})$

car si $M \notin B_F(0, r)$ ; $\|M - (0)\|^2 > r \geq \|I_n - (0)\|^2$.

Or $K$ est compact car fermé et borné, par T.B.A.

$\exists A \in SL_n(\mathbb{R}) \cap B_F((0), r) \setminus \min_X f = f(A)$.

On en déduit que le point $A = I_n$ est un extrémum de $f$ et donc que $f(A) = n$.

<u>**Conclusion**</u>: $\min\limits_X f = n$ , atteint en tout point de $O_n^+(\mathbb{R})$.

Concernant le max : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $A_p = \begin{pmatrix} p & & & \\ & \frac{1}{p} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in SL_n(\mathbb{R})$ et $f(A_p) \geqslant p^2 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En conséquence $f$ n'est pas bornée sur $SL_n(\mathbb{R})$.

**d)** Soit $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 \cdots x_n$. On note $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n ; x_1 + \cdots + x_n = 1\}$

1. Démontrer que $f$ admet un maximum global sur $X$ et le déterminer. Déterminer $f(X)$.

2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a : $\boxed{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}}$.

**6°) <u>*Équation aux dérivées partielles du 1er ordre (le a) est à savoir par coeur)*</u>**

**a)** $\boxed{\text{Déterminer les fonctions } f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ sur } U\text{, un ouvert } \textbf{convexe} \text{ tel que : } \boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ sur } U}}$

**b)** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$, tel que : $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + y^2}$.

**c)** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$, tel que : $\boxed{x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2}$. Pour cette équation, on effectuera le CdV polaire $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

Même question avec $f : U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x > 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

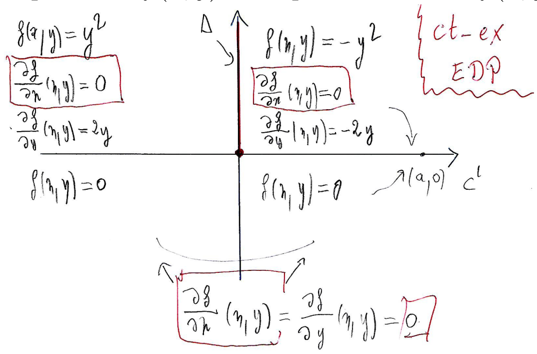
**a)** <u>**Commençons par un contre-exemple**</u> :

On considère $U = \mathbb{R}^2 - \Delta$ où $\Delta = \{(0, y)\ ,\ y \geqslant 0\}$. Il est clair que $\Delta$ est fermé (comme image réciproque....) et donc que $U$ est ouvert. Il est clairement étoilé par rapport au point $(0, -1)$ et donc <u>**connexe par arc**</u>.

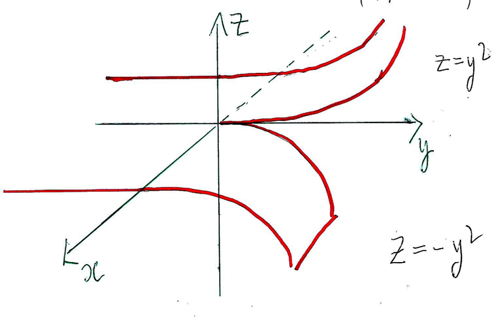
On considère $f$ définie sur $U$ par $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ -y^2 & \text{si } y > 0 \text{ et } x > 0 \\ y^2 & \text{si } y > 0 \text{ et } x < 0 \end{cases}$

Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $U$ et que $\boxed{\forall (x, y) \in U : \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0}$.

Et pourtant $f(x, y)$ n'est pas de la forme $f(x, y) = \varphi(y)$ !




$U=\mathbb{R}^2\setminus\Delta$ ouvert cx/arc et n̂ étoilé (/. à ...)



**Théorème fondamental** :

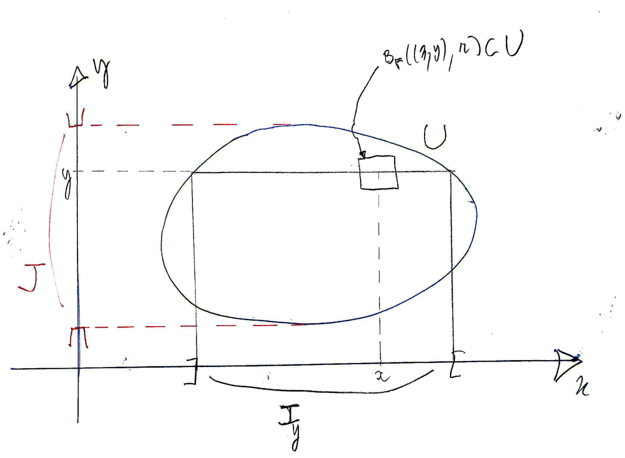
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ où $U$ est un ouvert $\boxed{\textbf{CONVEXE}}$ de $\mathbb{R}^2$ et $f$ de classe $C^1$ sur $U$.

On suppose que $\boxed{\forall (x,y) \in U \quad : \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0}$.

Alors il existe un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ , il existe une fonction $\Phi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $J$ tels que

$$\boxed{\forall (x,y) \in U \quad : \quad f(x,y) = \Phi(y)}.$$

*Démonstration 29* :




• Notons $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ , $(x,y) \longmapsto x$ et $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ , $(x,y) \longmapsto y$ et posons

$$J = q(U) = \Big\{ y \in \mathbb{R} \text{ tel que } \exists x \in \mathbb{R} \text{ et } (x,y) \in U \Big\} .$$

Montrons que $J$ est un ouvert connexe par arc de $\mathbb{R}$, donc un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

$*$ $q$ étant linéaire, elle est continue sur $\mathbb{R}^2$ et donc $J$ est connexe par arc comme image de $U$ connexe par arc car convexe.

$*$ $\forall y \in J$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) \in U$, donc il existe $r > 0$ tel que $B_F((x,y),r) \subset U$ pour la norme infinie canonique de $\mathbb{R}^2$ ($\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$).

On en déduit que $\forall z \in [y-r, y+r]$ , $(x,z) \in B_F((x,y),r) \subset U$ et donc $[y-r,y+r] \subset J$ et $J$ est ouvert.

• Soit $y_0 \in J$, posons $I_{y_0} = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y_0) \in U\}$. Montrons que $I_{y_0}$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

$*$ $\forall (x_1,x_2) \in I_{y_0}^2$ avec $x_1 < x_2$ et soit $t \in [0,1]$.

On a $(x_1,y_0) \in U$ , $(x_2,y_0) \in U$ et $(1-t)(x_1,y_0) + t(x_2,y_0) \in U$ car $U$ est **convexe**.

Or $(1-t)(x_1,y_0) + t(x_2,y_0) = ((1-t)x_1 + tx_2, y_0)$, donc $(1-t)x_1 + tx_2 \in I_{y_0}$.

$*$ $\forall x \in I_{y_0}$, $(x,y_0) \in U$, donc il existe $r > 0$ tel que $B_F((x,y_0),r) \subset U$ (toujours pour la norme infinie).

On en déduit que $\forall x' \in [x-r,x+r]$ , $(x',y_0) \in B_F((x,y_0),r) \subset U$ et donc $[x-r,x+r] \subset I_{y_0}$ et $I_{y_0}$ est ouvert.

• On considère la fonction $\varphi_{y_0} : I_{y_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ , $x \longmapsto f(x,y_0)$.

Par T.G. , $\varphi_{y_0}$ est de classe $C^1$ sur $I_{y_0}$ et $\forall x \in I_{y_0}$ : $\varphi'_{y_0}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y_0) = 0$ .

Comme $I_{y_0}$ est un **intervalle**, la fonction $\varphi_{y_0}$ est constante sur $I_{y_0}$ : il existe $C_{y_0} \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I_{y_0} : f(x,y_0) = C_{y_0}$.

• Posons $\Phi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ , $y \longmapsto C_y$ et montrons que $\Phi$ convient.

$*$ $\Phi$ est bien définie sur $J$.

$*$ $\forall (x,y) \in U$ , $y \in J$ et $x \in I_y$, donc $f(x,y) = C_y = \Phi(y)$.

$*$ Montrons que $\Phi$ est $C^1$ sur $I$. **Problème** : Si $y \in J$, $\Phi(y) = f(x,y)$ avec $x$ quelconque dans $I_y$, on ne peut donc même pas contrôler la continuité de $\Phi$.

Cependant, soit $y_0 \in J$ et soit $x_0 \in I_{y_0}$, on a donc $(x_0,y_0) \in U$ : il existe $r > 0$ tel que $B_F((x_0,y_0),r) \subset U$.

On a donc $\forall y \in [y_0 - r, y_0 + r]$ , $x_0 \in I_y$ et donc $\Phi(y) = f(x_0, y)$.

On en déduit que $\Phi$ est de classe $C^1$ sur $]y_0 - r, y_0 + r[$ et $\Phi'(y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$.

**Conclusion**: $\boxed{\text{Il existe } J \subset \mathbb{R} \text{ et il existe } \Phi : J \longrightarrow \mathbb{R} \text{ , } C^1 \text{ sur } J \text{ , tels que } \forall(x,y) \in U \quad : \quad f(x,y) = \Phi(y)}$.

**b)**

On peut faire comme pour une équation différentielle standard linéaire : on cherche les solutions de l'équation homogène et on cherche une solution particulière.

En effet si $f_1$ et $f_2$ sont solutions de cette E.D.P. alors $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = x + y^2$ et $\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = x + y^2$.

On soustrait ces deux égalités , il vient $\dfrac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial y} = 0$, donc $f_1 - f_2$ est solution de l'équation homogène : $\boxed{\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0}$.

Conséquence, si $f_0$ est une solution particulière , l'ensemble des solutions de l'équation est

$$S_E = \{f_0 + g \text{ où } g \text{ est solution de } \frac{\partial g}{\partial y} = 0\}$$

$*$ **Équation homogène** : grâce au théorème fondamental, comme $\mathbb{R}^2$ est **convexe** , $g$ est solution de $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ si et seulement si il existe $\varphi : I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ tel que $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = \varphi(x)$, où $I = \mathbb{R}$ est le projeté de $\mathbb{R}^2$ sur l'axe des abscisse.

$*$ **Une solution particulière** est $f_0(x,y) = xy + \dfrac{y^3}{3}$ (on a intégré par rapport à $y$).

**Conclusion**:

$$\boxed{S_E = \left\{ \ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ , } (x,y) \longmapsto xy + \frac{y^3}{3} + \varphi(x) \quad , \quad \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad C^1 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} \ \right\}}$$

**Remarques importantes** :

- L'ensemble des solutions de cette E.D.P. linéaire du premier ordre est un $\mathbb{R}$-ev de dimension **infinie !**
- Une solution $f$ de cette équation ne sera pas fixée par la valeur de $f$ en un point mais en une infinité de points.

**c) i)** Soit $f$ une solution de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation $\boxed{\textbf{(E)} : x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2}$ .

Soit $g$ définie par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, par TG $g$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On a : $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \sin\theta$, donc

$r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, donc $\boxed{r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r^2}$ .

On a donc $\forall(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$ , si $r \neq 0$ alors $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r$

Or $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc $\forall\theta \in \mathbb{R}$ , $\dfrac{\partial g}{\partial r}(0,\theta) = \lim\limits_{\substack{r \to 0 \\ \neq}} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \lim\limits_{\substack{r \to 0 \\ \neq}} r = 0$.

On en déduit donc que : $\boxed{\forall(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r}$ .

Comme $\mathbb{R}^2$ est **convexe**, il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ tel que :

$\forall(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : g(r,\theta) = \dfrac{r^2}{2} + \varphi(\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Fixons $\theta \in \mathbb{R}$ et faisons $r = 0$ , $g(0,\theta) = \dfrac{0^2}{2} + \varphi(\theta)$, ce qui donne $g(0,\theta) = 0 + \varphi(\theta) = f(0,0)$.

On en déduit donc que $\varphi$ est constante sur $\mathbb{R}$ et donc qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : g(r,\theta) = \dfrac{r^2}{2} + k$.

Comme $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ , $\exists(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ , on en déduit que

$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r,\theta) = \dfrac{r^2}{2} + k = \dfrac{x^2 + y^2}{2} + k$.

Réciproquement , si $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2} + k$, alors on vérifie facilement que $f$ est solution de **(E)** sur $\mathbb{R}^2$

**Conclusion**: $\boxed{S_E = \left\{ \ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ , } (x,y) \longmapsto \dfrac{x^2 + y^2}{2} + k \quad , \quad k \in \mathbb{R} \right\}}$

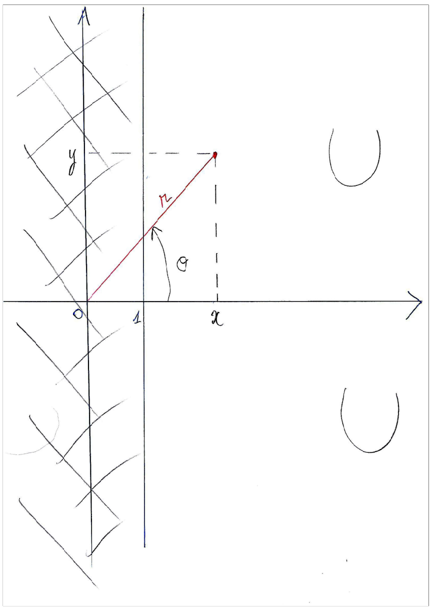
**ii)** Soit $f$ une solution de classe $C^1$ sur $U$ de l'équation $\boxed{\textbf{(E)} : x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2}$ .

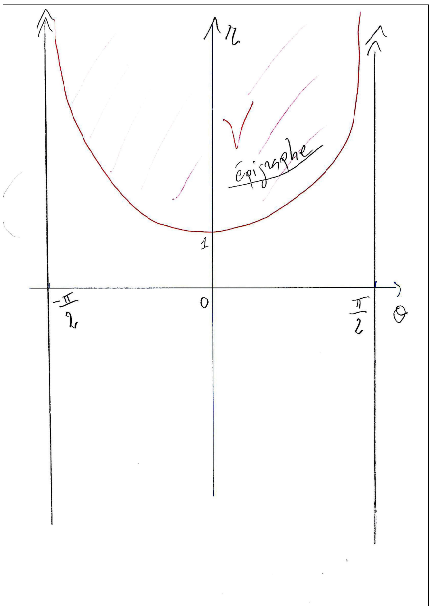
Comme pour l'équation précédente, on passe en polaire $\forall (x,y)\in U$ , $\exists (r,\theta)\in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Déterminons les domaines de $r$ et $\theta$. Pour cela on commence par faire un dessin puis comme toujours (en physique) on prend $r\geqslant 0$, comme $x>1$, $r>0$ et $\theta \in ]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$.

La condition $x>1$ devient $r\cos\theta > 1 \iff r > \dfrac{1}{\cos\theta}$.

En résumé le domaine $U$ est défini par $\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \qquad \theta\in ]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[ \text{ et } r>\dfrac{1}{\cos\theta}\end{cases}}$




On dessine $V$ (avec les axes $(O\theta r)$). On en déduit que **$V$ est convexe** comme épigraphe de la fonction $h$ définie par $h(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta}$ sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ et dont la dérivé seconde est $h''(\theta) = \dfrac{(2\sin(\theta)^2+\cos(\theta)^2)}{\cos(\theta)^3} \geqslant 0$ et donc $h$ convexe.

Si on pose $\gamma : \mathbb{R}\times ]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[ \longrightarrow \mathbb{R}$ , $(r,\theta)\longmapsto r-\dfrac{1}{\cos\theta}$ , alors on a $V=\gamma^{-1}(]0,+\infty[)$ et comme $\gamma$ est continue par TG, $V$ est un ouvert relatif à $\mathbb{R}\times]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ : il existe $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $V=\Omega\cap\mathbb{R}\times]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$. Or un produit d'ouvert est un ouvert , donc $\mathbb{R}\times]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et par intersection finie d'ouverts, **$V$ est ouvert**.

Avec les notations de la résolution du premier cas, la fonction $g$ définie par $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ est par TG $C^1$ sur $\boxed{V=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } \theta\in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[ \text{ et } r>\dfrac{1}{\cos\theta}\right\}}$.

Les calculs sont rigoureusement les mêmes et on obtient donc que $f$ est une solution sur $U$ de l'équation **(E)** : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2+y^2$ **si et seulement si** $g$ est solution sur $V$ de l'équation $\boxed{\textbf{(E')} : \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=r}$.

Comme $V$ est **convexe**, par le théorème fondamental il existe une fonction $\varphi$ :$]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[\longrightarrow\mathbb{R}$ , de classe $C^1$ sur $J=]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$, tel que : $\forall(r,\theta)\in V : g(r,\theta)=\dfrac{r^2}{2}+\varphi(\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

Maintenant , il faudrait déterminer l'expression de $f(x,y)$ en fonction de $x$ et $y$ (et non à l'aide de $r$ et $\theta$).

Posons $\Phi\ :\ V \longrightarrow U$

$(r,\theta)\longmapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$

On a $g=f\circ\Phi$ et comme $\Phi$ est de classe $C^1$ sur $V$ (et même sur $\mathbb{R}^2$), on a l'implication : $f$ solution de classe $C^1$ sur $U$ de l'équation **(E)** $\boxed{\Longrightarrow}$ $g$ solution de classe $C^1$ sur $V$ de **(E')**.

Pour avoir l'équivalence et l'expression de $f$, déterminons $\Phi^{-1}$ et montrons qu'elle est aussi de classe $C^1$ sur $U$ :

Si $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \qquad \theta\in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[ \text{ et } r>\dfrac{1}{\cos\theta}\end{cases}$

alors $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et comme $x\neq 0$, $\dfrac{y}{x}=\tan\theta$ et comme $\theta\in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ , $\dfrac{y}{x}=\tan\theta \iff \theta=\arctan(\dfrac{y}{x})$, on en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}\Phi^{-1}: U & \longrightarrow & V \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \arctan(\frac{y}{x})\right)\end{array}$$

Enfin on : $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r,\theta) = \dfrac{r^2}{2} + \varphi(\theta) = \dfrac{x^2+y^2}{2} + \varphi\Big(\arctan(\frac{y}{x})\Big)$.

De plus comme arctan est bijective , de classe $C^1$ et de réciproque aussi de classe $C^1$,

$\{\varphi\circ\arctan,\ \varphi : J = ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}\}\ =\ \{\psi,\ \psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}\}$.

**Conclusion**:

$$\boxed{S_E = \left\{\ f : U \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x,y)\longmapsto \frac{x^2+y^2}{2} + \psi\Big(\frac{y}{x}\Big)\quad ,\ \psi : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}\ \right\}}$$

## C) DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE k⩾ 2

### 1°) *Dérivées partielles d'ordre* 2

Soit U un ouvert de $E$ , $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de $E$, et $f$ une application de $U$ dans $F$.

***Définition 1*** : On dit que $f$ admet une **dérivée partielle d'ordre 2** par rapport à $x_i$ et $x_j$ en $a\in U$ (relativement à la base $\mathcal{B}$) si $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ existe sur un voisinage ouvert de $a$ et admet une dérivée partielle en $a$ par rapport à $x_i$ : $\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}(a)$.

Cette dérivée est notée : $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a) \text{ ou } \partial_{i,j}f(a) \qquad \text{et} \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_i}(a) \text{ est notée : } \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)}$

***Définition 2*** :

$$\boxed{f \text{ est } \textbf{de classe } C^2 \textbf{ sur } U \text{ si } \forall (i,j)\in[\![1,p]\!]^2\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} \text{ existe et est continue sur } U.}$$

**Théorème de Schwarz** :

$$\boxed{\text{Si } f \text{ admet des dérivées partielles secondes } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i} \text{ qui sont } \textbf{continues en } a \text{ , alors } \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)}}$$

**Corolaire important** : si $f$ est $C^2$ sur $U$, on a l'égalité précédente en tout point de $U$.

*Démonstration 30* : On va SNALGer !

- Quitte à prendre les fonctions coordonnées, on peut se ramener (SNALG) à une fonction $f$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Quitte à faire un retour en $\overrightarrow{0}$ avec $x\longmapsto f(a+x)$, on peut donc (re-SNALG) supposer que $a=\overrightarrow{0}$
- Soit $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$, on va étudier l'expression $(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}})\longmapsto f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{i-1},\underline{\mathbf{x}},x_{i+1},\dots,x_{j-1},\underline{\mathbf{y}},x_{j+1},\dots,x_p)$.

On peut donc (re-re-SNALG) considérer $f$ de deux variables : $\boxed{(x,y)\longmapsto f(x,y)}$.

- Étudions la fonction $\Phi(x,y) = f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0)$, Comme $f$ admet des dérivées partielles secondes continues en $(0,0)$, $\Phi$ aussi.

Regroupons les termes de $\Phi(x,y)$ de deux manières :

$*$ $\Phi(x,y) = \Big[f(x,y) - f(x,0)\Big] - \Big[f(0,y) - f(0,0)\Big]$, si on pose $\varphi(x) = f(x,y) - f(x,0)$, on a alors $\Phi(x,y) = \Big[\varphi(x)\Big] - \Big[\varphi(0)\Big] = (x-0)\varphi'(c) = (x-0)\Big[\dfrac{\partial f}{\partial x}(c,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(c,0)\Big] = (x-0)(y-0)\Big[\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(c,d)\Big]$ , avec $c$ entre $x$ et 0 et $d$ entre $y$ et 0.

On en déduit par le théorème d'encadrement (lorsque $x$ et $y$ tendent vers 0, $c$ et $d$ aussi (pour être très rigoureux, on pourra faire un raisonnement avec $\varepsilon>0$ exactement comme le théorème T.L.D.) que :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to 0\\ x\neq 0, y\neq 0}} \frac{\Phi(x,y)}{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

$*$ $\Phi(x,y) = \Big[f(x,y) - f(0,y)\Big] - \Big[f(x,0) - f(0,0)\Big]$, si on pose $\psi(y) = f(x,y) - f(0,y)$, on a alors $\Phi(x,y) = \Big[\psi(y)\Big] - \Big[\psi(0)\Big] = (y-0)\psi'(c) = (y-0)\Big[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,c) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,c)\Big] = (y-0)(x-0)\Big[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(d,c)\Big]$ , avec $c$ entre $x$ et 0 et $d$ entre $y$ et 0.

On en déduit de même que : $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to 0\\ x\neq 0, y\neq 0}} \dfrac{\Phi(x,y)}{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

On conclut par unicité de la limite $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to 0\\ x\neq 0, y\neq 0}} \dfrac{\Phi(x,y)}{xy}$ : $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).}$

**2°) *Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$ - Fonctions $C^k$***

***Définition 1*** : On a la même définition, (par récurrence) que pour les dérivées partielles secondes, pour définir les dérivées partielles d'ordre $k$. Il y a donc $p^k$ dérivées partielles d'ordre $k$ pour une fonction de $p$ variables.

**Notation** : $\boxed{\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}(a) \quad \text{ou} \quad \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} f(a)}$

***Définition 2*** : On dit qu'une fonction $f$ est **de classe** $C^k$ **sur** $U$ si $f$ admet toutes ses dérivées partielles d'ordre $k$ et si toutes ces dérivées partielles sont continues sur $U$.

***Définition 3*** : On dit que $f$ est **de classe** $C^\infty$ **sur** $U$ si $f$ est de classe $C^k$ sur $U$ pour tout entier $k$.

**Proposition 1** :

$\boxed{\text{Si } f \text{ est de classe } C^k \text{ sur } U \text{ , alors elle est de classe } C^{\,i} \text{ sur } U \text{ pour tout } i \leqslant k}$.

*Démonstration 31* : On démontre la proposition par récurrence descendante. Supposons que $f$ soit de classe $C^{\,i}$ avec $1 \leqslant i \leqslant k$ et montrons que $f$ est $C^{\,i-1}$ sur $U$.

Toutes les dérivées partielles d'ordres $i-1$ existent sur $U$. Toutes ces dérivées partielles admettent des dérivées partielles d'ordre 1 et qui sont continues sur $U$ car ce sont des dérivées partielles d'ordres $i$.

Par le théorème fondamental, ces dérivées partielles d'ordres $i-1$ sont de classe $C^1$ donc continues sur $U$ et donc $f$ est de classe $C^{\,i-1}$.

**Proposition 2** :

$\boxed{f \text{ est de classe } C^k \text{ sur } U \text{ \textbf{SSI} toutes les dérivées partielles de } f \text{ d'ordre 1 existent et sont de classe } C^{k-1} \text{ sur } U}$.

*Démonstration 32* :

$\Longrightarrow$ ] D'après la proposition précédente, si $f$ est de classe $C^k$, alors $f$ est $C^1$ sur $U$ et donc toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 existent. Ces dérivées partielles d'ordre 1 admettent des dérivées partielles d'ordre $k-1$, ce sont les dérivées partielles d'ordre $k$ de $f$ qui sont continues sur $U$, donc les dérivées partielles d'ordre 1 de $f$ sont de classe $C^{k-1}$ sur $U$.

$\Longleftarrow$ ] Toutes les dérivées partielles d'ordre $k$ de $f$ sont des des dérivées partielles d'ordre $k-1$ des dérivées partielles d'ordre 1 de $f$ , on en déduit donc que $f$ est $C^k$ sur $U$.

**Proposition 3** : Théorème de Schwarz

$\boxed{\text{Si } f \text{ est de classe } C^k \text{ sur } U, \text{ alors pour toute permutation } \sigma \in \mathcal{S}_k : \dfrac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(j_1)} \cdots \partial x_{\sigma(j_k)}}(a) = \dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}(a)}$.

*Démonstration 33* :

Par le théorème de Schwarz, c'est vraie pour toute transposition $\sigma = (i\ j)$ et comme les transpositions engendrent le groupe symétrique $\mathcal{S}_k$, c'est vrai pour toute permutation de $\mathcal{S}_k$.

**Conséquence** : Nombre de dérivées partielles d'ordre $k$ si $\dim E = p$.

*Démonstration 34* :

Sans le théorème de Schwarz, les dérivées partielles d'ordre $k$ sont de la forme $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}(a)$ où $(j_1, \ldots, j_k) \in [\![1, p]\!]^k$ , il y a donc $\boxed{p^k}$ dérivées partielles d'ordre $k$.

Avec le théorème de Schwarz, les dérivées partielles d'ordre $k$ sont de la forme $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}}(a)$ , où $(s_1, \ldots, s_p) \in [\![0, k]\!]^p$ et tel que $s_1 + \cdots + s_p = k$.

Par exemple pour une fonction de 3 variables : $x, y, z$ une dérivée 10-ième de $f$ est par exemple

$$\frac{\partial^{10} f}{\partial x^3 \partial y^2 \partial z^5}(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^{10} f}{\partial x^5 \partial y^3 \partial z^2}(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^{10} f}{\partial x^8 \partial y^2 \partial z^0}(a) = \frac{\partial^{10} f}{\partial x^8 \partial y^2}(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^{10} f}{\partial x^{10} \partial y^0 \partial z^0}(a) = \frac{\partial^{10} f}{\partial x^{10}}(a) \;......$$

C'est un classique du dénombrement :

À un $p$-uplet $(s_1,\ldots,s_p)\in[\![0,k]\!]^p$ tel que $s_1+\cdots+s_p=k$ , on associe bijectivement le $p-1$-uplet :

$(s_1+1\ ,\ s_1+s_2+2\ ,\ s_1+s_2+s_3+3\ ,\ \ldots,s_1+s_2+\cdots+s_{p-1}+p-1)$

Or le nombre de $p-1$-uplets : $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{p-1}<p-1+k$ est exactement $\begin{pmatrix}k+p-1\\p-1\end{pmatrix}$.

**Conclusion**: $\boxed{\text{Il y a donc } \begin{pmatrix}k+p-1\\p-1\end{pmatrix} \text{ dérivées partielles d'ordre } k \text{ pour une fonction de } p \text{ variables}}$.

**Proposition 4** :

$\boxed{\text{La notion de classe } C^k \text{ sur } U \text{ ne dépend pas de la base } \mathcal{B} \text{ choisie}}$.

*Démonstration 35* :

On sait que si une fonction admet des dérivées partielles d'ordre 1 pour une base donnée et que ces dérivées partielles sont continues alors elle est différentiable et donc admet des dérivées partielles continues pour tout autre base.

**Théorèmes généraux** :

Si $f$ et $g$ sont de classe $C^k$ de l'ouvert $U\subset E$ dans $F$ avec $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, si $\lambda\in\mathbb{K}$ , $B$ est bilinéaire alors :

**i)** $\lambda f+g$ de classe $C^k$ sur $U$ ,

**ii)** $B(f,g)$ et donc $f\times g$ , $(f|g)$... de classe $C^k$ sur $U$ ,

**iii)** $h\circ f$ de classe $C^k$ sur $U$ (avec $h$ de classe $C^k$ de $V\subset F$ et $f(U)\subset V$),

**iv)** Si $f$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors $fg$ est aussi de classe $C^k$ sur $U$.

**v)** Si $f$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et qui ne s'annule pas sur $U$, alors $\dfrac{1}{f}$ est aussi $C^k$ sur $U$.

**vi)** Enfin tout cocktail constitué des fonctions usuelles (exp, cos, arctan,ln, ....) , des fonctions polynômiales, des signes $+,-,\times,/,\circ,\sqrt{\ }$ sont de classe $C^\infty$ sur leur domaine de "dérivation" .

*Démonstration 36*

**i)** Évident pour $\lambda f+g$

**ii)** On démontre la proposition par récurrence.

$*$ C'est vrai si $k=0$ (voir E.V.N.)

$*$ **Rappel** : $\dfrac{\partial B(f,g)}{\partial x_j}(x)=B\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x),g(x)\Big)+B\Big(f(x),\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(x)\Big)$ et donc $\dfrac{\partial B(f,g)}{\partial x_j}=B\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_j},g\Big)+B\Big(f,\dfrac{\partial g}{\partial x_j}\Big)$ .

$*$ Supposons que ce soit vraie pour $k-1$, soit $f$ et $g$ de classe $C^{\,k}$ sur $U$ avec $k\geqslant 1$.

D'après le rappel , la **proposition 1** et l'hypothèse de récurrence, $B\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_j},g\Big)$ et $B\Big(f,\dfrac{\partial g}{\partial x_j}\Big)$ sont de classe $C^{\,k-1}$ sur $U$.

Puis par linéarité $B\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_j},g\Big)+B\Big(f,\dfrac{\partial g}{\partial x_j}\Big)=\dfrac{\partial B(f,g)}{\partial x_j}$ est de classe $C^{\,k-1}$ sur $U$.

On conclut avec la **proposition 2** que $B(f,g)$ est de classe $C^k$.

**iii)** On démontre la proposition par récurrence.

$*$ C'est vrai si $k=0$ (voir E.V.N.)

$*$ Supposons que ce soit vraie pour $k-1$, soit $f$ et $h$ de classe $C^{\,k}$ avec $k\geqslant 1$.

Soit $\mathcal{C}=(e'_1,\ldots,e'_n)$ une base de $F$ et $f_1,\ldots,f_n$ les fonctions coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ de $f$.

On peut donc identifier $h\circ f(x)$ à $h(f_1(x),\ldots,f_n(x))$ .

Par la règle de la chaine , on a : $\dfrac{\partial(h\circ f)}{\partial x_j}=\displaystyle\sum_{i=1}^n\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\times\Big(\dfrac{\partial h}{\partial y_i}\circ f\Big)$

Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial y_i}$ sont de classe $C^{k-1}$ par la **proposition 2** et comme $f$ et $h$ sont de classe $C^k$, elles sont aussi de classe $C^{k-1}$.

On en déduit par hypothèse de récurrence que les dérivées partielles $\dfrac{\partial h}{\partial y_i}\circ f$ sont de classe $C^{k-1}$.

Par somme et produit (c'est les **i)** et **ii)**) , les dérivées partielles $\dfrac{\partial(h\circ f)}{\partial x_j}$ sont de classe $C^{k-1}$.

On conclut avec la **proposition 2** que $h\circ f$ est de classe $C^k$.

**iv)** Immédiat avec le **ii)** et $B(x,y) = xy$ sur $\mathbb{C}^2$, bilinéaire.

**v)** On applique le iii) avec $h(t) = \dfrac{1}{t}$ de classe $C^k$ sur $\mathbb{C}^*$.

**vi)** On applique les règles **i)** , **ii)** , **iii)** , **iv)** , **v)** .

***Définition 4*** : Soit $U$, un ouvert de $E$ .

$\boxed{C^k(U,F) = \{f : U \longrightarrow F \ , \ f \text{ de classe } \mathrm{C}^k \text{ sur } \mathrm{U}\ \}}$ et $\boxed{C^k(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ f \text{ de classe } \mathrm{C}^k \text{ sur } \mathrm{U}\ \}}$

**Théorème** : $\boxed{(\ C^k(U)\ ,\ +\ ,\ \cdot\ , \times\ ) \text{ est une } \mathbb{R}\textbf{-algèbre}}$

*Démonstration 37* : Exercice facile avec les théorèmes généraux.

**Exemples** :

**a)** $f$ définie par $f(x,y,z) = \dfrac{\sin(xy) + e^{\sqrt{z}} + \arctan(x+y+z)}{x+2y+3z}$ est, **par T.G.**, de classe $C^\infty$ sur $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x + 2y + 3z \neq 0$ et $z > 0\ \}$.

**b)** $f(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+iy)^n$ est $C^\infty$ sur $U = D_o(0,R) \subset \mathbb{R}^2$ (pour $\|_2$ norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$ et $R$ le rayon de convergence de la série entière) et montrer que $f$ est harmonique, c'est-à-dire que $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur $U$.

**Réponse** :

Montrons d'abord que $f$ est $C^1$ sur $U$.

Fixons $y \in ]-R,R[$ et posons $u_n(x) = a_n(x+iy)^n$.

$u_n$ est de classe $C^1$ sur $I = \Big] -\sqrt{R^2-y^2}, \sqrt{R^2-y^2}\Big[$ et $\forall x \in I : u_n'(x) = na_n(x+iy)^{n-1}$.

On a $\forall x \in I \quad : \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+iy)^n = f(x,y)$ .

- $(\sum u_n)$ converge simplement sur $I$ car si $x \in I$ , $|x+iy| < R$.
- $u_n$ est de classe $C^1$ sur $I$ par TG,
- (HD) :

$\forall a > 0$ et $a < \sqrt{R^2-y^2} \quad , \ \forall x \in [-a,a] \quad : \quad |u_n'(x)| \leqslant n|a_n|(\sqrt{x^2+y^2})^{n-1} \leqslant n|a_n|(\sqrt{a^2+y^2})^{n-1} = \alpha_n$.

Comme $\sqrt{a^2+y^2} < R$, $(\sum \alpha_n)$ converge (la série dérivée d'une série entière a le même rayon de convergence : $R$) et il y a donc convergence normale de $(\sum u_n')$ sur $[-a,a]$.

On peut donc appliquer le théorème $C^1$ sur les séries de fonctions :

La fonction $x \longmapsto f(x,y)$ est donc dérivable en tout point de $I$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1}$

On a vu que l'application $z \in D_o(0,R) \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ était continue sur $D_o(0,R)$ (cours sur les séries entières). On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $U$.

On a la même chose pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ qui est continue sur $U$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} i\ na_n(x+iy)^{n-1}$ .

On en déduit que $f$ est de classe $C^1$ sur $U$ ainsi toute fonction série entière est de classe $C^1$ sur sur son disque (ouvert) de convergence. En conséquence $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ qui sont définies par la série entière (de même rayon) sont aussi de classe $C^1$ sur $U$ et donc $f$ est de classe $C^2$ sur $U$. Par récurrence , si toute fonction définie par une série entière est de classe $C^k$ sur $U$, elle est de classe $C^1$ sur $U$ et ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont donc de classe $C^k$ et donc $f$ est de classe $C^{k+1}$ sur $U$.

**Conséquence** :

$\Delta(f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ n(n-1)a_n(x+iy)^{n-2} + i^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \ na_n(x+iy)^{n-2} = 0 \ (1+i^2=0)$.

## 3°) *Équations aux dérivées partielles d'ordre* 2

**Exercice** :

**a)** Déterminer les fonctions $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur $U$, un ouvert **convexe non vide** tel que :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin(x) + 7x \arctan y \text{ sur } U}.$$

**Réponse** :

Soit $f$ une solution de classe $C^2$ sur $U$, solution de **(E)** : $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin(x) + 7x \arctan y \text{ sur } U}$.

Posons $g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. On a $g$ qui est de classe $C^1$ sur $U$ et solution de **(E')** : $\frac{\partial g}{\partial x} = \sin(x) + 7x \arctan y$ sur $U$.

Comme pour les EDP du premier ordre, comme $U$ est **convexe**, par le théorème fondamental, il existe $J = q(U)$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (notation de la démo. du théorème fondamental du **B6°)** ) et il existe $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $J$ telle que $\forall (x,y) \in U : g(x,y) = -\cos(x) + 7\frac{x^2}{2} \arctan y + \varphi(y)$ (solution particulière : on intègre par rapport à $x$ + solution générale de l'équation homogène). On a donc $\forall (x,y) \in U : \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\cos(x) + 7\frac{x^2}{2} \arctan y + \varphi(y)$.

On refait la même chose : comme $U$ est **convexe**, par le théorème fondamental, il existe $I = p(U)$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et il existe $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $I$ telle que $\forall (x,y) \in U$ :

$f(x,y) = -\cos(x)y + 7\frac{x^2}{2}(y \arctan y - \frac{1}{2}\ln(y^2+1)) + \int_b^y \varphi(t)\, dt + \psi(x)$ (solution particulière : on intègre par rapport à $y$ +solution générale de l'équation homogène), où l'on a choisit $b \in J$.

Comme $\varphi$ est de classe $C^1$, $y \longmapsto \int_b^y \varphi(t)\, dt$ est de classe $C^2$ sur $U$ (MPSI). Posons $\Phi(y) = \int_b^y \varphi(t)\, dt$ .

On a donc $\forall (x,y) \in U : \psi(x) = f(x,y) - \Big[-\cos(x)y + 7\frac{x^2}{2}(y \arctan y - \frac{1}{2}\ln(y^2+1)) + \Phi(y)\Big]$ et par T.G., $\psi$ est de classe $C^2$ sur $U$ . On en déduit que

$$\boxed{S_E = \Big\{ f : (x,y) \in U \longmapsto -\cos(x)y + \frac{7x^2}{2}(y \arctan y - \frac{1}{2}\ln(y^2+1)) + \Phi(y) + \psi(x) \ , \ \Phi \text{ de classe } C^2 \text{ sur } J \text{ et } \psi \text{ de classe } C^2 \text{ sur } I \Big\}}$$

**b)** Déterminer les fonctions $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur $U$, un ouvert **convexe non vide** tel que :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } U}.$$

**Réponse** :

Soit $f$ une solution de classe $C^2$ sur $U$, solution de **(E)** : $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } U}$.

Posons $g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. On a $g$ qui est de classe $C^1$ sur $U$ et solution de **(E')** : $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ sur $U$.

Comme pour les EDP du premier ordre, comme $U$ est **convexe**, par le théorème fondamental, il existe $J = q(U)$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et il existe $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $J$ telle que $\forall (x,y) \in U : g(x,y) = \varphi(y)$.

On a donc $\forall (x,y) \in U : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi(y)$

On refait la même chose : comme $U$ est **convexe**, par le théorème fondamental, il existe $J = q(U)$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et il existe $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $J$ telle que $\forall (x,y) \in U : f(x,y) = \varphi(y)x + \psi(y)$ .

Ici $\varphi$ et $\psi$ ne sont à priori que de classe $C^1$, cependant comme $U$ , $I = p(U)$ et $J$ sont des ouverts non vide, ils sont infinis : soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a \neq b$ :

$\forall y \in J : f(a,y) = \varphi(y)a + \psi(y)$ et $f(b,y) = \varphi(y)b + \psi(y)$. On en déduit que

$\forall y \in J : \varphi(y) = \frac{f(a,y) - f(b,y)}{a-b}$ et $\forall y \in J : \psi(y) = f(a,y) - \varphi(y)a$.

Donc, par T.G. , $\varphi$ puis $\psi$ sont de classe $C^2$ sur $J$. On en déduit que

$$\boxed{S_E = \Big\{ f : (x,y) \in U \ , \ (x,y) \longmapsto \varphi(y)x + \psi(y) \ , \ \varphi \text{ et } \psi \text{ de classe } C^2 \text{ sur } J \Big\}}$$

# D) OPTIMISATION : ÉTUDE AU SECOND ORDRE

Dans ce paragraphe **D**, $E = \mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique. Toutes les dérivées partielles le seront par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

**1°) *DL à l'ordre 2 : Formule de Taylor-Young***

**Théorème**

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$ et soit $h = (h_1, \ldots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in U$.

On a alors $\boxed{f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a)\ h_j^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\ h_i h_j\right) + o(\|h\|^2)}$

*Démonstration 38* :

Considérons la fonction $\varphi$ d'une seule variable : $\varphi : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(a+th) \end{cases}$

Posons $a = (a_1, \ldots, a_p)$, comme $h = (h_1, \ldots, h_p)$, on a alors $\varphi(t) = f(a_1 + th_1, \ldots, a_p + th_p)$.

On a par T.G. $\varphi$ qui est de classe $C^2$ sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1]$ :

$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+th)\ h_j$ et $\varphi''(t) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)\ h_i h_j$

Écrivons la formule de Taylor-Reste-Intégrale pour $\varphi$ entre 0 et 1 : $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,\mathrm{d}t$. Donc

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j + \int_0^1 (1-t) \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)\ h_i h_j\,\mathrm{d}t =$$

$$= f(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} h_i h_j \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)\,\mathrm{d}t.$$

Or pour tout couple $(i,j)$, la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ est continue en $a$, donc $\forall x \in U$ : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \alpha_{i,j}(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \alpha_{i,j}(x) = 0$.

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} h_i h_j \int_0^1 (1-t)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \alpha_{i,j}(a+th)\right)\mathrm{d}t$$

$$= f(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} h_i h_j \int_0^1 (1-t)\alpha_{i,j}(a+th)\,\mathrm{d}t$$

$= f(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} h_i h_j \int_0^1 (1-t)\alpha_{i,j}(a+th)\,\mathrm{d}t$. Soit $\varepsilon > 0$, pour tout couple $(i,j)$, il existe un $\eta_{i,j} > 0$ tel que pour tout $x \in U$, $\|x - a\|_\infty \leqslant \eta_{i,j} \Longrightarrow |\alpha_{i,j}(x)| \leqslant \varepsilon$. Soit $\eta = \min\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p}(\eta_{i,j})$, on a $\eta > 0$ et si on prend $\|h\|_\infty \leqslant \eta$ alors $\forall t \in [0,1]$, $|\alpha_{i,j}(a+th)| \leqslant \varepsilon$. On a donc

$$\left|\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} h_i h_j \int_0^1 (1-t)\alpha_{i,j}(a+th)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} |h_i h_j| \int_0^1 (1-t)\,|\alpha_{i,j}(a+th)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} \|h\|_\infty^2 \int_0^1 (1-t)\varepsilon\,\mathrm{d}t.$$

On a donc $\left|\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} h_i h_j \int_0^1 (1-t)\alpha_{i,j}(a+th)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant p^2 \|h\|_\infty^2 \frac{1}{2}\varepsilon$ On en déduit donc que

$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} h_i h_j \int_0^1 (1-t)\alpha_{i,j}(a+th)\,\mathrm{d}t = o(\|h\|_\infty^2)$. Ce qui finit la démonstration.

**Remarque** : Ce DL est unique. *Démonstration 39* exercice.

**Remarque (mnémotechnique)** : Pour retrouver ce DL, on pose $H = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j$. La différentiabilité de $f$ s'écrit $f(a+h) = f(a) + H + o(h)$. Le DL à l'ordre 2 s'écrit $f(a+h) = f(a) + H + \frac{H^2}{2!} + o(\|h\|^2)$, avec $H^2$ qui se développe à partir de $H$ comme si c'était un produit, c'est ce que l'on appelle **la puissance symbolique de** $H$. On utilise les règles suivantes " $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ h_j \times \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(a)\ h_i h_j$ " et " $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a)\ h_j^2$"

Enfin on rappelle que $(a_1+\cdots+a_p)^2 = a_1^2+\cdots+a_p^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p} a_i a_j$

## 2°) *Matrice hessienne*

***Définition*** :

Soit $f$ de classe $C^2$ de $U\subset \mathbb{R}^p$. On appelle **matrice hessienne** de $f$ en $a$ et notée $H_f(a)$, la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ : $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$.

**Remarques** : D'après le théorème de Schwarz, la matrice hessienne est **symétrique** et $H_f(a) = J_{\nabla f}(a)$.

**Exemple** : Déterminer la matrice hessienne de $f$ en $a=(x,y,z)$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2+4xy+5xz+6yz$. **Réponse** : $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5\\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 6\end{pmatrix}$.

**Expression du DL à l'ordre 2 avec la matrice hessienne**

Soit $f: U\subset\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur l'ouvert $U\subset\mathbb{R}^p$. Soit $a\in U$ et soit $h\in\mathbb{R}^p$ tel que $a+h\in U$.

i) $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + (\nabla f(a)|h) + \frac{1}{2}(H_f(a)\cdot h|h) + o(\|h\|^2)$

ii) $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^{\mathbf{T}} h + \frac{1}{2} h^{\mathbf{T}} H_f(a) h + o(\|h\|^2)$

*Démonstration 40*

En vertu de l'expression du produit scalaire dans une base OTN : $(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) = X^{\mathbf{T}}Y$, on a i) $\Longleftrightarrow$ ii).

On a grâce à Taylor-Young :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a)\ h_j^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\ h_i h_j\right) + o(\|h\|^2)$$

Comme la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est OTN (pour sa structure euclidienne canonique!) ,

$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)$ et donc $\nabla f(a)^{\mathbf{T}} h = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j$.

$$\text{Ensuite } H_f(a)h = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a)h_p \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_p}(a)h_p\end{pmatrix}, \text{ puis}$$

$$\begin{aligned} h^{\mathbf{T}} H_f(a) h &= h_1\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}(a)h_1+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_p}(a)h_p\right] + \cdots + h_p\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_p\partial x_1}(a)h_1+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_p\partial x_p}(a)h_p\right] \\ &= \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a)\ h_j^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\ h_i h_j \text{ (avec Schwarz).}\end{aligned}$$

## 3°) *Application aux extremums d'une fonction*

### a) Condition nécessaire d'extremum local

**Proposition** :

Soit $f: U\subset\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur l'ouvert $U$. Soit $a\in U$. On suppose que **$f$ a un minimum local en $a$**.

Alors $a$ est un point critique et la matrice hessienne $\boxed{H_f(a)\in S_p^+(\mathbb{R})}$ (matrice symétrique positive).

*Démonstration 41*

On sait déjà que $a$ est un point critique. On a donc avec Taylor-Young,

$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \frac{1}{2}h^{\mathbf{T}} H_f(a) h + o(\|h\|^2)$. Posons $\boxed{Q(h) = h^{\mathbf{T}} H_f(a) h}$, on a donc $f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}Q(h) + \|h\|^2\varepsilon(h)$.

Supposons qu'il existe un vecteur $x_0$ de $\mathbb{R}^p$ tel que $Q(x_0)<0$ alors $\forall\lambda>0$, $Q(\lambda x_0)<0$. On choisit un $\lambda_0$ assez petit pour que $a+\lambda_0 x_0\in U$. On pose alors $h_0 = \lambda_0 x_0$, donc $Q(h_0)<0$ et donc $\forall t\in[-1,1]$,

$f(a+th_0) - f(a) = \frac{1}{2}t^2 Q(h_0) + t^2\|h_0\|^2\varepsilon(th_0) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}t^2 Q(h_0) < 0$. Donc pour $t$ assez petit non nul on a

$f(a+th_0) - f(a) < 0$ donc $f(a+th_0) < f(a)$ ce qui contredit le fait que $f$ présente un minimum en $a$.

**Conclusion** : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^p : x^{\mathbf{T}} H_f(a) x \geqslant 0 : H_f(a) \in S_p^+(\mathbb{R})}$.

**Proposition bis** :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur l'ouvert $U$. Soit $a \in U$. On suppose que $f$ **a un maximum local en** $a$.
Alors $a$ est un point critique et la matrice hessienne $\boxed{H_f(a) \in S_p^-(\mathbb{R})}$ (matrice symétrique négative).
Avec $A \in S_p^-(\mathbb{R}) \iff \forall x \in \mathbb{R}^p \ X^{\mathbf{T}} A X \leqslant 0 \iff -A \in S_p^+(\mathbb{R})$

**Remarque** : Ces conditions nécessaires ne sont pas suffisantes. En effet si on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y^3$ et $a = (0,0)$ alors en ce point $H_f(a) = (0)$ (qui est bien positive !) et pourtant $f$ ne présente pas en $a$ de minimum local : $f(t,t) - f(0,0)$ est du signe de $t$ pour tout $t$ aussi petit soit-il.

Cependant on a la réciproque si la matrice hessienne est **définie positive** :

**b) Condition suffisante d'extremum local**

**Théorème** :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur l'ouvert $U$. Soit $a \in U$, un point **critique** de $f$.
On suppose que la matrice hessienne de $f$ en $a$ est **définie positive** : Alors $f$ **a un minimum local strict en** $a$.

*Démonstration 42*

Posons $Q(h) = h^{\mathbf{T}} H_f(a) h$, on a toujours grâce à T.Y. :
$f(a+h) - f(a) = \dfrac{1}{2} Q(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$, où $\|\ $ est une norme fixée de $\mathbb{R}^p$.
Si $H_f(a)$ est définie positive alors elle définit un produit scalaire : $x^{\mathbf{T}} H_f(a) y$ et donc une norme sur $\mathbb{R}^p$ :
$N(x) = \sqrt{Q(x)}$. Comme $\mathbb{R}^p$ est de dimension finie, les 2 normes $\|\ $ et $N$ sont 2 normes équivalentes : $\exists \alpha > 0$ et $\beta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^p : \alpha \|x\| \leqslant N(x) \leqslant \beta \|x\|$ donc $\alpha^2 \|x\|^2 \leqslant Q(x) \leqslant \beta^2 \|x\|^2$.
$\forall h \in \mathbb{R}^p$ (tel que $a+h \in U$) , $f(a+h) - f(a) \geqslant \left( \dfrac{1}{2}\alpha^2 + \varepsilon(h) \right) \|h\|^2$.
Comme $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^p$, $\|h\| \leqslant \eta \Longrightarrow |\varepsilon(x)| \leqslant \dfrac{\alpha^2}{4}$ et donc
$\forall \|h\| \leqslant \eta$ , $f(a+h) - f(a) \geqslant \left( \dfrac{1}{2}\alpha^2 - \dfrac{\alpha^2}{4} \right) \|h\|^2 = \dfrac{\alpha^2}{4} \|h\|^2 > 0$.
**Conclusion** : $\forall \|h\| \leqslant \eta$ , $f(a+h) > f(a)$ : $f$ a un minimum en $a$.

**Théorème bis** :

Si la matrice hessienne de $f$ en $a$ est **définie négative**, alors $f$ **a un maximum local strict en** $a$.

**c) Étude de la matrice hessienne dans le cas $E = \mathbb{R}^2$**

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur l'ouvert $U$ et soit $a \in U$. On définit **les notations de Monge** :

$$\boxed{\underline{p,\ q,\ r,\ s,\ t} : p = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \ ,\ q = \frac{\partial f}{\partial y}(a) \ ,\ r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \ ,\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \ ,\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \ \text{ et } H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}}$$

Le DL à l'ordre 2 de $f$ en $a$ s'écrit donc, avec $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a+h \in U$,

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + p\ h_1 + q\ h_2 + \frac{1}{2}(r\ h_1^2 + 2s\ h_1 h_2 + t\ h_2^2) + o(\|h\|^2)}$$

La condition " $a$ **est un point critique** " s'écrit donc $\boxed{p = 0 \text{ et } q = 0}$. Dans ce cas le DL s'écrit :
$f(a+h) = f(a) + 0 + \dfrac{1}{2} Q(h) + o(\|h\|^2) = f(a) + \dfrac{1}{2} Q(h) + o(\|h\|^2)$ avec $\boxed{Q(h) = r h_1^2 + 2s\ h_1 h_2 + t h_2^2}$.

Cherchons une CNS sur $r, s, t$ pour que $H_f(a)$ soit définie positive.

$H_f(a)$ soit définie positive si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Si on note $\lambda$ et $\mu$ ses 2 valeurs propres, $[\lambda > 0 \text{ et } \mu > 0] \underset{\text{exercice}}{\iff} [\lambda\mu > 0 \text{ et } \lambda + \mu > 0] \iff [\det H_f(a) > 0 \text{ et } Tr(H_f(a)) > 0]$.

On a donc quatre cas :

$*$ Si $[\det H_f(a) > 0 \text{ et } Tr(H_f(a)) > 0]$ alors $H_f(a)$ est **définie positive**.

$*$ Si [$\det H_f(a) > 0$ et $Tr(H_f(a)) < 0$] alors $H_f(a)$ est **définie négative**.

$*$ Si [$\det H_f(a) < 0$ ] alors $H_f(a)$ n' est **ni positive ni négative**. $\exists u \in \mathbb{R}^2 : Q(u) < 0$ et $\exists v \in \mathbb{R}^2 : Q(v) > 0$.

$*$ Si [$\det H_f(a) = 0$] alors $H_f(a)$ est [positive sans être définie positive] ou [négative sans être définie négative].

**Résumé : Théorème de Monge** :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur l'ouvert $U$. Soit $a \in U$ un point critique de $f$.

Si $\boxed{rt - s^2 > 0 \text{ et } r + t > 0}$ alors $f$ a un **minimum local strict** en $a$.

Si $\boxed{rt - s^2 > 0 \text{ et } r + t < 0}$ alors $f$ a un **maximum local strict** en $a$.

Si $\boxed{rt - s^2 < 0}$ alors $f$ a un **point col** en $a$.

Si $\boxed{rt - s^2 = 0}$ alors ? ? ? ? ? (**on ne peut rien dire**)

**Remarques** :

i) Dans le cas $rt - s^2 = 0$, on reprend l'expression $f(a + h) - f(a)$ (sans le DL bien sûr !).

ii) Dans le cas où $E \neq \mathbb{R}^2$, on étudie le signe en un point critique $a$, de $f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}Q(h) + o(\|h\|^2)$, notamment en étudiant la positivité ou négativité de $Q(h)$ (que l'on obtient par exemple en cherchant les valeurs propres (revoir le théorème spectral)).

**Exercices** :

**a)** Déterminer les points critiques et leur "extrémalités" (local/global -strict ou non) de $f_i$ définie sur $\mathbb{R}^p$ par

$f_1(x, y) = x^4 + y^4$ , $f_2(x, y) = x^3 + y^3$ , $f_3(x, y) = x^2 - 2y^3 + xy$ , $f_4(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,

$f_5(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + z^3$ , $f_6(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ ,

**Réponses** :

Dans les 6 cas, les fonctions sont $C^2$ (et même $C^\infty$) sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ par T.G.

$\bullet_1$ $\nabla f_1(x, y) = (4x^3, 4y^3)$, on a donc $a = (0, 0)$ unique point critique de $f_1$. La matrice hessienne en ce point est $H_{f_1}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On ne peut donc pas conclure avec les conditions de Monge, cependant il est clair que $a$ est un minimum global strict. Enfin il n'y a aucun maximum local ou global.

$\bullet_2$ $\nabla f_2(x, y) = (3x^2, 4y^2)$, on a donc $a = (0, 0)$ unique point critique de $f_1$. La matrice hessienne en ce point est $H_{f_2}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On ne peut donc pas conclure avec les conditions de Monge. Montrons que $a$ est un point col.

$u_n = (\frac{1}{n}, 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0, 0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_2(u_n) > 0$ et $v_n = (-\frac{1}{n}, 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0, 0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_2(u_n) < 0$.

$\bullet_3$ $\nabla f_3(x, y) = (2x + y, -6y^2 + x)$, on a donc deux points critiques : $a = (0, 0)$ et $b = (\frac{1}{24}, -\frac{1}{12})$.

Ensuite $H_{f_2}(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme le déterminant vaut $-1 < 0$, $a$ est donc un point col.

Enfin $H_{f_3}(b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comme le déterminant vaut $1 > 0$ et la trace $3 > 0$, $b$ est donc un minimum local strict.

$b$ n'est pas un minimum global car $f_3(0, y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et donc il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f_3(0, y_0) < f_3(b) - 1$.

$\bullet_4$ On trouve facilement 4 points critiques : $a = (2, 1)$ , $b = (1, 2)$ , $c = (-1, -2)$ , $a = (-2, -1)$ puis Monge.

$\bullet_5$ $\nabla f_5(x, y, z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z+3z^2)$, on a donc deux points critique : $a = (0, 0, 0)$ et $b = (\frac{4}{27}, \frac{4}{27}, -\frac{4}{9})$

La matrice hessienne en $a$ est $A = H_{f_2}(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme "d'habitude" $\mathrm{rg}(A - I_3) = 1$, donc 1 est valeur propre et son espace propre est de dimension 2. Ensuite le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $A$ de valeur propre 4. Les valeurs propres sont toutes strictement positives. **Conclusion**: $a$ est un minimum local strict de $f_5$.

Comme $f_5(0,0,z) = z^3 \underset{z\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, $a$ n'est pas un minimum global.

La matrice hessienne en $a$ est $B = H_{f_2}(b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$. $\chi_B(x) = \dfrac{1}{3}(x-1)(3x^2-7x-12)$ (à l'aide de l'opération $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$). Le discriminant de $3x^2 - 7x - 12$ est strictement positif et le produit de ses racine est négatif donc $\chi_B$ admet 2 racines strictement positives et une racine strictement négative. **Conclusion**: $b$ est un point col de $f_5$.

**b)** Déterminer de deux manières différentes : $m = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left( \displaystyle\int_{-1}^{1} (e^t - a - bt)^2 \,\mathrm{d}t \right)$.

**Réponses** :

**Première méthode** On utilise les produits scalaires :

$E = \mathbb{R}[X]$ munit du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. On a alors $m = \mathrm{d}(\exp, \mathbb{R}_1[X])^2$....

**Deuxième méthode** On utilise Monge : On pose $f(x,y) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (e^t - x - yt)^2 \,\mathrm{d}t$.

On trouve alors $f(x,y) = \dfrac{1}{2}e^2 - 2ex + 2x^2 + \dfrac{2}{3}y^2 - \dfrac{1}{2}e^{-2} + \dfrac{2}{e}x - \dfrac{4}{e}y$

On trouve ensuite un unique point critique : $a = (\dfrac{e}{2} - \dfrac{1}{2e}, \dfrac{3}{e})$ et $H_f(a) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

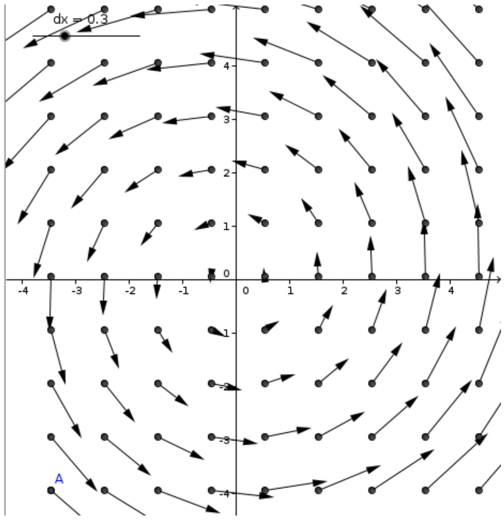
On en déduit que $a$ est un minimum local strict et $f(a) = 1 - \dfrac{7}{e^2}$

On montre ensuite que $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = +\infty$ et on utilise TBA ou directement !

## ANNEXE : Exemple pour la physique

Notons $E = \mathbb{R}^p$ munit de son produit scalaire canonique, $E$ est donc euclidien.

Soit $F : U \subset E \longrightarrow E$, on dit que $F$ **est un champs de vecteurs**.




Le **gradient** d'une fonction différentiable de $U$ dans $\mathbb{R}$ est un exemple de champs de vecteurs.

On dit que **le champs de vecteur** $F : U \subset E \longrightarrow E$ **dérive d'un potentiel** s'il existe une fonction $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$, différentiable sur $U$ et tel que $F = \mathrm{d}f$. On dit alors que $f$ est un **potentiel** de $F$.

0. Dans le cas où $F$ est de classe $C^1$ et dérive d'un potentiel sur $U$, si l'on note $(F_1, \dots, F_p)$ ses fonctions coordonnées dans la base canonique (qui est OTN), montrer que

$$(*) \qquad : \qquad \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 : \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

1. Le champs $F : (x,y) \longmapsto (xy^2, -xy)$ dérive-t-il d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$ ?
2. Déterminer un potentiel du champs $F : (x,y) \longmapsto (2xy, x^2 + y)$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. a) Démontrer que le champs $F : (x,y) \longmapsto \left( \dfrac{y}{x^2+y^2} \, , \, \dfrac{-x}{x^2+y^2} \right)$ définie sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ vérifie les relations $(*)$.

   b) Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \Big( F(\gamma(t)) \mid \gamma'(t) \Big) \, \mathrm{d}t$ où $\gamma$ est l'arc $\gamma \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$ et $(\cdot \mid \cdot)$ représente le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.

   c) En déduire que $F$ ne dérive pas d'un potentiel sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

   d) Montrer que $F$ dérive d'un potentiel sur $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y > 0\}$.

**Réponses** :

0. Si $F = \mathrm{d}f$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = F_j$ , d'où $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, on conclut alors par le théorème de Schwarz.

1. On a $F_1(x,y) = xy^2$ et $F_2(x,y) = -xy$ et dans cet exemple $x_1 = x$ et $x_2 = y$.
   Comme $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2xy$ et $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = -y$ , $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} \neq \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ sur $U = \mathbb{R}^2$ et donc $F$ ne dérive pas d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$.
2. On a $F_1(x,y) = 2xy$ et $F_2(x,y) = x^2 + y$.
   Comme $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2x$ et $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = 2x$, on a la relation $(*)$ qui est vérifiée.
   Cherchons une fonction $f$ telle que $F = \mathrm{d}f$ . On doit donc avoir $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$. Comme $\mathbb{R}^2$ est **convexe**, $f(x,y) = x^2 y + \varphi(y)$. Tout est $C^1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 + y$ . On en déduit que $\varphi'(y) = y$ sur $\mathbb{R}$ et donc il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = x^2 y + \dfrac{y^2}{2} + \lambda}$.

3. a) $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} (F(\gamma(t))|\gamma'(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} [F_1(\cos t, \sin t) \times (-\sin t) + F_2(\cos t, \sin t) \times (\cos t)]\,\mathrm{d}t = -2\pi.$

c) Si $F$ dérivait d'un potentiel $f$ sur $U$, alors

$\displaystyle\int_0^{2\pi} (F(\gamma(t))|\gamma'(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\nabla f(\gamma(t))|\gamma'(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\,\mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t))\,\mathrm{d}t$

$= f(\cos 2\pi, \sin 2\pi) - f(1,0) = 0$ : absurde.

d) On fait comme au 2.

On a $F_1(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ et $F_2(x,y) = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$.

Cherchons une fonction $f$ telle que $F = \mathrm{d}f$ . On doit donc avoir $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$. Comme $U$ est convexe, $f(x,y) = \arctan(\dfrac{x}{y}) + \varphi(y)$. Tout est $C^1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-x}{x^2+y^2} + \varphi'(y) = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$.

On en déduit que $\varphi'(y) = 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \arctan(\frac{x}{y}) + \lambda}.$$