FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES : CALCUL DIFFÉRENTIEL (avec réponses)

CONSEIL POUR RÉUSSIR LA DIGESTION DE CE CHAPITRE : REVOIR TOUTES LES DÉFINITIONS DU CHAPITRE EVN , SURTOUT NORMES ET CONTINUITÉ.

• Dans ce chapitre, sauf mention du contraire, **f désignera toujours une fonction d'un ouvert U d'un espace vectoriel quelconque E de dimension p vers un espace vectoriel F de dimension n sur $\boxed{\mathbb{K}=\mathbb{R}}$**. *Très souvent E sera égal à $\mathbb{R}^p$ et n ou p seront égaux à 2 ou 3.*

On comprendra la plupart des résultats de ce chapitre **si et seulement si** , on le comprend dans le cas le cas le plus simple : $\boxed{p = 2 \text{ et } n = 1}$.

• D'autre part lorsqu'une base $b = (e_1, \dots, e_p)$ de E est fixée, pour un vecteur x de E de coordonnées $(x_1, \dots, x_p)$ dans cette base, on identifie $f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\Big) = f(x_1, \dots, x_p)$.

Autrement dit on identifie f de E dans F avec f_b de $\mathbb{K}^p$ dans F définie par $f_b : (x_1, \dots, x_p) \longmapsto f(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i)$.

Cette identification justifie le terme : **"plusieurs variables"** .

Exemples :

• $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$, $P \longmapsto P'$ sera identifié à $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$, $(x, y, z) \longmapsto y + 2zX$ à l'aide de la base $b = (1, X, X^2)$.

• $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \longmapsto \det A$ sera identifié à $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z, t) \longmapsto xt - yz$ à l'aide de la base $b = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

A) APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES - DÉRIVÉE SELON UN VECTEUR

1°) *Application différentiable*

Définition 1

Soit $f : U \longrightarrow F$ où U est un ouvert de E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $a \in U$. On dit que f est **différentiable** en a s'il existe une **application linéaire** $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$\boxed{f(a + \vec{h}) = f(a) + u(\vec{h}) + o(\vec{h})}$ pour $\vec{h}$ qui tend vers $\vec{0}$ dans E.

Remarque 0 : Pourquoi mets on une flèche sur h et pas sur a ? a est "vu" comme un point et h comme un vecteur.

Remarque 1 : On montre facilement que cette *définition* est **indépendante des normes choisies** sur E et sur F car ils sont de dimension finie et donc que les normes sont toutes 2 à 2 équivalentes.

Remarque 2 : u est **continue** car linéaire et E de dimension finie.

Remarque 3 : (rappel **EVN**) $o(\vec{h}) = \|\vec{h}\|\varepsilon(\vec{h})$ avec $\lim\limits_{\vec{h}\to 0_E} \varepsilon(\vec{h}) = 0_F$.

On peut donc aussi noter $f(a + \vec{h}) = f(a) + u(\vec{h}) + o(\|\vec{h}\|)$.

Remarque 4 : La relation $f(a + \vec{h}) = f(a) + u(\vec{h}) + o(\vec{h})$ est appelé DL (**développement limité**) de f en a à l'ordre 1.

Remarque 5 : U étant ouvert, il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $\vec{h}$ de E, $\|\vec{h}\| \leqslant r \Longrightarrow a + \vec{h} \in U$.

Lemme : $\boxed{u \text{ est } \textbf{unique}}$

Démonstration 1 : Soit u et v deux applications linéaires telles que pour $\vec{h}$ qui tend vers 0, $f(a + \vec{h}) = f(a) + u(\vec{h}) + o(\vec{h}) = f(a) + v(\vec{h}) + o(\vec{h})$ donc $(u - v)(\vec{h}) = o(\vec{h}) = \|\vec{h}\|\varepsilon(\vec{h})$. Soit $\vec{x} \in E$, fixé quelconque et soit $t > 0$, pour $\vec{h} = t\vec{x}$, on a : $(u - v)(t\vec{x}) = \|t\vec{x}\|\varepsilon(t\vec{x}) = t\|\vec{x}\|\varepsilon(t\vec{x})$ d'où $(u - v)(\vec{x}) = \|\vec{x}\|\varepsilon(t\vec{x})$ or $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t\vec{x}) = 0$ car $\lim\limits_{\vec{h}\to 0} \varepsilon(\vec{h}) = 0$ donc $\lim\limits_{t\to 0}(u - v)(\vec{x}) = 0$ soit $(u - v)(\vec{x}) = 0$ c'est-à-dire $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ et donc $\underline{u = v}$.

Définition 2 : u s'appelle $\boxed{\textbf{la différentielle de } f \textbf{ en } a.}$ u est aussi appelée **application linéaire tangente**. Elle est notée $\boxed{\mathrm{d}f(a)}$ ou $f'(a)$ ou $\mathrm{d}f_a$.

On a donc $$\boxed{f(a+\overrightarrow{h}) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h}) + o(\overrightarrow{h}) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}f(a) \in \mathcal{L}(E,F)}$$

Rappel (équa. diff.) : On note parfois $\mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h}) = \mathrm{d}f(a)\cdot\overrightarrow{h} = \mathrm{d}f(a)\overrightarrow{h}$.

Cas où $E = \mathbb{R}$: Toute fonction linéaire u de $\mathbb{R}$ dans F est de la forme $u : t \longmapsto tb$ avec $b \in F$ et la relation $f(a+h) = f(a) + u(h) + o(h)$ devient $f(a+h) = f(a) + hb + o(|h|)$ et $o(|h|) = o(h)$ d'où $f(a+h) = f(a) + hb + o(h)$ ce qui équivaut à la **dérivabilité de f en a** avec $b = f'(a)$.

On a donc $\boxed{f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1) \text{ aussi noté } \mathrm{d}f(a)\cdot 1}$ et $\mathrm{d}f(a) : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow F \\ t \longmapsto tf'(a) \end{cases}$.

2°) ***Exemples***

a) Déterminer la différentielle en tout point $a = (\alpha, \beta)$ de $\mathbb{R}^2$ de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto xy \end{cases}$

Réponse : Soit $a = (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{h} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on cherche à "éclater" $f(a+\overrightarrow{h})$ en 3 termes : $f(a)$, un "morceau" linéaire et un petit o : $f(a+\overrightarrow{h}) = (\alpha+u)(\beta+v) = [\alpha\beta] + [\alpha y + \beta x] + [xy]$.

Posons $u : (x,y) \longmapsto \alpha y + \beta x$ et $\varphi(x,y) = xy$. On a clairement u linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que $\varphi(x,y) = o(\overrightarrow{h})$ où $\overrightarrow{h} = (x,y)$. Prenons la norme infinie canonique de $\mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$, donc : $|\varphi(x,y)| \leqslant \|\overrightarrow{h}\|_\infty^2 = o(\|\overrightarrow{h}\|_\infty)$.

Conclusion: $\boxed{f \text{ est différentiable en } a = (\alpha,\beta) \text{ et } \mathrm{d}f(a) : (x,y) \longmapsto \beta x + \alpha y}$

b) Déterminer la différentielle en tout point A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto M^3 \end{cases}$

Réponse : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on cherche à "éclater" $f(A+H)$ en 3 termes : $f(H)$, un "morceau" linéaire et un petit o : $f(A+H) = (A+H)^3 = AAA + AAH + AHA + HAA + AHH + HAH + HHA + HHH$ **attention** : A et H ne commutent pas ! Donc $f(A+H) = [A^3] + [A^2H + AHA + HA^2] + [AH^2 + HAH + H^2A + H^3]$.

Posons $u : H \longmapsto A^2H + AHA + HA^2$ et $\varphi(H) = AH^2 + HAH + H^2A + H^3$.

On montre facilement que u est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $\varphi(H) = o(H)$.

Prenons une norme d'algèbre quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\varphi(H)| \leqslant 3\|A\|\|H\|^2 + \|H\|^3 = O(\|H\|^2) = o(H)$.

Conclusion: $\boxed{f \text{ est différentiable en } A \text{ et } \mathrm{d}f(A) : H \longmapsto A^2H + AHA + HA^2}$

3°) ***Dérivée selon un vecteur***

L'idée pour étudier f de U dans F en a est de s'approcher de a selon une direction $\overrightarrow{h} \in E$, $\overrightarrow{h} \neq 0$. On paramètre la droite passant par a et de direction $\overrightarrow{h}$ et on considère $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow F \\ t \longmapsto f(a+t\overrightarrow{h}) \end{cases}$

On se ramène donc à l'étude **d'une fonction d'une seule variable**, notion que l'on maitrise beaucoup mieux (dérivation, DL, intégration...)

Lemme : $\boxed{\forall a \in U, \quad \forall \overrightarrow{h} \in E,\ \overrightarrow{h} \neq 0, \quad \exists r > 0 \text{ tel que } \quad \forall t \in [-r,r] \ : \quad a + t\overrightarrow{h} \in U.}$

Démonstration 2 : On munit E d'une norme $\|\|$. Comme U est ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que $\mathcal{B}_F(a,r_0) \subset U$. On a : $\|a + t\overrightarrow{h} - a\| = |t|\ \|\overrightarrow{h}\|$, donc pour $r = \dfrac{r_0}{\|\overrightarrow{h}\|}$, on a : $\forall t \in [-r,r] : |t|\ \|\overrightarrow{h}\| \leqslant r_0$ d'où $a + t\overrightarrow{h} \in \mathcal{B}_F(a,r_0) \subset U$.

Définition :

Soient f de U dans F et $a \in U$. Soit $\overrightarrow{h} \in E$, $\overrightarrow{h} \neq 0$.

On dit que f est **dérivable en a selon $\overrightarrow{h}$** si $\varphi : \begin{cases} [-r,r] \longrightarrow F \\ t \longmapsto f(a+t\overrightarrow{h}) \end{cases}$ est dérivable en $t = 0$.

$\varphi'(0)$ s'appelle alors **la dérivée de f en a selon $\overrightarrow{h}$.** On la note $\boxed{\mathrm{D}_{\overrightarrow{h}}f(a)}$. On a donc : $\boxed{\mathrm{D}_{\overrightarrow{h}}f(a) = \lim\limits_{\substack{t\to 0 \\ \neq}} \dfrac{f(a+t\overrightarrow{h}) - f(a)}{t}}$.

Exemples : a) Déterminer la dérivée selon i en tout point a de $\mathbb{C}$ de $f : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto e^z \end{cases}$

Réponse : $\varphi(t) = f(a+ti) = e^{a+ti}$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(t) = ie^{a+ti}$. Donc $\varphi'(0) = ie^a$.

Conclusion: $\boxed{\mathrm{D}_i f(a) = e^a i}$.

b) Déterminer la dérivée selon $E_{i,j}$ en tout point A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A \longmapsto A^2 \end{cases}$

Réponse : $\varphi(t) = f(A+tE_{i,j}) = (A+tE_{i,j})^2 = A^2 + tAE_{i,j} + tE_{i,j}A + t^2E_{i,j}^2$. Donc $\varphi'(0) = AE_{i,j} + E_{i,j}A$.

Conclusion: $\boxed{\mathrm{D}_{E_{i,j}} f(A) = AE_{i,j} + E_{i,j}A}$.

c) Déterminer la dérivée selon $(0,1)$ en tout point $a = (x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto 3xy^2 + x^7 + \sin(xy) \end{cases}$

Que constatez - vous ?

Réponse :

On peut dériver $f(\ (x,y)+t(0,1)\ )$ et évaluer en 0, faire un DL de $f(\ (x,y)+t(0,1)\ )$ à l'ordre 1 ou bien "carrément" avec la définition : $\dfrac{f(\ (x,y)+t(0,1)\ ) - f(x,y)}{t} = \dfrac{3x(y+t)^2 + \sin(x(y+t)) - 3xy^2 - \sin(xy)}{t}$

$\underset{t\to 0}{=} \dfrac{3xy^2 + 6xyt + o(t) + \sin(xy+xt)) - 3xy^2 - \sin(xy)}{t} \underset{t\to 0}{=} \dfrac{6xyt + o(t) + \sin(xy)\cos(xt) + \cos(xy)\sin(xt) - \sin(xy)}{t}$

$\underset{t\to 0}{=} \dfrac{6xyt + o(t) + \sin(xy)(1+o(t) + \cos(xy)(xt+o(t)) - \sin(xy)}{t} \underset{t\to 0}{=} \dfrac{6xyt + \cos(xy)xt + o(t))}{t}$

$\underset{t\to 0}{=} 6xy + \cos(xy)x + o(1)) \underset{0}{\longrightarrow} 6xy + \cos(xy)x$, c'est exactement la dérivée partielle bien connue : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Proposition :

> Soit $f : U \longrightarrow F$, $a \in U$, U un ouvert de E.
>
> **Si** f est **différentiable** en a **alors** :
>
> i) f est **continue** en a et ii) f est **dérivable selon tout vecteur** $\vec{h}$ et $\boxed{\mathrm{D}_{\vec{h}} f(a) = \mathrm{d}f(a)(\vec{h})}$.

Démonstration 3 :

i) $f(a+\vec{h}) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(\vec{h}) + o(\vec{h}) \underset{\vec{h}\to 0}{\longrightarrow} f(a) + \mathrm{d}f(a)(0) + 0 = f(a)$ (car $\mathrm{d}f(a)$ est continue car linéaire en dimension finie). On a donc f continue en a.

ii) Soit $\vec{h_0} \in E$, $\vec{h_0} \neq 0$. $f(a+t\vec{h_0}) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(t\vec{h_0}) + o(\|t\vec{h_0}\|) = f(a) + t\,\mathrm{d}f(a)(\vec{h_0}) + \|t\vec{h_0}\|\varepsilon(t\vec{h_0}) =$

$= f(a) + t\,\mathrm{d}f(a)(\vec{h_0}) + |t|\|h_0\|\varepsilon(t\vec{h_0})$ et donc pour tout $t \neq 0$,

on a : $\dfrac{f(a+th_0) - f(a)}{t} = \mathrm{d}f(a)(\vec{h_0}) + \dfrac{|t|}{t}\|\vec{h_0}\|\varepsilon(t\vec{h_0}) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{d}f(a)(\vec{h_0}) + 0 = \mathrm{d}f(a)(\vec{h_0})$. Conséquence : $\mathbf{D}_{\vec{h_0}} f(a) = \mathrm{d}f(a)(\vec{h_0})$.

Réciproque Fausse : Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \dfrac{y^2}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ (0,y) \longmapsto 0 \end{cases}$

Montrer que f est dérivable selon toutes les directions en $(0,0)$, que f n'est pas continue en $(0,0)$ et donc non différentiable en $(0,0)$.

Soit $h = (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, étudions pour $t \in [-1,1] - \{0\}$: $\dfrac{f((0,0)+th) - f(0,0)}{t} = \dfrac{f(t\alpha, t\beta)}{t}$.

Premier cas : $\alpha = 0$, on a alors $\dfrac{f((0,0)+th) - f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\rightarrow} 0$

Deuxième cas : $\alpha \neq 0$, on a alors $\dfrac{f((0,0)+th) - f(0,0)}{t} = \dfrac{(t\beta)^2}{t \times t\alpha} \underset{t\to 0}{\rightarrow} \dfrac{\beta^2}{\alpha}$

Conclusion: $\boxed{f \text{ est dérivable selon toutes les directions en } (0,0)}$.

$u_n = (0,0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ et $f(u_n) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. et $v_n = (\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ et $f(v_n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$.

Conclusion: $\boxed{f \text{ n'est pas continue en } (0,0) \text{ et donc non différentiable en } (0,0)}$.

Définition : On appelle **ligne de niveau** de la fonction f tout ensemble de la forme $\boxed{X_k = \{M \in U \text{ tel que } f(M) = k\}}$ où $k \in \mathbb{R}$. Tracer X_k pour $k = 0, 1, 2, -1/2$ de l'exemple ci-dessus.

4°) *Dérivées partielles*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. On appelle **j-ème dérivée partielle de f en** a selon $\mathcal{B}$, la dérivée de f en a selon le vecteur e_j.

On la note $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) \text{ ou } \mathrm{D}_j f(a)}$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial j}(a)$ ou $f'_j(a)$. On a donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \dfrac{f(a+te_j) - f(a)}{t}}$.

Exemples Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow F$, $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $a = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Alors $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \dfrac{f(\alpha, \beta, \gamma + t) - f(\alpha, \beta, \gamma)}{t}}$.

Exemple : Soit f définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par $f(M) = \det M$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial E_{i,j}}(M)$.

Réponse :

$\varphi(t) = \det(A + tE_{i_0,j_0}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & a_{i_0,j_0} + t & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ que l'on développe par rapport à la i_0-ième ligne :

$\det(A + tE_{i_0,j_0}) = c + (-1)^{i_0+j_0}(a_{i_0,j_0} + t)\Delta_{i_0,j_0}$ où c est une constante (tout les autres termes du développement) et Δ_{i_0,j_0} le mineur du déterminant de A indépendant de t. On en déduit que $\varphi'(t) = (-1)^{i_0+j_0}\Delta_{i_0,j_0}$ et donc que $\varphi'(0) = (-1)^{i_0+j_0}\Delta_{i_0,j_0}$. **Conclusion**: $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial E_{i,j}}(M) = (-1)^{i_0+j_0}\Delta_{i_0,j_0}}$ joli, non ?

Pb : **det** est-elle différentiable ? $\det(A + H)$= trichotomie —> lourd ! ! Heureusement il va y avoir un théorème....

Expression de la différentielle dans une base

Proposition :
Soit $f : U \longrightarrow F$, U un ouvert de E, **différentiable** en $a \in U$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Alors $\forall \overrightarrow{h} \in E$, $\overrightarrow{h} = \sum\limits_{j=1}^{p} h_j e_j$, on a $\boxed{\mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h}) = \sum\limits_{j=1}^{p} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)}$

Démonstration 4 : $\mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h}) = \mathrm{d}f(a)\left(\sum\limits_{j=1}^{p} h_j e_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{p} h_j\, \mathrm{d}f(a)(e_j)$ car $\mathrm{d}f(a)$ est linéaire. D'après la **proposition** ci-dessus, on a : $\mathrm{d}f(a)(e_j) = \mathrm{D}_j f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, donc $\mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h}) = \sum\limits_{j=1}^{p} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Remarque : Si f de $U \subset E$ dans F est différentiable en tout point de l'ouvert U, alors $\mathrm{d}f$ est une application qui va de U dans $\mathcal{L}(E, F)$. Notons $\mathrm{d}x_{j_0}$ l'application qui à $\overrightarrow{h} = \sum\limits_{j=1}^{p} h_j e_j$, associe h_{j_0} (appelée fonction j_0-ième coordonnée).

On a alors : $\boxed{\mathrm{d}f(a) = \sum\limits_{j=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, \mathrm{d}x_j}$ (**forme différentielle**)

Autrement dit, $(\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_p)$ est la base de E^* telle que : $\forall (i,j) \in [\![1, p]\!]^2$, $\mathrm{d}x_j(e_i) = \delta_{i,j}$.

5°) *Fonction de classe C^1*

Définition :
Soit $f : U \longrightarrow F$, U un ouvert de E.

On dit que f **est de classe C^1 ou continument différentiable sur** U,

si f est différentiable sur U et si $\mathrm{d}f$ est continue sur U.

Théorème fondamental :

Soit $f : U \longrightarrow F$, U ouvert de E, p =dim$E$. Si **les p dérivées partielles de f** (pour une base $\mathcal{B}_0$ de E) sont définies et **continues** sur U , alors f **est différentiable en tout point de U** .

Démonstration (non exigible) 5 : Faisons-la dans le cas où $\dim E = p = 2$ avec $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$. Soit $a = (\alpha, \beta)$. Soit $h = (h_1, h_2)$. L'idée est de découper $f(a+h) - f(a)$ en p morceaux :

$f(a+h) - f(a) = f(\alpha + h_1, \beta + h_2) - f(\alpha, \beta + h_2) + f(\alpha, \beta + h_2) - f(\alpha, \beta)$

Ensuite on sait que **si** f est différentiable en a **alors** $\mathrm{d}f(a)(h) = h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Donc évaluons $\varphi(h) = f(a+h) - f(a) - \left(h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$.

$\varphi(h) = f(\alpha+h_1, \beta+h_2) - f(\alpha, \beta+h_2) + f(\alpha, \beta+h_2) - f(\alpha,\beta) - \left(h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$

$= \left[f(\alpha+h_1, \beta+h_2) - f(\alpha, \beta+h_2) - \left(h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)\right)\right] + \left[f(\alpha, \beta+h_2) - f(\alpha,\beta) - \left(h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)\right)\right]$.

Posons $\varepsilon_1(h) = \left[f(\alpha+h_1, \beta+h_2) - f(\alpha, \beta+h_2) - \left(h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)\right)\right]$ et $\varepsilon_2(h) = \left[f(\alpha, \beta+h_2) - f(\alpha,\beta) - \left(h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)\right)\right]$

grâce au **théorème** des accroissements finis il existe $c_1 \in]\alpha, \alpha+h_1[$ tel que $\varepsilon_1(h) = h_1 \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(c_1, \beta+h_2) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)\right]$.

Or $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur U, donc en a, d'où : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta_1 > 0$ tel que $\forall (u,v) \in U$:

$\|(u,v) - (\alpha,\beta)\|_\infty \leqslant \eta_1 \Longrightarrow \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(u,v) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)\right| \leqslant \varepsilon$

Donc pour $|h_1| \leqslant \eta_1$ et $|h_2| \leqslant \eta_1$, on a $|c_1 - \alpha| \leqslant \eta_1$ d'où $|\varepsilon_1(h)| \leqslant \varepsilon \times |h_1| \leqslant \varepsilon \times \|(h_1,h_2)\|_\infty$

On fait exactement pareil pour $\varepsilon_2(h)$ d'où il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour $|h_1| \leqslant \eta_2$ et $|h_2| \leqslant \eta_2$, on a $|c_2 - \beta| \leqslant \eta_2$ d'où $|\varepsilon_2(h)| \leqslant \varepsilon \times |h_2| \leqslant \varepsilon \times \|(h_1,h_2)\|_\infty$. **Conséquence** : Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, pour $|h_1| \leqslant \eta$ et $|h_2| \leqslant \eta$, on a : $|\varepsilon_1(h)| \leqslant \varepsilon \times \|(h_1,h_2)\|_\infty$ et $|\varepsilon_2(h)| \leqslant \varepsilon \times \|(h_1,h_2)\|_\infty$ donc $|\varphi(h)| = \left|f(a+h) - f(a) - \left(h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\right)\right| \leqslant 2\,\varepsilon \times \|(h_1,h_2)\|_\infty$.

Ceci est la *définition* de $f(a+h) - f(a) - \left(h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\right) = o(\|(h_1,h_2)\|_\infty)$ quand h tend vers 0.

Conclusion : f est bien **différentiable** en $a = (\alpha,\beta)$.

Corollaire : ***Définition* "bis" de : f est de classe C^1 sur U** :

$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U \textbf{ ssi pour toute base } \mathcal{B} \text{ de } E\text{, les dérivées partielles existent et sont continues sur } U.}$

Démonstration 6 : $\Longrightarrow$] Si f est de classe C^1 sur U alors elle est différentiable sur U et $\mathrm{d}f$ est continue sur U.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. $\forall j \in [\![1,p]\!]$, l'application $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ va de U dans F et pour tout $x \in U$,

$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \mathrm{d}f(x)(e_j)$ (démo.3).

Comme $\mathrm{d}f$ est continue sur U et que l'application $\Phi : \mathcal{L}(E,F) \times E \longrightarrow$, $(u,x) \longmapsto u(x)$ est bilinéaire donc continue, par composition $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ est continue sur U.

$\Longleftarrow$] Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E fixée. Par le **théorème fondamental** f est différentiable en tout point de U et donc dérivable en tout point de U selon toutes les directions de E, donc dans les directions définies par les vecteurs de la base $\mathcal{B}_0$. Enfin $\mathrm{d}f : U \longrightarrow F$, $x \longmapsto \mathrm{d}f(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,\mathrm{d}x_j$. Comme les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ sont continues sur U et $\mathrm{d}x_j$ constante (par rapport à x) , par **théorèmes généraux**, $\mathrm{d}f$ est continue de U dans F.

Exemple : L'application **det** est C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Réponse : En effet , on a vu plus haut que les dérivées partielles par rapport à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ existaient et valaient $\dfrac{\partial f}{\partial E_{i,j}}(M) = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(M)$. Toutes ces dérivées partielles sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car l'expression de $\dfrac{\partial f}{\partial E_{i,j}}(M)$ est composées de sommes, différences et produits des éléments de M.

Enfin si on note $f(M) = \det M$, $\mathrm{d}f(M)(H) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} h_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(M) = \mathrm{Tr}(\ H^{\mathbf{T}} \times \mathrm{com}(M)\ )$.

Exemple important : **Application linéaire**

Proposition : $\boxed{\text{Soit } f : E \longrightarrow F \text{ une application } \textbf{linéaire}\text{. Alors } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } E \text{ et } \forall a \in E \ \boxed{\mathrm{d}f(a) = f}}$

Démonstration 7 : $f(a+h) - f(a) = f(h) = f(h) + 0 = f(h) + o(h)$ et comme f est linéaire, on a $\mathrm{d}f(a) = f$. Comme $\mathrm{d}f : U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ est constante, elle est continue sur E, d'où f est C^1 sur E.

6°) *Opérations sur les fonctions différentiables et les fonctions de classe C^1*.

a) Opérations algébriques

Théorème : $\boxed{\begin{array}{l}\text{Soient } f, g : U \subset E \longrightarrow F \text{ différentiables (resp. } C^1\text{) sur } U \text{ et soit } \lambda \in \mathbb{K} \text{ alors} \\ \lambda f + g \text{ est différentiable (resp. } C^1\text{) sur } U \text{ et } \mathrm{d}(\lambda f + g) = \lambda\,\mathrm{d}f + \mathrm{d}g.\end{array}}$

Démonstration 8 :

Soit $a \in U$, posons $u = \mathrm{d}f(a)$ et $v = \mathrm{d}g(a)$. Par trichotomie, $f(a+h) = f(a)+u(h)+o(h)$ et $g(a+h) = g(a)+v(h)+o(h)$ (n'oubliez pas de mettre les petites flèches sur les h) . On a alors $(\lambda f+g)(a+h) = (\lambda f+g)(a)+(\lambda u+v)(h)+o(h)$, comme $\lambda u + v$ est linéaire, on en déduit que $\lambda f + g$ est différentiable sur U et pour tout $a \in U$ et tout $x \in E$, $\mathrm{d}(\lambda f + g)(a)(x) = \lambda\, \mathrm{d}f(a)(x) + \mathrm{d}g(a)(x)$ et donc $\mathrm{d}(\lambda f + g) = \lambda\, \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$ qui est bien sûr continue sur U par TG si f et g sont C^1 sur U. On peut donc conclure que $\lambda f + g$ est C^1 sur U si f et g sont C^1 sur U.

b) **B(f,g)**

Proposition :

Soit U un ouvert de E. Soient $f : U \longrightarrow F_1$ et $g : U \longrightarrow F_2$ où E, F_1 et F_2 sont 3 EV.

Soit B une application bilinéaire de $F_1 \times F_2$ dans G.

Si f et g sont différentiables (resp. C^1) sur U, alors $B(f, g)$ est différentiable (resp. C^1) sur U et $\forall a \in U :\ \mathrm{d}B(f, g)(a)(h) = B(\mathrm{d}f(a)(h), g(a)) + B(f(a), \mathrm{d}g(a)(h))$.

Démonstration 9 :

Soit $a \in U$, posons $u = \mathrm{d}f(a)$ et $v = \mathrm{d}g(a)$. Par trichotomie, $f(a + h) = f(a) + u(h) + o(h)$ et $g(a + h) = g(a) + v(h) + o(h)$ (n'oubliez pas de mettre les petites flèches sur les h) .

$B(f(a+h), g(a+h)) = B(\ f(a)+u(h)+o(h)\ ,\ g(a)+v(h)+o(h)\ ) = [B(\ f(a), g(a))]+[B(f(a), v(h))+B(u(h), g(a))]+$ $+[B(f(a) + u(h) + o(h), o(h)) + B(o(\|h\|, g(a) + v(h) + o(h))]$. Il y a bien 9 termes par bilinéarité et 3 paquets (entre $[\ \bullet\ ]$) : la constante $B(\ f(a), g(a))$, la partie linéaire et le petit o. Posons : $w(h) = B(f(a), v(h)) + B(u(h), g(a))$ et

$\varphi(h) = [B(f(a) + u(h) + o(h), o(h)) + B(o(\|h\|, g(a) + v(h) + o(h))$. On montre facilement que w est linéaire de E dans G. B étant bilinéaire en dimension finie , elle est continue sur $F_1 \times F_2$ et par caractérisation , il existe $k \geqslant 0$ tel que $\forall (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$, $\|B(x_1, x_2)\| \leqslant k\|x_1\| \cdot \|x_2\|$ (attention il y a ici 3 normes différentes notées pareil !)

On en déduit que $\forall h \in E$: $\|\varphi(h)\| \leqslant k\|f(a) + u(h) + o(h)\| \cdot \|o(h)\| + k\|o(h)\| \cdot \|g(a) + v(h) + o(h)\|$, d'où par théorème d'encadrement $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} = 0$: on a donc $\varphi(h) = o(h)$. On peut donc conclure que $B(f, g)$ est différentiable en a et $\mathrm{d}B(f, g)(a)(h) = B(\mathrm{d}f(a)(h), g(a)) + B(f(a), \mathrm{d}g(a)(h))$. En particulier si f et g sont de classe C^1 sur U, alors cette expression est continue sur U par TG et $B(f, g)$ est de classe C^1 sur U.

Exemple : Montrer que $f : A \longmapsto A^{-1}$ est C^1 sur $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ puis déterminer l'expression de $\mathrm{d}f(A)(H)$.

- Tout d'abord $U = \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ est ouvert comme image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par l'application **det** continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- L'expression $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\ \mathrm{com(A)^T}$, montre que les coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de A^{-1} sont des fractions rationnelles $r_{i,j}$ des coefficients de la matrice de départ A. On a donc $A^{-1} = (r_{i,j}(A))$ Chaque fonction $r_{i,j}$ est donc de classe C^1 sur U et $\dfrac{\partial f}{\partial x_{\alpha,\beta}}(A) = \left(\dfrac{\partial r_{i,j}}{\partial x_{\alpha,\beta}}(A)\right)$ et donc **f est C^1 sur $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$**.
- On a $\forall A \in U$: $A \times f(A) = I_n$. Utilisons la proposition précédente avec $B(M, N) = M \times N$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\Phi(A) = B(A, f(A))$. D'abord Φ est constante sur U (égale à I_n) donc sa différentielle est nulle (pensez à la trichotomie). Ensuite $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{d}\Phi(A)(H) = B(A, \mathrm{d}f(A)(H) + B(\mathrm{d}Id(A)(H), f(A)) = A\, \mathrm{d}f(A)(H) + HA^{-1}$.

On en déduit que $A\, \mathrm{d}f(A)(H) + HA^{-1} = (0)$, d'où par composition, $\boxed{\mathrm{d}f(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}}$.

c) **Composition**

Proposition :

Soient $f : U \subset E \longrightarrow V \subset F$ et $g : V \subset F \longrightarrow G$ où E, F et G sont 3 EV et U et V 2 ouverts.

Si f est différentiable en $a \in U$ et si g est différentiable en $b = f(a) \in V$ alors

$g \circ f : U \subset E \longrightarrow G$ est différentiable en a et l'on a : $\boxed{\mathrm{d}(g \circ f)(a) = [\,\mathrm{d}g(b)] \circ [\,\mathrm{d}f(a)] = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)}$.

En particulier si f et g sont de classe C^1 respectivement sur U et V, alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur U.

Démonstration 10 :

$f(a + h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)$ et $g(b + k) = g(b) + v(k) + \|k\|\varepsilon_2(k)$ avec $u = \mathrm{d}f(a)$ et $v = \mathrm{d}g(b)$.

Donc $g\circ f(a+h) = g[f(a+h)] = g[f(a)+u(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)] = g[b+u(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)]$
$= g(b)+v(\ u(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\ ) + \Big\|\ u(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\ \Big\|\ \varepsilon_2\ \Big(u(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\ \Big)$
$= g(b)+v(\ u(h)) + \|h\|v(\varepsilon_1(h)\ ) + \Big\|\ u(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\ \Big\|\ \varepsilon_2\ \Big(u(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\ \Big)$
$= g(b)+v(u(h))+\varphi(h)$ avec $\varphi(h) = \|h\|v(\varepsilon_1(h)) + \Big\|\ u(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\ \Big\|\ \varepsilon_2\ \Big(u(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\ \Big)$
Donc $\|\varphi(h)\| \leqslant \|h\|\ \|v(\varepsilon_1(h))\| + \Big\|\ u(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\ \Big\|\ \Big\|\ \varepsilon_2\ \Big(u(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\ \Big)\ \Big\|$.
Or $\Big\|\ u(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\ \Big\| \leqslant \|u(h)\| + \|h\|\ \|\varepsilon_1(h)\| \leqslant |||u|||\ \|h\| + \|h\|\ \|\varepsilon_1(h)\|$

Ensuite u est continue (car linéaire en dimension finie), donc il existe un nombre $k \geqslant 0$ tel que $\|u(h)\| \leqslant k\cdot\|h\|$. Donc $\|\varphi(h)\| \leqslant \|h\|\ \|v(\varepsilon_1(h))\| + \Big[\ k\ \|h\| + \|h\|\|\varepsilon_1(h)\|\ \Big]\ \Big\|\varepsilon_2\ \Big(u(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)\ \Big)\ \Big\| = o(h)$ par **théorèmes généraux** vu que $\lim\limits_{0}\varepsilon_1 = \lim\limits_{0}\varepsilon_2 = 0$. On en déduit donc que $g\circ f(a+h) = g(f(a)) + v(u(h)) + o(h)$ d'où $\boxed{g\circ f \text{ est différentiable en } a}$ et $\boxed{\mathrm{d}(g\circ f)(a) = v\circ u = \mathrm{d}g(b)\circ \mathrm{d}f(a)}$. Enfin, par composée $a \longmapsto \mathrm{d}(g\circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a))\circ \mathrm{d}f(a)$ est bien continue sur U. **Conclusion** : $\boxed{g\circ f \text{ est } C^1 \text{ sur } U}$.

d) **TG encore et toujours ! !**

Corollaire : Tout "**cocktail**" de fonctions usuelles est donc de classe C^1 sur son domaine de définition (attention aux racines carrées et aux valeurs absolues). On retrouve donc une fois de plus le label "T.G.".

Exemple :

f définie par $f(x,y,z) = \dfrac{e^{xyz}+\sin(x+3z^2)}{x+2y-3z}$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^3 - P\big/ x+2y-3z=0$ par T.G. !

e) **Applications Fondamentales**

Théorème 1 :

Soient $g : U\subset \mathbb{R}^p \longrightarrow F$ de classe C^1 sur U et soit u_1, ..., u_p , p fonctions d'un intervalle ouvert $I\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 tel que $\forall t\in I$: $\Big(\ u_1(t),\dots,u_p(t)\ \Big)\in U$.

Alors $G : \begin{cases} I \longrightarrow F \\ t \longmapsto g(\ u_1(t),\dots,u_p(t)\ ) \end{cases}$ est **de classe** C^1 **sur** I et $\forall t\in I$: $\boxed{G'(t) = \sum\limits_{j=1}^{p} u_j'(t)\cdot\dfrac{\partial g}{\partial x_j}\Big(\ u_1(t),\dots,u_p(t)\Big)}$.

Démonstration 11 : Soit $f : \begin{cases} I \longrightarrow U\subset\mathbb{R}^p \\ t\longmapsto (u_1(t),\dots,u_p(t)) \end{cases}$

f est de classe C^1 sur I et donc par composition, $G = g\circ f$ est aussi de classe C^1 sur I dans F. Comme G est une fonction **d'une variable**, la différentielle de G est définie par la formule : $dG(a)(t) = G'(a)t$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ ou si l'on veut $G'(a) = \mathrm{d}G(a)(1)$. Soit $a\in I$, posons $b = (u_1(a),\dots,u_p(a))$, on a alors

$\mathrm{d}G(a)(1) = \mathrm{d}(g\circ f)(a)(1) = [\mathrm{d}g(b)]\circ[\mathrm{d}f(a)](1) = [\mathrm{d}g(b)](f'(a)) = [\mathrm{d}g(b)](u_1'(a),\dots,u_p'(a))$.

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule $\mathrm{d}f(a)(h) = \sum\limits_{i=1}^{p} h_j\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ avec $h = \sum\limits_{j=1}^{p} h_je_j$ à la fonction g :

$\mathrm{d}G(a)(1) = \left(\sum\limits_{j=1}^{p} u_j'(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(u_1(a),\dots,u_p(a))\right)$ et donc $G'(a) = \sum\limits_{j=1}^{p} u_j'(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(u_1(a),\dots,u_p(a))$

Exercice 1 : Écrire ce **théorème** avec $p=2$, "$x_1 = x$ et $x_2 = y$".

Exercice 2 : Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y)\longmapsto f(x,y) \end{cases}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, u et v de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et soit

$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha,\beta)\longmapsto f(u(\alpha,\beta),v(\alpha,\beta)) \end{cases}$ Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, calculer $\dfrac{\partial F}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial\beta}(\alpha,\beta)$.

Réponse :

F est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ par TG et $\dfrac{\partial F}{\partial\alpha}(\alpha,\beta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u(\alpha,\beta),v(\alpha,\beta))\times\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(\alpha,\beta),v(\alpha,\beta))\times\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)$

et $\dfrac{\partial F}{\partial\beta}(\alpha,\beta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u(\alpha,\beta),v(\alpha,\beta))\times\dfrac{\partial u}{\partial\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(\alpha,\beta),v(\alpha,\beta))\times\dfrac{\partial v}{\partial\beta}(\alpha,\beta)$.

Exercice 3 : Dériver formellement $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Réponse : Posons $F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$. L'idée est de "différentier" (au sens usuel du terme) les x des bornes et le x à l'intérieur de l'intégrale. Pour cela on introduit une fonction de deux variables : $G(x,y) = \displaystyle\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Par le programme de MPSI, $\dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y) = f(x,v(y))\cdot v'(y) - f(x,u(y))\cdot u'(y)$ et avec le programme de MP, $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\int_{u(y)}^{v(y)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$. Enfin $F(x) = G(x,x)$ et donc

$F'(x) = \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,x) + \dfrac{\partial G}{\partial y}(x,x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} \dfrac{\partial f}{\partial x} f(x,t)\,\mathrm{d}t + f(x,v(x))\cdot v'(x) - f(x,u(x))\cdot u'(x)$.

Exercice 4 : Soit un fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$: $f(y,x) = -f(x,y)$.

Qu'en déduire pour les dérivées partielles ?

f) **Règle de la chaine**

Calcul des dérivées partielles de $G : (u_1,\ldots,u_m) \longmapsto f(x_1(u_1,\ldots,u_m),\ldots,x_p(u_1,\ldots,u_m))$.

La règle de la chaine est la notation : $\boxed{\forall k\in[\![1,m]\!] \quad , \quad \dfrac{\partial G}{\partial u_k} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}\cdot\dfrac{\partial x_j}{\partial u_k}}$

Cette écriture certes "abusive" (car on omet les points où l'on évalue les différentes dérivées partielles) est très simple à retenir (et à écrire).

7°) *Caractérisation des fonctions constantes de classe C^1*

Théorème 1 :

> Soit U un ouvert de E. Soit f une fonction de classe C^1 d'un ouvert U dans F et soit $(a,b)\in U^2$.
>
> Soit γ est une application de classe C^1 de $[0,1]$ dans U (arc de classe C^1) tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.
>
> Alors on a : $\boxed{f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}$
>
> Rappel : le $\cdot$ signifie comme pour les équa. diff. : $\mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))$.

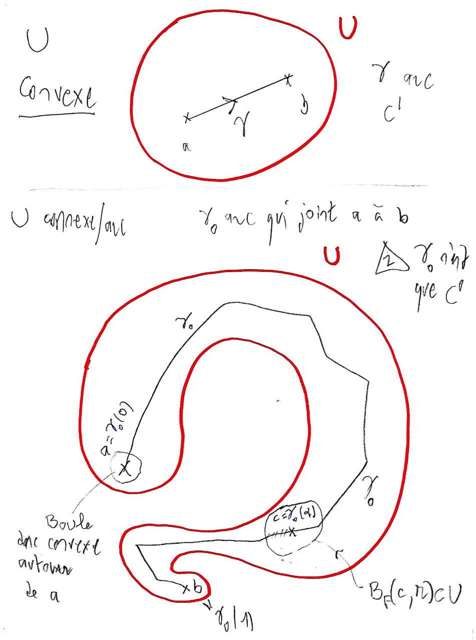
Démonstration 12 : Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_p)$ une base de E. On peut donc identifier E à $\mathbb{R}^p$ et noter $a = (a_1,\ldots,a_p)$ (en fait a de coordonnées $(a_1,\ldots,a_p)$), $b = (b_1,\ldots,b_p)$ et $f(x_1,\ldots,x_p)$ pour tout $x = (x_1,\ldots,x_p)\in U$. Notons enfin $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\ldots,\gamma_p(t))$. Posons $G(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t))$. On a donc $G(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\gamma_j'(t)\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_p(t))$: on reconnait la dérivée de la fonction $F : t\longmapsto f(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_p(t))$, soit $G(t) = F'(t)$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 F'(t)\,\mathrm{d}t = F(1) - F(0)$. Or $F(0) = f(\gamma_1(0),\ldots,\gamma_p(0)) = f(\gamma(0)) = f(a)$ et de même $F(1) = f(b)$. On conclut $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque : l'introduction d'une base n'est pas indispensable si on maitrise bien les différentielles et notamment les composées : on reconnait directement que $G(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))$ est la dérivée de $f(\gamma(t))$.

Corollaire :

> Si U est un ouvert **connexe par arcs** de E et $f : U\longrightarrow F$ de classe C^1 sur U :
>
> f est **constante** sur $U \iff \mathrm{d}f$ est **nulle** sur $U \iff \forall j\in[\![1,p]\!]$, $\forall x\in U$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0$

Démonstration 13 il faut que γ soit C^1 dans le théorème précédent.



Premier cas (exigible) : U convexe

Soit $(a,b)\in U^2$, montrons que $f(a)=f(b)$ à l'aide du théorème ci-dessus.

On considère l'arc $\gamma:[0,1]\longrightarrow U$, $t\longmapsto(1-t)a+tb$. Cet arc est de classe C^1 à valeur dans U par convexité, d'où : $f(b)-f(a)=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 0\,\mathrm{d}t=0$, donc on a bien $f(a)=f(b)$.

Deuxième cas (non exigible) : U connexe par arc

Soit $(a,b)\in U^2$, montrons que $f(a)=f(b)$ à l'aide du premier cas. Il existe donc une arc γ_0 qui n'est que C^0 de $[0,1]$ dans U et tel que $\gamma_0(0)=a$ et $\gamma_0(1)=b$. L'idée c'est qu'autour de a il y a une boule (donc convexe) dans U, donc le long de l'arc γ_0 dans cette boule la fonction est constante et on avance de proche en proche jusqu'à b. Précisons : Notons $X=\{t\in[0,1]$ tel que $f(\gamma_0(t))=f(a)\ \}$ On a X non vide car $0\in X$, $X\subset[0,1]$, donc possède une borne supérieure α. D'autre part X est un fermé relatif de $[0,1]$ comme image.... et donc un fermé de $\mathbb{R}$ car .... On a donc $\alpha\in X$. Supposons que $\alpha\neq 1$. Posons $c=\gamma_0(\alpha)$, il existe $r>0$ tel que $B_o(c,r)\subset U$ (pour une norme choisie quelconque de E), car U est ouvert. Ensuite par continuité de la fonction γ_0 en α : il existe $\eta>0$ tel que $\forall t\in[\alpha-\eta,\alpha+\eta]\subset[0,1]$, $\|\gamma_0(t)-\gamma_0(\alpha)\|=\|\gamma_0(t)-c\|\leqslant r$. Or la boule $B_o(c,r)\subset U$ est ouverte et convexe et la différentielle de f y est nulle donc la fonction f est constante sur cette boule ouverte. On en déduit que $\forall t\in[\alpha-\eta,\alpha+\eta]$: $f(\gamma_0(t))=f(c)=f(a)$, donc $\alpha+\eta\in X$: absurde.

8°) *Fonctions vectorielles de plusieurs variables*

Soient $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ une base de F. Soit $f:U\subset E\longrightarrow F$. Notons $(f_1,\dots f_n)$ les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}'$: $f:\left\{\begin{array}{l} U\subset E\longrightarrow F\\ x\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\longmapsto f(x)\begin{pmatrix}f_1(x_1,\dots,x_p)\\ \vdots\\ f_n(x_1,\dots,x_p)\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}\end{array}\right.$

Théorème :

f est de **classe** C^1 sur U SSI $\forall i\in[\![1,n]\!]$: f_i est de **classe** C^1 sur U et dans ce cas $\mathrm{d}f(a)(h)=\displaystyle\sum_{i=1}^n \mathrm{d}f_i(a)(h)e'_i$.

Démonstration 14 : $\Longrightarrow]$ f_i est de classe C^1 par composition : $f_i=\mathrm{d}y_i\circ f$ où $\mathrm{d}y_i$ est la fonction i-ième fonction coordonnée dans la base $\mathcal{B}'$ $(y=\displaystyle\sum_{k=1}^n y_k e'_k\in F\longmapsto y_i)$

$\Longleftarrow]$ $f_i(a+h)e'_i=f_i(a)e'_i+u_i(h)e'_i+\|h\|\varepsilon_i(h)e'_i$ et donc : $\displaystyle\sum_{i=1}^n f_i(a+h)e'_i=\sum_{i=1}^n f_i(a)e'_i+\sum_{i=1}^n u_i(h)e'_i+\sum_{i=1}^n\|h\|\varepsilon_i(h)e'_i$.

Matrice Jacobienne : On appelle **Matrice Jacobienne** de $f : U \subset E \longrightarrow F$, dans les bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ de E et F, $a \in U$,

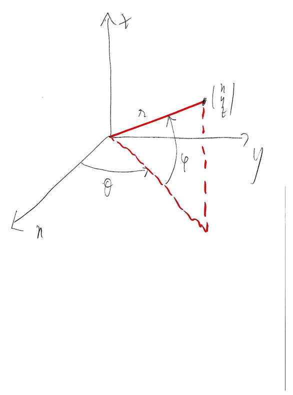
$$\boxed{J_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(a) = J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}}$$

Jacobien cas $E = F$: On appelle **Jacobien** de $f : U \subset E \longrightarrow E$, dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E, au point a de U, le déterminant de la matrice jacobienne que l'on note :

$$\boxed{\frac{D(f_1, \ldots, f_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)}(a) = det(J_f(a)) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_p}(a) \end{vmatrix}}$$

Exemples : Calculer la matrice Jacobienne et le Jacobien des fonctions suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases} \quad \text{et } g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \phi) \longmapsto \text{les coordonnées sphériques : } \begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \end{cases}$$



$J_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ et $\det(J_f(r, \theta)) = r$ (le même r qui apparait dans les intégrales doubles : $\displaystyle\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\underline{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$)

Proposition 1 : $\boxed{J_f(a) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(\mathrm{d}f(a)\right)}$

Démonstration 15 : Exercice

$\mathrm{d}f(a)(h) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}f_i(a)(h)e'_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(a+h)e'_i = \sum_{i=1}^{n} f_i(a)e'_i + \sum_{i=1}^{n} u_i(h)e'_i + \sum_{i=1}^{n} \|h\|\varepsilon_i(h)e'_i$.

Proposition 2 : Composée :

> Soient $f : U \subset E \longrightarrow V \subset F$ et $g : V \subset F \longrightarrow G$ où E, F et G sont 3 EV et U et V 2 ouverts.
>
> Si f et g sont de classe C^1, alors $g \circ f : U \subset E \longrightarrow G$ et $\forall a \in U$, en posant $b = f(a)$, on a $J_{g\circ f}(a) = J_g(b) \times J_f(a)$

Démonstration 16 Exercice (avec la démonstration 10 (composée de différentielles)).

B) FONCTIONS NUMÉRIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES

1°) *Algèbre $C^1(U)$*

Définition : Soit U un ouvert de E. $\boxed{C^1(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f \text{ de classe } \mathrm{C}^1 \text{ sur U}\}}$

Théorème : $\boxed{(\ C^1(U)\ ,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ \times\ ) \text{ est une } \mathbb{R}\text{-}\mathbf{algèbre}}$

De plus si f et g sont dans $C^1(U)$, alors $\dfrac{\partial(f\cdot g)}{\partial x_j} =$

Si $\forall x \in U, f(x) \neq 0$ et f C^1 sur U, alors $\dfrac{1}{f}$ est C^1 sur U et on a sur U : $\dfrac{\partial(\frac{1}{f})}{\partial x_j} =$

Démonstration 17 :

- $\dfrac{\partial(f\cdot g)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}\cdot g + f\cdot\dfrac{\partial g}{\partial x_j}$
- $\dfrac{\partial(\frac{1}{f})}{\partial x_j}(x) = -\dfrac{1}{f(x)^2}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$

Exercice : Déterminer $C^1(U)^*$ (ensemble des éléments inversibles).

Réponse : Grâce au théorème précédent, on a $C^1(U)^* = \Big\{f \in C^1(U) \text{ telle que } \forall x \in U\ ,\ f(x) \neq 0\Big\}$.

2°) *Gradient*

Théorème-*Définition* :

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel **euclidien** et si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^1 sur $U \subset E$, alors pour tout point $a \in U$, il existe un unique vecteur de E, noté $\nabla f(a)$ (ou grad $f(a)$), tel que :
$\boxed{\forall \overrightarrow{h} \in E,\ \mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h}) = (\ \nabla f(a) \mid \overrightarrow{h}\ )}$. On dit alors que $\boxed{\nabla f(a) \text{ est le } \textbf{gradient} \text{ de } f \text{ en } a}$.

Démonstration 18 :

Par l'isomorphisme canonique entre l' espace euclidien E et son dual E^* (théorème de représentation de Riesz), pour toute forme linéaire ℓ de E^*, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{v}$ de E tel que $\forall \overrightarrow{h} \in E,\ \ell(\overrightarrow{h}) = (\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{h})$.

Or $\ell_0 : \overrightarrow{h} \longmapsto \mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h})$ est une forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$ donc il existe un unique vecteur $\overrightarrow{v}$ de E tel que $\forall \overrightarrow{h} \in E,\ \ell_0(\overrightarrow{h}) = \mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h}) = (\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{h})$.

Expression du gradient dans une base OTN :

Soit $\mathcal{B}$ une base OTN de E alors pour tout a de U, on a : $\boxed{\nabla f(a) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}$

Démonstration 19 :

Avec les notations ci-dessus, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base OTN de E et que $\overrightarrow{h}$ a pour coordonnées $(h_1, \ldots, h_p)$, alors on sait que $\mathrm{d}f(a)(\overrightarrow{h}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$: on reconnait l'expression du produit scalaire dans une base OTN des vecteurs $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Par unicité du gradient, on peut conclure.

Interprétation géométrique du gradient :

Définition :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U. On appelle **graphe** de la fonction f ou **surface d'équation cartésienne** $z = f(x, y)$ (dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$) , l'ensemble
$\boxed{\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } z = f(x, y)\}\ . \quad \text{On le note} \quad \mathcal{S} \big/ z = f(x, y)}$.

Le gradient de f en a donne, lorsqu'il est non nul, la direction de plus grande croissance de f ou autrement dit le gradient est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

En effet, lorsque $\|u\| = 1$, $d(f)(a)(u) = (\mathrm{grad} f(a) | u)$ prend la plus grande valeur possible lorsque $u = \dfrac{\mathrm{grad} f(a)}{\|\mathrm{grad} f(a)\|}$ (c'est le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
De plus, pour cette valeur de u, $d(f)(a)(u) = \|\mathrm{grad} f(a)\|$.

Dans le cas $p=2$, si on imagine un marcheur se promenant sur une surface $\mathcal{S}\big/ z=f(x,y)$, le gradient de f en un point indique la direction horizontale pour laquelle l'altitude augmente le plus. Pour gagner le sommet d'une montagne au plus vite, le marcheur a tout intérêt à suivre (lorsque c'est possible) cette direction à tout moment.

Expression du gradient en coordonnées polaire dans un plan euclidien

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (rapportée à son repère canonique OTN $(O, \vec{i}, \vec{j})$) tel que $(0,0) \notin U$. Soit f de U dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur U. Pour tout réel θ, on note $\vec{u}_\theta = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ et $\vec{v}_\theta = \vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$.

Soit g définie par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer que $\forall a \in U$ (donc $a \neq O$) : $\boxed{\nabla f(a) = \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\ \vec{u}_\theta + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\ \vec{v}_\theta}$.

Démonstration 20 : Dérivons partiellement g à l'aide de la règle de la chaine :

$\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \sin\theta$ et

$\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times (-r\sin\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times (r\cos\theta)$.

D'où $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\ \vec{u}_\theta + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\ \vec{v}_\theta =$

$= [\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \sin\theta](\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) +$

$+ \dfrac{1}{r}[\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times (-r\sin\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times (r\cos\theta)](-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})$

$= \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\vec{j} = \nabla f(a)$ avec $a = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Exercice : Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $\mathcal{R} = (O, e_1, \dots, e_p)$ un repère OTN de E. Soit φ une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère la fonction $f : E - \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \longmapsto \varphi(OM)$.

Déterminer le gradient de f en tout point M de $E - \{O\}$.

Réponse : On note $M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ et donc $f(M) = \varphi\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2}\right)$, d'où pour tout j ,

$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(M) = \dfrac{2x_j}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2}}\varphi'\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2}\right) = \dfrac{x_j\varphi'(OM)}{OM}$. On en déduit $\boxed{\nabla f(M) = \dfrac{\varphi'(OM)}{OM}\overrightarrow{OM}}$.

3°) *Vecteurs tangents à une partie d'un evn*

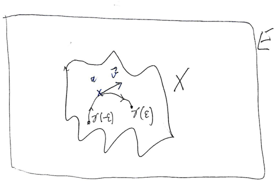
a) *Définition 1*

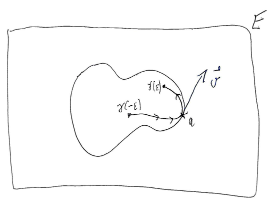
Soit X est une partie de E , a un point de X et $\vec{v}$ un vecteur de E.

On dit que **$\vec{v}$ est tangent à X en a** , s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans X : $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow X$

$t \longmapsto \gamma(t)$ tels que $\boxed{\gamma(0) = a \text{ et } \gamma'(0) = \vec{v}}$.

Définition : $\boxed{\mathcal{T}_a X = \{\vec{v} \text{ tangent à } X \text{ en } a\}}$





Proposition :

a) **Cône** Si $\overrightarrow{v}$ est tangent à X en a et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda\overrightarrow{v}$ est tangent à X en a .

b) Si $a \in \overset{o}{X}$ alors $\boxed{\mathcal{T}_a X = E}$.

c) **Tangent-tangente** Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I alors pour tout $x_0 \in I$ posons $a = (x_0, f(x_0))$ et $X = \{(x, f(x))$ tel que $x \in I\}$ (le graphe de f). On a alors $\boxed{\mathcal{T}_a X = vect((1, f'(x_0)))}$.

d) **Vecteurs tangents à un SEA** Soit $a_0 \in E$ et $\mathcal{F} = a_0 + \overrightarrow{F}$ un sous-espace affine de direction le SEV $\overrightarrow{F}$. Pour tout point $a \in \mathcal{F}$, on a $\boxed{\mathcal{T}_a\mathcal{F} = \overrightarrow{F}}$.

e) **Vecteurs tangents à une sphère** Soit E un espace euclidien et $S(a_0, r)$ la sphère de centre $a_0 \in E$ et de rayon $r > 0$. Soit $a \in S(a_0, r)$ on a $\boxed{\mathcal{T}_a S(a_0, r) = (a - a_0)^{\perp}}$.

Réponse : **a)** Soit $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans X : tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$.

Premier cas : $\lambda \neq 0$. On considère l'arc $\gamma_1 : \left] -\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}, \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}\right[\longrightarrow X$, défini par $\gamma_1(t) = \gamma(\lambda t)$. On a :

• $\forall t \in \left] -\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}, \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}\right[: \gamma_1(t) \in X$, • $\gamma_1(0) = a$, • γ_1 est dérivable sur $\left] -\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}, \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}\right[$ et $\forall t \in \left] -\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}, \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}\right[: \gamma_1'(t) = \lambda\gamma'(\lambda t)$, donc $\gamma_1'(0) = \lambda\overrightarrow{v}$.

Deuxième cas : $\lambda = 0$. L'arc $\gamma_1 : \Big] -1, 1\Big[\longrightarrow X$, défini par $\gamma_1(t) = \gamma(0) = a$ (le support est un point) convient $\gamma_1'(0) = \overrightarrow{0}$. On en déduit que $\mathcal{T}_a X$ est un cône (c'est-à-dire un ensemble stable par homothéties).

b) Si $a \in \overset{o}{X}$ alors il existe $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset X$. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul de E, On considère l'arc $\gamma : \left] -\dfrac{r}{\|\overrightarrow{v}\|}, \dfrac{r}{\|\overrightarrow{v}\|}\right[\longrightarrow X$, défini par $\gamma(t) = a + t\overrightarrow{v}$. On a :

• $\forall t \in \left] -\dfrac{r}{\|\overrightarrow{v}\|}, \dfrac{r}{\|\overrightarrow{v}\|}\right[: \gamma(t) \in X$, • $\gamma(0) = a$, • γ est dérivable sur $\left] -\dfrac{r}{\|\overrightarrow{v}\|}, \dfrac{r}{\|\overrightarrow{v}\|}\right[$ et $\gamma'(t) = \overrightarrow{v}$, donc $\gamma_1'(0) = \overrightarrow{v}$.
Comme $\overrightarrow{0}$ est un vecteur tangent à tout ensemble (voir le a)), on conclut $\boxed{\mathcal{T}_a X = E}$.

c) Montrons que $(1, f'(x_0)) \in \mathcal{T}_a X$. Comme I est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset I$. Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow X$ défini par $\gamma(t) = (x_0 + t, f(x_0 + t))$ convient. Avec le **a)** on a donc $vect((1, f'(x_0))) \subset \mathcal{T}_a X$.

Réciproquement soit $\overrightarrow{v} \in \mathcal{T}_a X$, il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $] - \varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans X tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$. Posons $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, on a γ_1 et γ_2 dérivable sur $] - \varepsilon, \varepsilon[$ et $\forall t \in] - \varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma_2(t) = f(\gamma_1(t))$. On en déduit que $\overrightarrow{v} = \gamma'(0) = (\lambda, \lambda f'(x_0)) \in vect((1, f'(x_0)))$ avec $\lambda = \gamma_1'(0)$.

d) Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{F}$, soit $\gamma :] - 1, 1[\longrightarrow \mathcal{F}$ défini par $\gamma(t) = a + t\overrightarrow{v}$. γ vérifie $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$ et $\forall t \in] - 1, 1[$ $\gamma(t) \in \mathcal{F}$. On en déduit $\overrightarrow{v} \in \mathcal{T}_a\mathcal{F}$ et donc $\overrightarrow{F} \subset \mathcal{T}_a\mathcal{F}$.

Réciproquement, soit $\overrightarrow{v} \in \mathcal{T}_a\mathcal{F}$, il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $] - \varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans $\mathcal{F}$ tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$. $\forall t \in] - \varepsilon, \varepsilon[-\{0\} : \dfrac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = \dfrac{\gamma(t) - a}{t} \in \overrightarrow{F}$. Or $\overrightarrow{F}$ est fermé car SEV de dimension finie, donc $\gamma'(0) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \dfrac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \in \overrightarrow{F}$. On en déduit que $\overrightarrow{v} = \gamma'(0) \in \overrightarrow{F}$ et donc $\mathcal{T}_a\mathcal{F} \subset \overrightarrow{F}$. On conclut que $\boxed{\mathcal{T}_a\mathcal{F} = \overrightarrow{F}}$.

e) Posons $X = S(a_0, r)$ et soit $\overrightarrow{v} \in \mathcal{T}_a X$, il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $] - \varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans X tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$.

$\forall t \in] - \varepsilon, \varepsilon[$ posons $g(t) = \gamma(t) - a_0$: On a donc $\forall t \in] - \varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma(t) = a_0 + g(t)$ et $\|g(t)\| = r$.

On en déduit donc que $\forall t \in] - \varepsilon, \varepsilon[$: $(g(t)|g(t)) = r^2$. En dérivant cette relation, on obtient

$(g'(t)|g(t)) + (g(t)|g'(t)) = 0$ et donc $(g'(t)|g(t)) = 0$. En $t = 0$, on obtient donc $(\gamma'(0)|\gamma(0) - a_0) = 0$, soit $(\overrightarrow{v}|a - a_0)$. D'où $\overrightarrow{v} \in (a - a_0)^{\perp}$.

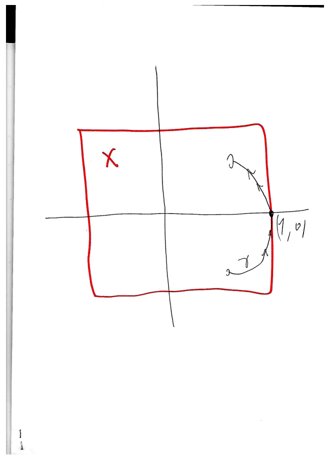
Réciproquement, soit $\overrightarrow{v} \in (a - a_0)^{\perp}$, $\overrightarrow{v} \neq 0$. Posons $\overrightarrow{i} = \dfrac{a - a_0}{\|a - a_0\|}$ et $\overrightarrow{j} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$. On a donc $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ famille OTN. Posons $\gamma :] - \pi, \pi[\longrightarrow X$ défini par $\gamma(t) = a_0 + r\cos t\,\overrightarrow{i} + r\sin t\,\overrightarrow{j}$. γ vérifie $\gamma(0) = a_0 + r\,\overrightarrow{i} = a$, $\gamma'(0) = r\,\overrightarrow{j}$ et $\forall t \in] - 1, 1[$ $\gamma(t) \in X$. On en déduit $r\,\overrightarrow{j} \in \mathcal{T}_a X$ et comme $r \neq 0$ donc $\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|\,\overrightarrow{j} \in \mathcal{T}_a X$ (avec a)). On conclut que $\boxed{\mathcal{T}_a X = (a - a_0)^{\perp}}$.

Exemples

a) Soit $X = [-1, 1]^2$. Déterminer $\mathcal{T}_a X$ avec $a = (0, 0)$, $a = (1, 0)$, $a = (1, 1)$.

Réponse : • Comme $a = (0, 0) \in \overset{o}{X}$ alors $\boxed{\mathcal{T}_a X = \mathbb{R}^2}$.

- Soit $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans X : tels que $\gamma(0) = a = (1, 0)$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$.

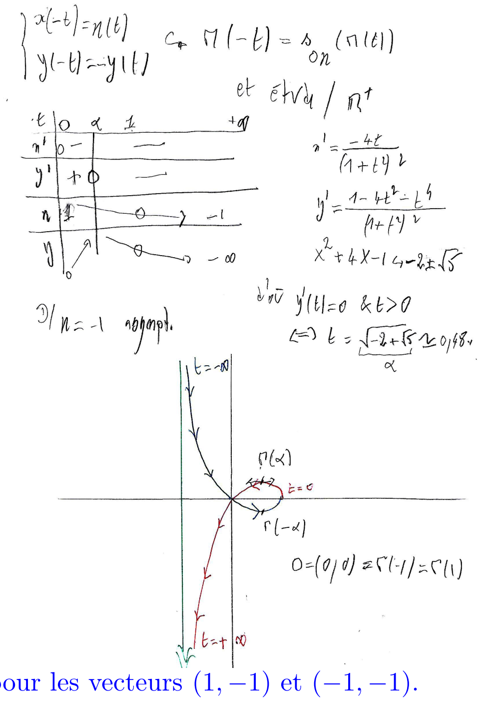


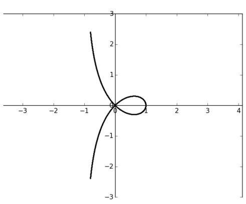
Montrons que $\overrightarrow{v}$ est de la forme $(0, \beta)$. Notons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$. On a $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $x'(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta$. Comme la fonction x vérifie $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[: x(t) \leqslant 1 = x(0)$, la valeur $t_0 = 0$ est un un maximum de la fonction x sur l'intervalle ouvert $]-\varepsilon, \varepsilon[$, le cours de MPSI dit qu'alors $x'(0) = 0$ soit $\alpha = 0$. On en déduit que $\mathcal{T}_a X \subset \text{vect}((0, 1))$.

Réciproquement, soit $\overrightarrow{v} = (0, \beta)$, montrons que $\overrightarrow{v} \in \mathcal{T}_a X$. Soit l'arc γ défini par $\gamma \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = \beta t \end{cases}$ sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ avec $\varepsilon = \min(\dfrac{1}{|\beta|}, 1)$ (le graphe de γ est sur le dessin ci-dessus) . On a γ à valeur dans X , $\gamma(0) = a = (1, 0)$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$. On conclut $\boxed{\mathcal{T}_a X = \text{vect}((0, 1))}$.

- On fait le même raisonnement qu'au cas précédant sur x et sur y : $x'(0) = y'(0) = 0$. On conclut $\boxed{\mathcal{T}_a X = \{\overrightarrow{0}\}}$.

b) Tracer $\Gamma \begin{cases} x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y = t\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{cases}$ puis déterminer des vecteurs tangents à X =support(Γ) en $a = (0, 0)$.





L'arc Γ va fournir un arc pour les vecteurs $(1, -1)$ et $(-1, -1)$.

On considère l'arc γ défini par $\gamma(t) = \Gamma(t-1)$ sur $]-1, 1[$. On a $\forall t \in]-1, 1[: \gamma(t) \in X$ =support(Γ) , $\gamma(0) = a = (0, 0)$ et $\gamma'(0) = (x'(-1), y'(-1)) = (1, -1)$. On en déduit que $\overrightarrow{v} = (1, -1) \in \mathcal{T}_a X$, d'où $vect(1, -1) \subset \mathcal{T}_a X$. On fait de même avec $\gamma(t) = \Gamma(t + 1)$ et $\overrightarrow{v} = (-1, -1)$ **Conclusion**: : $\boxed{vect(1, -1) \cup vect(-1, -1) \subset \mathcal{T}_a X}$.

b) *Théorème fondamental*

> Soit U un ouvert de E et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe C^1 sur U.
> Soit $X = \{x \in U \text{ tel que } g(x) = 0\}$ et soit $a \in X$ tel que $dg(a) \neq 0$, alors $\boxed{\mathcal{T}_a X = \ker dg(a)}$.

Démonstration 21 : HP

Remarque : Il y a une inclusion "facile" et une inclusion "HP".

Soit $\overrightarrow{v} \in \mathcal{T}_a X$ il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans X tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$. Dérivons cette relation : $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$: $dg(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$. On a donc $dg(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0$, soit $dg(a) \cdot \overrightarrow{v} = 0$. On en déduit que $\overrightarrow{v} \in \ker\, dg(a)$ et donc $\mathcal{T}_a X \subset \ker\, dg(a)$. C'est l'autre inclusion qui n'est pas évidente.

c) *Définition 2*

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U. On appelle **graphe** de la fonction f ou **surface d'équation cartésienne** $z = f(x, y)$ (dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$) , l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } z = f(x, y)\} . \quad \text{On le note} \quad \mathcal{S}/z = f(x, y).$$

et plus généralement on appelle aussi surface tout ensemble du type :

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } F(x, y, z) = 0\}$$

Exemples :

a) Donner un exemple simple de surface.

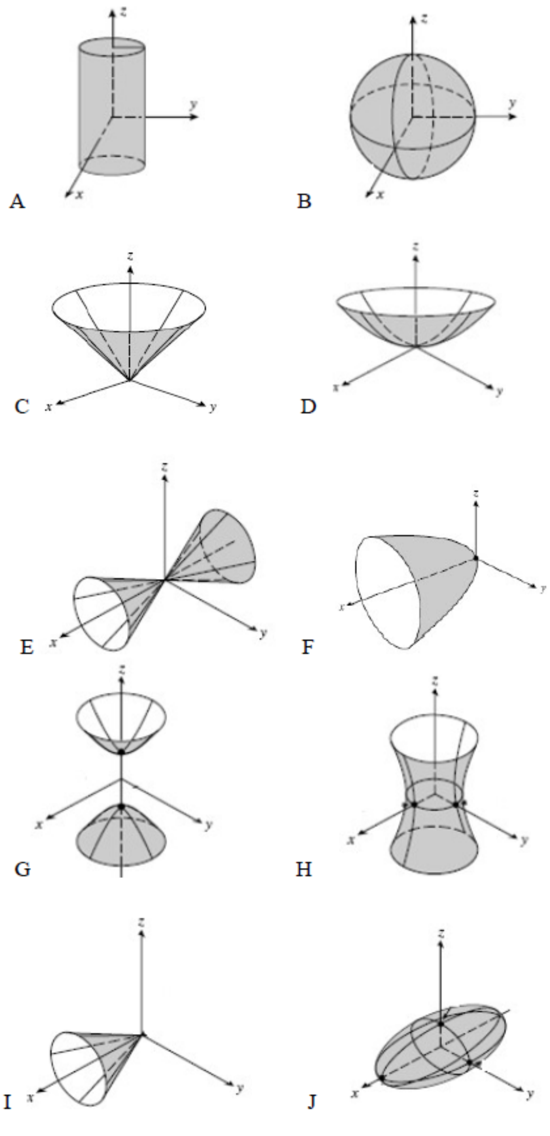
b) $\mathcal{S}/x^2 + y^2 + z^2 = 6$. On appelle cette surface une

c) Représenter la surface $\mathcal{S}/z = x^2 + y^2$.

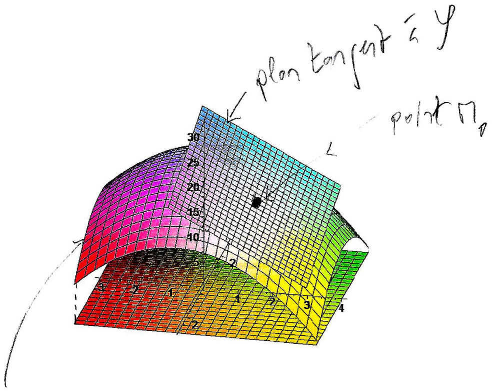
d) Montrer que $\mathcal{C}/z^2 = x^2 + y^2$ est la réunion de 2 surfaces d'équation $\mathcal{S}/z = f(x, y)$, représenter $\mathcal{C}$.

e) Représenter la surface $\mathcal{S}/x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. $z^2 = x^2 + y^2$ ______
2. $z^2 = -1 + x^2 + y^2$ ______
3. $z^2 = 9 - x^2 - y^2$ ______
4. $4 = x^2 + y^2$ ______
5. $z^2 = 1 + x^2 + y^2$ ______
6. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ______
7. $x = 1 + y^2 + z^2$ ______
8. $x^2 + 4y^2 = 36 - 9z^2$ ______
9. $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ ______
10. $z = x^2 + y^2$ ______



```
> p3:=plan(1,1.7,2):
  p4:=pied(1,1.7,3):
  display(p1,p2,p3,p4);
```



[> Surface $\mathcal{S} / z = 26 - x^2 - y^2$

$x \in [-3, 3]$

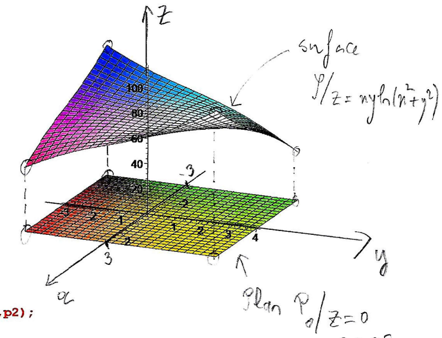
$y \in [-3, 4]$

Equation du plan tg en $a = (\alpha, \beta)$:

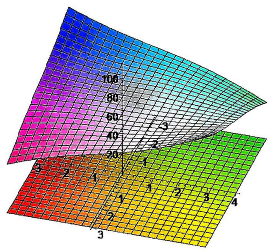
$\mathcal{P}_a /$

```
[>
> a:=3;
  p2:=plot3d([x,y,x*y*ln(x^2+y^2)+77.],x=-a..a,y=-a..a+1):
  p1:=plot3d([x,y,0],x=-a..a,y=-a...a+1):
  display(p1,p2);
```

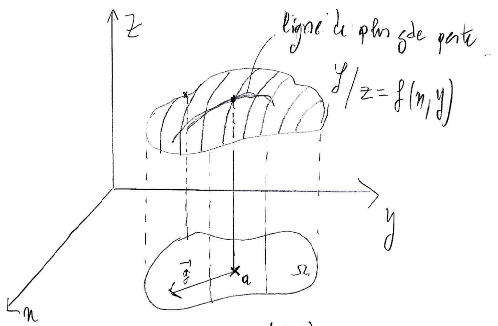
$a := 3$




```
> display(p1,p2);
```

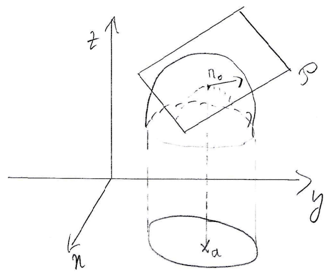


même surface et plan sous d'autres angles.



$a = (\alpha, \beta)$

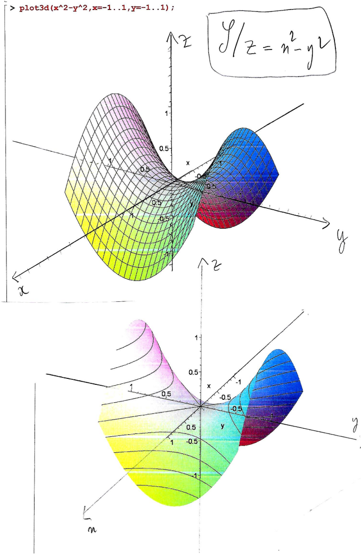
$\vec{g} = \nabla f(a)$

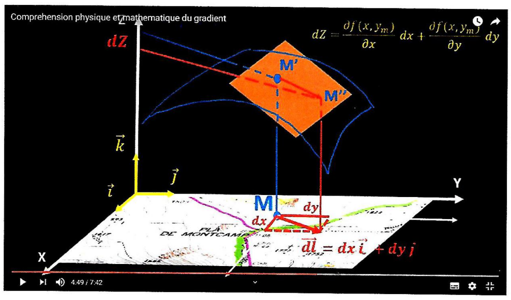


$\mathcal{P}$ plan tangent à $\mathcal{S} / z = f(x, y)$ en $a = (\alpha, \beta)$,

$M_0 = (\alpha, \beta, f(\alpha, \beta))$

```
> plot3d(x^2-y^2,x=-1..1,y=-1..1);
```





Proposition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 sur U. Soit $a = (\alpha, \beta) \in U$, $A = (\ \alpha, \beta, f(\alpha, \beta)\ )$ et $\gamma = f(\alpha, \beta)$.

Soit la surface $X \big/ z = f(x, y)$ (on a donc $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(x, y) \in U$ et $z = f(x, y)\}$) .

Alors **l'ensemble des vecteurs tangents à X en A** est le plan vectoriel d'équation dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $\vec{\mathcal{P}} \big/ v_3 = v_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + v_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$

Démonstration 22 : • **Démonstration avec le théorème fondamental**

On pose $g(x, y, z) = f(x, y) - z$, g est de classe C^1 sur $U \times \mathbb{R}$ $\Big($les 3 dérivées partielles : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = -1$ sont continues sur $U \times \mathbb{R}\Big)$ et $X = \{(x, y, z) \in U \times \mathbb{R}$ tel que $g(x, y, z) = 0\}$. On a ensuite $\mathrm{d}g(x, y, z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}z \neq 0$. On en déduit que $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{T}_A X \iff \vec{v} \in \ker \mathrm{d}g(\alpha, \beta, \gamma) \iff \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)v_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)v_2 - v_3 = 0$. D'où le résultat.

• **Démonstration sans le théorème fondamental**

Soit $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{T}_A X$, il existe un arc $\Gamma : t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$ tel que $\Gamma(t) \in X$ pour $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\Gamma(0) = A$ et $\Gamma'(0) = \vec{v}$. On dérive par rapport à t , l'expression $z(t) = f(x(t), y(t))$: $z'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$, donc en $t = 0$, $z'(0) = v_3 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)v_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)v_2$. On en déduit que $\vec{v} \in \vec{\mathcal{P}} \big/ v_3 = v_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + v_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Réciproquement : $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \vec{\mathcal{P}}$, soit Γ défini par $\Gamma(t) = (\ \alpha + v_1 t, \beta + v_2 t, f(\alpha + v_1 t, \beta + v_2 t)\ )$. Cette fonction Γ est définie sur un intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ car $(\alpha, \beta) \in U$, qui est ouvert , donc il existe une boule de centre (α, β) incluse dans U. Ensuite $\Gamma(0) = A$ et $\Gamma'(0) = \vec{v}$. **Conclusion**: $\mathcal{T}_A X = \vec{\mathcal{P}} \big/ v_3 = v_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + v_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Proposition-définition (même notation que ci-dessus)

On appelle **plan tangent** à X en A , le plan affine $\mathcal{P}_X(A) = A + \mathcal{T}_A X$. Une équation cartésienne de ce plan tangent dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $\boxed{\mathcal{P} \big/ z - \gamma = (x - \alpha)\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - \beta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)}$.

Démonstration 23 : Avec la proposition ci-dessus, l'équation de $\mathcal{P}$ est de la forme : $z = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) + C$.

On écrit que $A \in \mathcal{P}$: $\gamma = \alpha\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + \beta\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) + C$.

Il ne reste plus qu'a soustraire ces deux égalités : $z - \gamma = (x - \alpha)\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - \beta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Définition

Soit E un espace euclidien , soit U un ouvert de E. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

On appelle ligne de niveau de la fonction f tout ensemble de la forme $X_k = \{M \in U$ tel que $f(M) = k\}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Théorème :

Soit E un espace euclidien , soit U un ouvert de E.

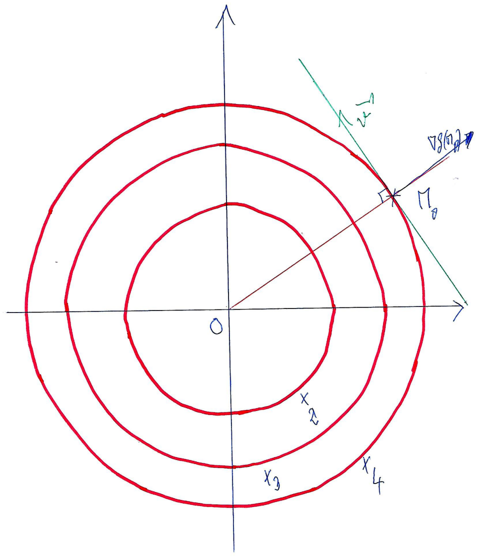
Soit f une fonction C^1 sur U et à valeurs réelles. Soit X_k une ligne de niveau de la fonction f. Pour chaque point M_0 de X_k tel que $\nabla f(M_0) \neq \vec{0}$, les vecteurs tangents à X_k en M_0 sont **orthogonaux au gradient de f en M_0**.

Démonstration 24 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base OTN de E. Soit $\vec{v} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in E$. Posons $g(M) = f(M) - k$, on a g C^1 sur U. On a $\mathrm{d}g(M_0)(\vec{v}) = (\nabla f(M_0) | \vec{v})$ et donc $\mathrm{d}g(M_0) \neq 0$. Par le théorème fondamental, $\vec{v}$ est un vecteur tangent à X_k en M_0 si et seulement si $\mathrm{d}g(M_0)(\vec{v}) = 0 \iff (\nabla f(M_0) | \vec{v}) = 0$. **Conclusion**: $\boxed{\mathcal{T}_{M_0} X = (\nabla f(M_0))^\perp}$

Exemples :

i.) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$. Tracer les lignes de niveaux et les tangentes en un point M_0 de X_k.

Réponse : Les ligne de niveaux sont les cercles centrés en $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{k}$. Si $M_0 = (x_0, y_0) \in X_k$, $\nabla f(M_0) = (2x_0, 2y_0) \neq 0$, donc les vecteurs tangents à X_k en M_0 sont donc sur la droite $\mathrm{vect}(-y_0, x_0)$ et donc sont orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{OM_0}$.



ii) On peut retrouver très vite le résultat suivant : **Vecteurs tangents à une sphère**. Soit E un espace euclidien et $S(a_0, r)$ la sphère de centre $a_0 \in E$ et de rayon $r > 0$. Soit $a \in S(a_0, r)$ on a $\mathcal{T}_a S(a_0, r) = (a - a_0)^\perp$.

Il suffit de poser $g(x) = (x - a_0|x - a_0) - r^2$ et de retrouver $\mathrm{d}g(a)(\overrightarrow{h}) = 2(a - a_0|\overrightarrow{h}) \neq 0$.

iii) $X = SL_n(\mathbb{R}) \subset E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = I_n$. Déterminer $\mathcal{T}_{I_n} X$.

Réponse :

On pose $g(M) = \det M - 1$, on a g de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par T.G. et $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } g(M) = 0\}$.

Déterminons $\mathrm{d}g(I_n)$.

Première méthode : (trichotomie) $\det(I_n + H) = \begin{vmatrix} 1 + h_{1,1} & & h_{i,j} \\ & \ddots & \\ h_{i,j} & & 1 + h_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n}(1 + h_{j,j}) + O(\|H\|_\infty^2)$

$\Big(\prod_{j=1}^{n}(1 + h_{j,j})$ vient du terme $a_{1,1} \cdots a_{n,n}$ du développement du déterminant et $O(\|H\|_\infty^2)$ vient de tous les termes $a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ avec $\sigma \neq Id$ du développement du déterminant). On en déduit que

$\det(I_n + H) = 1 + \sum_{j=1}^{n} h_{j,j} + O(\|H\|_\infty^2) = \det I_n + Tr(H) + o(H)$ et donc que $\mathrm{d}g(I_n)(H) = Tr(H)$ et donc $\mathrm{d}g(I_n) \neq 0$.

Deuxième méthode : On a vu plus haut que $\dfrac{\partial g}{\partial E_{i,j}}(M) = (-1)^{i_0 + j_0} \Delta_{i_0, j_0}$ et que

$\mathrm{d}g(M)(H) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} h_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(M) = \mathrm{Tr}(\ H^{\mathbf{T}} \times \mathrm{com}(M)\ )$

On en déduit que $\mathrm{d}g(I_n)(H) = Tr(H^{\mathbf{T}} \times com(I_n)) = Tr(H^{\mathbf{T}}) = Tr(H)$. On peut alors conclure :

Conclusion: $\boxed{\mathcal{T}_{I_n} X \text{ est l'ensemble des matrices de trace nulle}}$.

Démonstration sans le théorème fondamental :

Soit V une matrice de $\mathcal{T}_{I_n} X$, il existe donc $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans $X = SL_n(\mathbb{R})$: $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow X$, $t \longmapsto \gamma(t)$ tels que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = V$.

On a $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\det(\gamma(t)) = 1$. Notons la matrice $\gamma(t) = \Big(C_1(t) \ \ | C_2(t) \ \ | \ \ \cdots \ \ | \ \ C_n(t)\Big)$ où $C_1(t), \ldots, C_n(t)$ sont les colonnes de la matrice $\gamma(t)$ et $f(t) = \det(\gamma(t)) = 1$ (car $\gamma(t) \in SL_n(\mathbb{R})$).

On a alors $f'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}_0} \Big(C_1(t) \ \ | C_2(t) \ \ | \ \ \cdots \ \ | \ \ C'_i(t) \ \ | \ \ \cdots \ \ C_n(t)\Big)$, d'où

$f'(0) = 0 = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}_0} \Big(C_1(0) \ \ | C_2(0) \ \ | \ \ \cdots \ \ | \ \ C'_i(0) \ \ | \ \ \cdots \ \ C_n(0)\Big)$, d'où

$$f'(0)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & V_{i,i} & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \ldots & 0 & 1\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}V_{i,i}=\mathrm{Tr}(V).$$ On a donc $\mathcal{T}_{I_n}X\subset H$ où H est le noyau de la forme linéaire trace (c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Voyons la réciproque, soit $V\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{Tr}(V)=0$. On cherche un arc γ tel que $\gamma(0)=I_n$, $\gamma'(0)=V$ et qui reste dans X.

Analyse :

On sait que $V_{1,1}+\cdots+V_{n,n}=0$. On cherche une matrice $n\times n$, $\gamma(t)$ qui soit toujours de déterminant 1 et dans laquelle "il y a V qui apparait en dérivant" ! Pas évident.

On fait des cas particuliers par exemple $n=2$ ou bien par exemple le cas d'une matrice V très simple essayons $V=\mathrm{diag}(v_1,\ldots,v_n)$ une matrice diagonale, on a donc $v_1+\cdots+v_n=0$. On cherche une matrice $\gamma(t)$ elle aussi diagonale $\gamma(t)=\mathrm{diag}(x_1(t),\ldots,x_n(t))$. Il faut $x_1(t)\cdots x_n(t)=1$ sachant que $v_1+\cdots+v_n=0$, on pense à l'exponentielle : $\gamma(t)=\mathrm{diag}(e^{a_1(t)},\ldots,e^{a_n(t)})$ et on doit avoir $a_1(t)+\cdots+a_n(t)=0$, comme $\gamma'(0)=\mathrm{diag}(a_1'(0)e^{a_1(0)},\ldots,a_n'(0)e^{a_n(0)})=\gamma'(0)=\mathrm{diag}(a_1'(0),\ldots,a_n'(0))=V$, il suffit donc de prendre

$\gamma(t)=\mathrm{diag}(e^{V_{1,1}t},\ldots,e^{V_{n,n}t})$ qui n'est rien d'autre que ......$\exp(t\cdot V)$.

Synthèse : Posons $\gamma(t)=\exp(t\cdot V)$. On a vu au chapitre équa. diff. que cette fonction était C^∞ sur $\mathbb{R}$, que $\gamma(0)=I_n$ et que $\gamma'(t)=V\times\exp(t\cdot V)$ et donc $\gamma'(0)=V$.

Voyons si $\gamma(t)$ reste dans X. On a vu lors de l'analyse que c'était vrai si V était diagonale, d'où.....réduction on trigonalise V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $V=PTP^{-1}$, d'où $e^V=Pe^TP^{-1}$, d'où la très belle et classique formule : $\det e^V=e^{Tr(T)}=e^{Tr(V)}=e^0=1$. **Conclusion**: $\boxed{\mathcal{T}_{I_n}X \text{ est l'ensemble des matrices de trace nulle}}$.

4°) ***Extremums locaux***

Définitions : Soit U un ouvert de E , $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ et $a\in U$:

* f a un **maximum global** en a si $\forall x\in U\quad:\quad f(a)\geqslant f(x)$.
* f a un **minimum global** en a si $\forall x\in U\quad:\quad f(a)\leqslant f(x)$.
* f a un **maximum local** en a si $\exists r>0\ /\ \forall x\in B(a,r)\cap U\quad:\quad f(a)\geqslant f(x)$.
* f a un **minimum local** en a si $\exists r>0\ /\ \forall x\in B(a,r)\cap U\quad:\quad f(a)\leqslant f(x)$.
* f a un **maximum global strict** en a si $\forall x\in U\quad:\quad x\neq a\Longrightarrow f(a)>f(x)$.
* On a de même **maximum local strict, minimum global strict, minimum local strict**.
* Un extremum est soit un maximum, soit un minimum.
* Bref, $2^3=8$ notions : Max/min - strict/large - local/global.

Définition : a est un **point critique** de f si $\boxed{\forall j\in[\![1,p]\!]\quad,\quad\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)=0}$ ou si $\boxed{\mathrm{d}f(a)=0}$ ou si $\boxed{\nabla f(a)=\overrightarrow{0}}$.

Exemple : Soit f qui a tout point de la terre associe son altitude.

f présente en $a=$ Mont-blanc un maximum local (et $f(a)=4809$ m)

f présente en $a=$ Everest un maximum global (et $f(a)=8848$ m)

f présente en $a=$ Fosse Marianne un minimum global (et $f(a)=-10984$ m)

f présente en $a=$ Les Moëres (Nord) un minimum local (et $f(a)=-5$ m)

f présente en $a=$ Fosse Calypso un minimum local (point le plus profond de la Méditerranée) (et $f(a)=-5267$ m)

$a=$ Col de l'Iseran (Alpes) est un point critique (et $f(a)=2764$ m)

Théorème : (**condition nécessaire**)

$\boxed{\text{Si } f \text{ de classe } C^1 \text{ sur } U\text{, a un } \textbf{extremum local} \text{ en } a \in U \text{ et } U \text{ } \underline{\textbf{ouvert}} \text{ alors } a \text{ est un } \textbf{point critique}}$.

Démonstration 25 :

Posons $a = (a_1, \ldots, a_p)$ un extremum local de f. Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Considérons F définie par

$F : \mathbf{t} \longmapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, \mathbf{t}, a_{j+1}, \ldots, a_p)$. Comme U est ouvert et que $a \in U$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_F(a, r) \subset U$ (pour la norme infinie). De même il existe $r' > 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{B}_F(a, r') \cap U$, $f(x) \leqslant f(a)$ (SNALG). Si on pose $r'' = \min(r, r') > 0$, $\forall x \in \mathcal{B}_F(a, r'') \subset U$, $f(x) \leqslant f(a)$. Donc F est définie et de classe C^1 sur $]a_j - r'', a_j + r''[$ et a un extremum local en a_j donc $F'(a_j) = 0$ (**condition nécessaire d'extrémalité d'une fonction d'une** **<u>variable réelle</u>**). Or $F'(a_j) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall j \in [\![1, p]\!] \ : \ \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0.}$

Remarque : **Attention, la réciproque est fausse**.

Définition : si a est un **point critique** de f et si f n'a pas un extremum local en $a \in U$, alors a est dit $\boxed{\textbf{point selle ou point col}}$.

Remarque pratique :

∗ On couplera éventuellement ces points critiques avec la compacité.

∗ Pour les extrémums globaux, il faut prendre l'expression $f(a + h) - f(a)$ pour tout $h \in E$ tel que $a + h \in U$. Dans le cas $E = \mathbb{R}^p$ et $U = \mathbb{R}^p$, il pourra être utile d'utiliser l'infini ou de passer en coordonnées polaires, sphériques....

∗ C'est l'étude des **dérivées partielles secondes et de T.Y. à l'ordre 2** qui pourra (**souvent**) permettre de dire si un point critique est un extremum local ou un point col.

Exercices :

a) On considère $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$(x, y) \longmapsto y^2(y^2 - x^4)$$

• Visualiser sur un dessin (x en abscisses et y en ordonnée), les trois domaines où f est nulle, strictement positive, strictement négative.

• Montrer que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, $\varphi : t \longmapsto f(tu)$ admet un minimum local en 0.

• Montrer que f n'admet pas de minimum local en 0. Conséquence ?

b) Déterminer les points critiques de f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$f(x, y) = x^3 + y^3$, $f(x, y) = x^4 + y^4$ et $f(x, y) = x^2 - 2y^3 + xy$.

c) Déterminer les extrémums de f la fonction :

$f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$,

$x \longmapsto xy(1 - x - y)$ où $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \geqslant 0 \ , \ y \geqslant 0 \text{ et } x + y \leqslant 1\}$

d) Déterminer les extrémums de la fonction det sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

5°) ***Optimisation sous contrainte***

On cherche à trouver les éventuelles maximums ou minimums d'un fonction f définie sur un sous-ensemble par forcément ouvert de U.

Par exemple on cherche un maximum et un minimum global de $x^3 + y$ avec (x, y) sur la sphère euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$ (c'est la contrainte). On cherche donc les extrémums de la fonction f définie par $f(x, y) = x^3 + y$ sur l'ensemble $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 = 1\}$.

Premier point : Dans quels cas importants de tels extremums globaux existe-t-ils ?

Réponse : **Si X est compact avec T.B.A. !**

Problème : Que valent-t-ils ? Un théorème va nous servir.

Théorème d'optimisation sous une contrainte (T.O.C.)

Soit $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U. On pose $X = \{x \in U \text{ tel que } g(x) = 0\}$.

Notons f/X la restriction de f sur X. Si f/X admet un extremum local en un point $a \in X$ et si $\mathrm{d}g(a) \neq 0$, alors $\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mathrm{d}f(a) = \lambda\, \mathrm{d}g(a)}$ (λ appelé multiplicateur de Lagrange).

Démonstration 26 :

Lemme (rappel) :

Si ℓ et ψ sont deux formes linéaires de E dans $\mathbb{R}$ (E un $\mathbb{K}$-ev quelconque) avec $\ell \neq 0$.

On a alors : $\ker \ell \subset \ker \psi \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda \ell$.

Démonstration 27 : Revoir le cours sur E^*, le dual de E.

On a par le théorème fondamental, $\mathcal{T}_a X = \ker \mathrm{d}g(a)$. Soit $\vec{v} \in \mathcal{T}_a X$, il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeur dans X tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \vec{v}$.

Considérons φ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ par $\varphi(t) = f(\gamma(t))$. φ est de classe C^1 sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ par T.G.

Comme f admet en a un extremum local, la fonction φ admet un extremum local en 0 sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ qui est ouvert. On a donc $\varphi'(0) = 0$ soit $\varphi'(0) = \mathrm{d}f(\varphi(0)) \cdot \gamma'(0) = \mathrm{d}f(a) \cdot \vec{v} = 0$. On en déduit que $\mathcal{T}_a X \subset \ker \mathrm{d}f(a)$.

On a donc $\ker \mathrm{d}g(a) \subset \ker \mathrm{d}f(a)$ et par le lemme $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{d}f(a) = \lambda\, \mathrm{d}g(a)$.

Cas où E est euclidien

Soit $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $U \subset E$ et E euclidien. On pose $X = \{x \in U \text{ tel que } g(x) = 0\}$.

Notons f/X la restriction de f sur X. Si f/X admet un extremum local en un point $a \in X$ et si $\nabla g(a) \neq 0$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.

Démonstration 28 : En appliquant le théorème ci-dessus, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{d}f(a) = \lambda\, \mathrm{d}g(a)$.
$\forall \vec{h} \in E\ (\nabla f(a) | \vec{h}) = \lambda(\nabla g(a) | \vec{h})$ d'où $\forall \vec{h} \in E : (\nabla f(a) - \lambda \nabla g(a) | \vec{h}) = 0$.

On en déduit que $\nabla f(a) - \lambda \nabla g(a) \in E^\perp = \{0\}$ et donc que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.

Exemples

a) Déterminer un maximum et un minimum global de $x^3 + y$ avec (x, y) sur la sphère euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$.

Réponse : Posons $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ et $X = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 = 1\}$, on a f et g C^1 sur $\mathbb{R}^2$ par T.G.

$\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ sur X. Par le théorème d'optimisation sous une contrainte, si $(u, v) \in X$ est un extremum de f sur X alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(u, v) = \lambda \nabla g(u, v) \iff (3u^2, 1) = \lambda(2u, 2v). \iff \begin{cases} 3u^2 = 2\lambda u \\ 1 = 2\lambda v \end{cases} \iff \begin{cases} u = 0 \text{ sinon } \lambda = \dfrac{3}{2}u \\ 1 = 2\lambda v \end{cases}$$

Si $u = 0$, alors $v = \pm 1$ et $f(0, 1) = 1$ et $f(0, -1) = -1$.

Si $u \neq 0$, alors $\lambda = \dfrac{3}{2}u = \dfrac{1}{2v}$, on a donc $u = \dfrac{1}{3v}$. Comme $(u, v) \in X$, $\dfrac{1}{9v^2} + v^2 = 1$. On en déduit 4 valeurs de v : $\pm\sqrt{1/2 + 1/6\sqrt{5}}$ et $\pm\sqrt{1/2 - 1/6\sqrt{5}}$.

Avec une calculatrice, on trouve pour $f(u, v)$: $-.9796036621, .9796036621, -1.172053752, 1.172053752$.

On en déduit avec TBA que $\max\limits_X f = f\left(\dfrac{1}{3\sqrt{1/2 - 1/6\sqrt{5}}}, \sqrt{1/2 - 1/6\sqrt{5}}\right) \cong 1.172053752$ et

$\min\limits_X f = f\left(-\dfrac{1}{3\sqrt{1/2 - 1/6\sqrt{5}}}, -\sqrt{1/2 - 1/6\sqrt{5}}\right) \cong -1.172053752$.

Remarque 1 : Donner une autre méthode pour déterminer ces valeurs.

On paramètre le cercle $x = \cos t$ et $y = \sin t$ puis on étudie la fonction $\varphi(t) = f(\cos t, \sin t)$. On trouve alors le maximum pour $t_0 = 1/2 \arcsin(2/3)$.

Remarque 2 : $(0, 1)$ est un maximum local. Pourquoi ? Au voisinage de a, le couple (x, y) vérifie $y > 0$ et donc $f(x, y) = x^3 + \sqrt{1 - x^2}$ au voisinage de a. Posons $\varphi(x) = x^3 + \sqrt{1 - x^2}$ au voisinage de $x = 0$. φ est dérivable et $\varphi'(x) =$

$3x^2 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{\sim} -x$. On dresse donc le tableau de variations sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$: φ est strictement croissante sur $]-\varepsilon, 0]$ et φ est strictement décroissante sur $[0, \varepsilon[$.

b) $\boxed{\text{L'exercice ccinp : EXERCICE 41 analyse}}$

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \longmapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 13\}$.

1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C.

2. Soit $(u, v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.

(a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :

$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$$

(b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$. En déduire les valeurs possibles de λ.

3. Déterminer les valeurs possibles de (u, v), puis donner le maximum et le minimum de f sur C.

c) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne canonique : $\|A\| = \sqrt{Tr(A^{\mathbf{T}}A)}$.

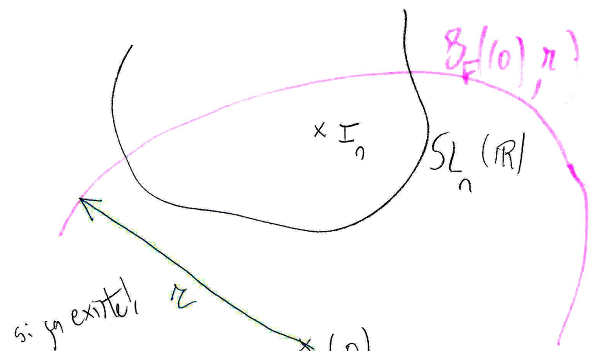
Déterminer un minimum global de $\|A\|^2$ sur $SL_n(\mathbb{R})$ (c'est la contrainte). Y-a-t-il un maximum global ?

Réponse :

On cherche donc les extrémums de la fonction f définie par $f(M) = \|M\|^2$ sur l'ensemble $X = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\det M = 1\}$. Posons $g(M) = \det M - 1$, on a f et g C^1 sur $\mathbb{R}^2$ par T.G. $\nabla g(M) = \left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\right) \neq (0)$ sur X car sinon $comM = (0)$ et comme $\det M = 1$, M est inversible et $M^{-1} = com(M)^{\mathbf{T}} \neq (0)$.

Par le théorème d'optimisation sous une contrainte, si $A \in X$ est un extremum de f sur X alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(A) = \lambda \nabla g(A) \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 : 2a_{i,j} = \lambda(-1)^{i+j}\Delta_{i,j} \iff 2A = \lambda com(A) \iff 2A = \lambda (A^{-1})^{\mathbf{T}} \iff 2A^{\mathbf{T}} = \lambda A^{-1} \iff 2A^{\mathbf{T}}A = \lambda I_n$. Et dans ce cas en passant au déterminant : $2^n \det(A)^2 = 2^n = \lambda^n$ donc $\lambda = \pm 2$. Or $\lambda = -2$ est impossible car si $A^{\mathbf{T}}A = -I_n$, en passant à la trace, on obtiendrait $\|A\|^2 = -n$: absurde.

Donc $\lambda = 2$ et $A^{\mathbf{T}}A = I_n$. D'où les points extrémums A de f sont dans $O_n^+(\mathbb{R})$ et $f(A) = n$.



si ça existe

$$\min_X f = \inf_{M \in X} \|M - (0)\|^2 = d((0), SL_n(\mathbb{R}))^2$$

Soit $r > 0 \setminus I_n \in B_F((0), r)$ (par ex : $r = \|I_n\|$)

On montre que $d((0), SL_n(\mathbb{R})) = d((0), \underbrace{SL_n(\mathbb{R}) \cap B_F((0), r)}_{K})$

car si $M \notin B_F(0, r)$: $\|M - (0)\|^2 > r \geq \|I_n - (0)\|^2$.

Or K est compact car fermé et borné, par T.B.A.

$\exists A \in SL_n(\mathbb{R}) \cap B_F((0), r) \setminus \min_X f = f(A)$.

On en déduit que le point $A = I_n$ est un extrémum de f et donc que $f(A) = n$.

Conclusion: $\min\limits_X f = n$, atteint en tout point de $O_n^+(\mathbb{R})$.

Concernant le max : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $A_p = \begin{pmatrix} p & & & \\ & \frac{1}{p} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in SL_n(\mathbb{R})$ et $f(A_p) \geqslant p^2 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En conséquence f n'est pas bornée sur $SL_n(\mathbb{R})$.

d) Soit $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1 \cdots x_n$. On note $X = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n ; x_1 + \cdots + x_n = 1\}$

1. Démontrer que f admet un maximum global sur X et le déterminer. Déterminer $f(X)$.

2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a : $\boxed{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}}$.

6°) *Équation aux dérivées partielles du 1er ordre (le a) est à savoir par coeur)*

a) Déterminer les fonctions $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U, un ouvert **convexe** tel que : $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ sur } U}$

b) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, tel que : $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + y^2}$.

c) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, tel que : $\boxed{x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2}$. Pour cette équation, on effectuera le CdV polaire $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

Même question avec $f : U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x > 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

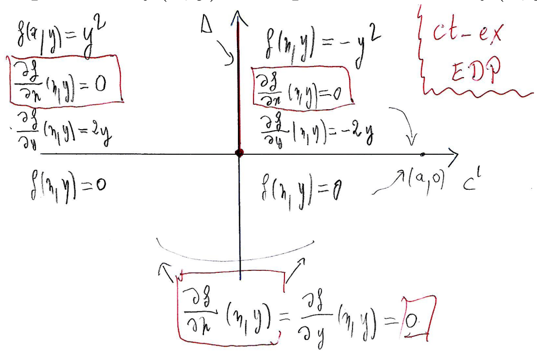
a) Commençons par un contre-exemple :

On considère $U = \mathbb{R}^2 - \Delta$ où $\Delta = \{(0, y)\ ,\ y \geqslant 0\}$. Il est clair que Δ est fermé (comme image réciproque....) et donc que U est ouvert. Il est clairement étoilé par rapport au point $(0, -1)$ et donc **connexe par arc**.

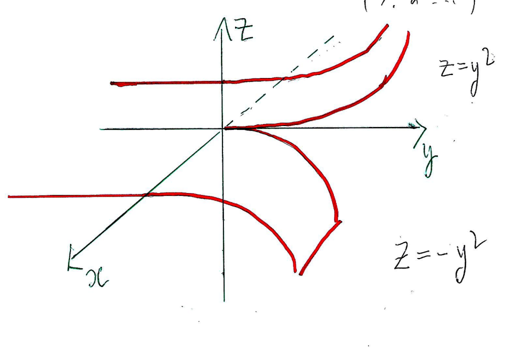
On considère f définie sur U par $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ -y^2 & \text{si } y > 0 \text{ et } x > 0 \\ y^2 & \text{si } y > 0 \text{ et } x < 0 \end{cases}$

Montrer que f est de classe C^1 sur U et que $\boxed{\forall (x, y) \in U : \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0}$.

Et pourtant $f(x, y)$ n'est pas de la forme $f(x, y) = \varphi(y)$!



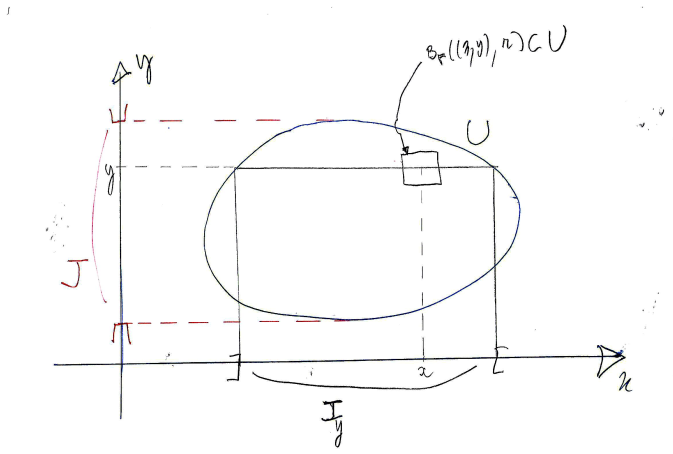
U = ℝ² \ Δ ouvert cx/arc et n̂ étoilé (%. a ...)



Théorème fondamental :

> Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ où U est un ouvert $\boxed{\textbf{CONVEXE}}$ de $\mathbb{R}^2$ et f de classe C^1 sur U.
>
> On suppose que $\boxed{\forall (x,y) \in U \quad : \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0}$.
>
> Alors il existe un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$, il existe une fonction $\Phi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur J tels que
>
> $$\boxed{\forall (x,y) \in U \quad : \quad f(x,y) = \Phi(y)}.$$

Démonstration 29 :



• Notons $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x$ et $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto y$ et posons

$$J = q(U) = \Big\{ y \in \mathbb{R} \text{ tel que } \exists x \in \mathbb{R} \text{ et } (x,y) \in U \Big\} .$$

Montrons que J est un ouvert connexe par arc de $\mathbb{R}$, donc un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

$*$ q étant linéaire, elle est continue sur $\mathbb{R}^2$ et donc J est connexe par arc comme image de U connexe par arc car convexe.

$*$ $\forall y \in J$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) \in U$, donc il existe $r > 0$ tel que $B_F((x,y),r) \subset U$ pour la norme infinie canonique de $\mathbb{R}^2$ ($\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$).

On en déduit que $\forall z \in [y-r, y+r]$, $(x,z) \in B_F((x,y),r) \subset U$ et donc $[y-r,y+r] \subset J$ et J est ouvert.

• Soit $y_0 \in J$, posons $I_{y_0} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x,y_0) \in U\}$. Montrons que I_{y_0} est un ouvert convexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

$*$ $\forall (x_1,x_2) \in I_{y_0}^2$ avec $x_1 < x_2$ et soit $t \in [0,1]$.

On a $(x_1,y_0) \in U$, $(x_2,y_0) \in U$ et $(1-t)(x_1,y_0) + t(x_2,y_0) \in U$ car U est **convexe**.

Or $(1-t)(x_1,y_0) + t(x_2,y_0) = ((1-t)x_1 + tx_2, y_0)$, donc $(1-t)x_1 + tx_2 \in I_{y_0}$.

$*$ $\forall x \in I_{y_0}$, $(x,y_0) \in U$, donc il existe $r > 0$ tel que $B_F((x,y_0),r) \subset U$ (toujours pour la norme infinie).

On en déduit que $\forall x' \in [x-r,x+r]$, $(x',y_0) \in B_F((x,y_0),r) \subset U$ et donc $[x-r,x+r] \subset I_{y_0}$ et I_{y_0} est ouvert.

• On considère la fonction $\varphi_{y_0} : I_{y_0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x,y_0)$.

Par T.G. , φ_{y_0} est de classe C^1 sur I_{y_0} et $\forall x \in I_{y_0}$: $\varphi'_{y_0}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y_0) = 0$.

Comme I_{y_0} est un **intervalle**, la fonction φ_{y_0} est constante sur I_{y_0} : il existe $C_{y_0} \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I_{y_0}$: $f(x,y_0) = C_{y_0}$.

• Posons $\Phi : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \longmapsto C_y$ et montrons que Φ convient.

$*$ Φ est bien définie sur J.

$*$ $\forall (x,y) \in U$, $y \in J$ et $x \in I_y$, donc $f(x,y) = C_y = \Phi(y)$.

$*$ Montrons que Φ est C^1 sur I. **Problème** : Si $y \in J$, $\Phi(y) = f(x,y)$ avec x quelconque dans I_y, on ne peut donc même pas contrôler la continuité de Φ.

Cependant, soit $y_0 \in J$ et soit $x_0 \in I_{y_0}$, on a donc $(x_0,y_0) \in U$: il existe $r > 0$ tel que $B_F((x_0,y_0),r) \subset U$.

On a donc $\forall y \in [y_0 - r, y_0 + r]$, $x_0 \in I_y$ et donc $\Phi(y) = f(x_0, y)$.

On en déduit que Φ est de classe C^1 sur $]y_0 - r, y_0 + r[$ et $\Phi'(y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$.

Conclusion: $\boxed{\text{Il existe } J \subset \mathbb{R} \text{ et il existe } \Phi : J \longrightarrow \mathbb{R} \text{ , } C^1 \text{ sur } J \text{ , tels que } \forall (x,y) \in U \quad : \quad f(x,y) = \Phi(y)}$.

b)

On peut faire comme pour une équation différentielle standard linéaire : on cherche les solutions de l'équation homogène et on cherche une solution particulière.

En effet si f_1 et f_2 sont solutions de cette E.D.P. alors $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = x + y^2$ et $\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = x + y^2$.

On soustrait ces deux égalités , il vient $\dfrac{\partial (f_1 - f_2)}{\partial y} = 0$, donc $f_1 - f_2$ est solution de l'équation homogène : $\boxed{\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0}$.

Conséquence, si f_0 est une solution particulière , l'ensemble des solutions de l'équation est

$$S_E = \{f_0 + g \text{ où } g \text{ est solution de } \frac{\partial g}{\partial y} = 0\}$$

$*$ **Équation homogène** : grâce au théorème fondamental, comme $\mathbb{R}^2$ est **convexe** , g est solution de $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ si et seulement si il existe $\varphi : I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = \varphi(x)$, où $I = \mathbb{R}$ est le projeté de $\mathbb{R}^2$ sur l'axe des abscisse.

$*$ **Une solution particulière** est $f_0(x, y) = xy + \dfrac{y^3}{3}$ (on a intégré par rapport à y).

Conclusion:

$$\boxed{S_E = \left\{ \ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ , } (x,y) \longmapsto xy + \frac{y^3}{3} + \varphi(x) \quad , \quad \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad C^1 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} \ \right\}}$$

Remarques importantes :

- L'ensemble des solutions de cette E.D.P. linéaire du premier ordre est un $\mathbb{R}$-ev de dimension **infinie !**
- Une solution f de cette équation ne sera pas fixée par la valeur de f en un point mais en une infinité de points.

c) i) Soit f une solution de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation $\boxed{\textbf{(E)} : x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2}$.

Soit g définie par $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, par TG g est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On a : $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \sin\theta$, donc

$r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, donc $\boxed{r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r^2}$.

On a donc $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, si $r \neq 0$ alors $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r$

Or $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial g}{\partial r}(0, \theta) = \lim\limits_{\substack{r \to 0 \\ \neq}} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \lim\limits_{\substack{r \to 0 \\ \neq}} r = 0$.

On en déduit donc que : $\boxed{\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r}$.

Comme $\mathbb{R}^2$ est **convexe**, il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tel que :

$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : g(r, \theta) = \dfrac{r^2}{2} + \varphi(\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Fixons $\theta \in \mathbb{R}$ et faisons $r = 0$, $g(0, \theta) = \dfrac{0^2}{2} + \varphi(\theta)$, ce qui donne $g(0, \theta) = 0 + \varphi(\theta) = f(0, 0)$.

On en déduit donc que φ est constante sur $\mathbb{R}$ et donc qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : g(r, \theta) = \dfrac{r^2}{2} + k$.

Comme $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists (r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, on en déduit que

$f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r, \theta) = \dfrac{r^2}{2} + k = \dfrac{x^2 + y^2}{2} + k$.

Réciproquement , si $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2} + k$, alors on vérifie facilement que f est solution de **(E)** sur $\mathbb{R}^2$

Conclusion: $\boxed{S_E = \left\{ \ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ , } (x, y) \longmapsto \dfrac{x^2 + y^2}{2} + k \quad , \quad k \in \mathbb{R} \right\}}$

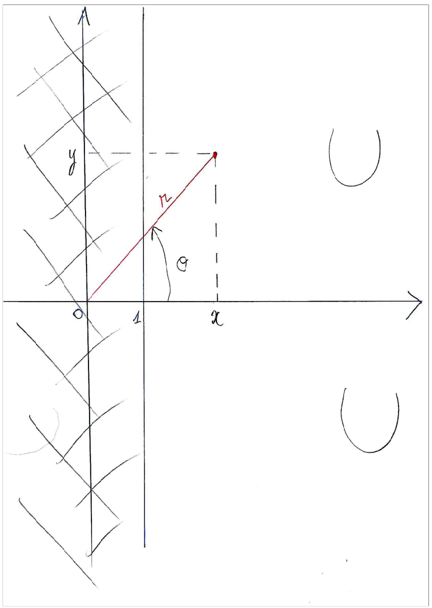
ii) Soit f une solution de classe C^1 sur U de l'équation $\boxed{\textbf{(E)} : x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2}$.

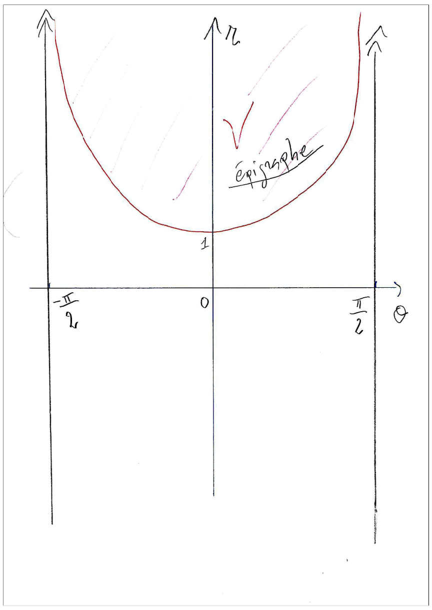
Comme pour l'équation précédente, on passe en polaire $\forall (x,y) \in U$, $\exists (r,\theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Déterminons les domaines de r et θ. Pour cela on commence par faire un dessin puis comme toujours (en physique) on prend $r \geqslant 0$, comme $x > 1$, $r > 0$ et $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La condition $x > 1$ devient $r\cos\theta > 1 \iff r > \dfrac{1}{\cos\theta}$.

En résumé le domaine U est défini par $\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \qquad \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } r > \dfrac{1}{\cos\theta} \end{cases}}$





On dessine V (avec les axes $(O\theta r)$). On en déduit que **V est convexe** comme épigraphe de la fonction h définie par $h(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et dont la dérivé seconde est $h''(\theta) = \dfrac{(2\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2)}{\cos(\theta)^3} \geqslant 0$ et donc h convexe.

Si on pose $\gamma : \mathbb{R}\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$, $(r,\theta) \longmapsto r - \dfrac{1}{\cos\theta}$, alors on a $V = \gamma^{-1}(]0,+\infty[)$ et comme γ est continue par TG, V est un ouvert relatif à $\mathbb{R}\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: il existe Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $V = \Omega \cap \mathbb{R}\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Or un produit d'ouvert est un ouvert , donc $\mathbb{R}\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et par intersection finie d'ouverts, **V est ouvert**.

Avec les notations de la résolution du premier cas, la fonction g définie par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est par TG C^1 sur $\boxed{V = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } r > \dfrac{1}{\cos\theta}\right\}}$.

Les calculs sont rigoureusement les mêmes et on obtient donc que f est une solution sur U de l'équation **(E)** : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2$ **si et seulement si** g est solution sur V de l'équation $\boxed{\textbf{(E')} : \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r}$.

Comme V est **convexe**, par le théorème fondamental il existe une fonction $\varphi :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 sur $J =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, tel que : $\forall (r,\theta) \in V : g(r,\theta) = \dfrac{r^2}{2} + \varphi(\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Maintenant , il faudrait déterminer l'expression de $f(x,y)$ en fonction de x et y (et non à l'aide de r et θ).

Posons $\Phi : \begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & U \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$

On a $g = f \circ \Phi$ et comme Φ est de classe C^1 sur V (et même sur $\mathbb{R}^2$), on a l'implication : f solution de classe C^1 sur U de l'équation **(E)** $\boxed{\Longrightarrow}$ g solution de classe C^1 sur V de **(E')**.

Pour avoir l'équivalence et l'expression de f, déterminons Φ^{-1} et montrons qu'elle est aussi de classe C^1 sur U :

Si $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \qquad \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } r > \dfrac{1}{\cos\theta} \end{cases}$

alors $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et comme $x \neq 0$, $\dfrac{y}{x} = \tan\theta$ et comme $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\dfrac{y}{x} = \tan\theta \iff \theta = \arctan(\dfrac{y}{x})$, on en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{-1}: U & \longrightarrow & V \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \arctan(\frac{y}{x})\ \right) \end{array}$$

Enfin on : $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r,\theta) = \dfrac{r^2}{2} + \varphi(\theta) = \dfrac{x^2+y^2}{2} + \varphi\Big(\arctan(\dfrac{y}{x})\Big)$.

De plus comme arctan est bijective , de classe C^1 et de réciproque aussi de classe C^1,

$\{\varphi \circ \arctan,\ \varphi : J =]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}\ \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}\} \quad = \quad \{\psi,\ \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}\}$.

Conclusion:

$$\boxed{S_E = \left\{\ f : U \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x,y) \longmapsto \frac{x^2+y^2}{2} + \psi\Big(\frac{y}{x}\Big)\quad,\ \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}\ \right\}}$$

C) DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE k$\geqslant$ 2

1°) *Dérivées partielles d'ordre* 2

Soit U un ouvert de E , $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, et f une application de U dans F.

Définition 1 : On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 2** par rapport à x_i et x_j en $a \in U$ (relativement à la base $\mathcal{B}$) si $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ existe sur un voisinage ouvert de a et admet une dérivée partielle en a par rapport à x_i : $\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}(a)$.

Cette dérivée est notée : $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \text{ ou } \partial_{i,j} f(a) \qquad \text{et} \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a) \text{ est notée : } \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)}$

Définition 2 :

$$\boxed{f \text{ est } \textbf{de classe } C^2 \textbf{ sur } U \text{ si } \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ existe et est continue sur } U.}$$

Théorème de Schwarz :

Si f admet des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ qui sont **continues en** a , alors $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)}$

Corolaire important : si f est C^2 sur U, on a l'égalité précédente en tout point de U.

Démonstration 30 : On va SNALGer !

- Quitte à prendre les fonctions coordonnées, on peut se ramener (SNALG) à une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Quitte à faire un retour en $\overrightarrow{0}$ avec $x \longmapsto f(a+x)$, on peut donc (re-SNALG) supposer que $a = \overrightarrow{0}$
- Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, on va étudier l'expression $(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \longmapsto f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-1}, \underline{\mathbf{x}}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, \underline{\mathbf{y}}, x_{j+1}, \ldots, x_p)$.

On peut donc (re-re-SNALG) considérer f de deux variables : $\boxed{(x,y) \longmapsto f(x,y)}$.

- Étudions la fonction $\Phi(x,y) = f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0)$, Comme f admet des dérivées partielles secondes continues en $(0,0)$, Φ aussi.

Regroupons les termes de $\Phi(x,y)$ de deux manières :

$*$ $\Phi(x,y) = \Big[f(x,y) - f(x,0)\Big] - \Big[f(0,y) - f(0,0)\Big]$, si on pose $\varphi(x) = f(x,y) - f(x,0)$, on a alors

$\Phi(x,y) = \Big[\varphi(x)\Big] - \Big[\varphi(0)\Big] = (x-0)\varphi'(c) = (x-0)\Big[\dfrac{\partial f}{\partial x}(c,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(c,0)\Big] = (x-0)(y-0)\Big[\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c,d)\Big]$, avec c entre x et 0 et d entre y et 0.

On en déduit par le théorème d'encadrement (lorsque x et y tendent vers 0, c et d aussi (pour être très rigoureux, on pourra faire un raisonnement avec $\varepsilon > 0$ exactement comme le théorème T.L.D.) que :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to 0 \\ x\neq 0, y\neq 0}} \frac{\Phi(x,y)}{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

$*$ $\Phi(x,y) = \Big[f(x,y) - f(0,y)\Big] - \Big[f(x,0) - f(0,0)\Big]$, si on pose $\psi(y) = f(x,y) - f(0,y)$, on a alors

$\Phi(x,y) = \Big[\psi(y)\Big] - \Big[\psi(0)\Big] = (y-0)\psi'(c) = (y-0)\Big[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,c) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,c)\Big] = (y-0)(x-0)\Big[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(d,c)\Big]$, avec c entre x et 0 et d entre y et 0.

On en déduit de même que : $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to 0\\ x\neq 0, y\neq 0}} \frac{\Phi(x,y)}{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

On conclut par unicité de la limite $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to 0\\ x\neq 0, y\neq 0}} \frac{\Phi(x,y)}{xy}$: $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).}$

2°) *Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$ - Fonctions C^k*

Définition 1 : On a la même définition, (par récurrence) que pour les dérivées partielles secondes, pour définir les dérivées partielles d'ordre k. Il y a donc p^k dérivées partielles d'ordre k pour une fonction de p variables.

Notation : $\boxed{\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}(a) \quad \text{ou} \quad \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} f(a)}$

Définition 2 : On dit qu'une fonction f est **de classe C^k sur** U si f admet toutes ses dérivées partielles d'ordre k et si toutes ces dérivées partielles sont continues sur U.

Définition 3 : On dit que f est **de classe C^∞ sur** U si f est de classe C^k sur U pour tout entier k.

Proposition 1 :

$\boxed{\text{Si } f \text{ est de classe } C^k \text{ sur } U \text{, alors elle est de classe } C^{\,i} \text{ sur } U \text{ pour tout } i \leqslant k}$.

Démonstration 31 : On démontre la proposition par récurrence descendante. Supposons que f soit de classe $C^{\,i}$ avec $1 \leqslant i \leqslant k$ et montrons que f est $C^{\,i-1}$ sur U.

Toutes les dérivées partielles d'ordres $i-1$ existent sur U. Toutes ces dérivées partielles admettent des dérivées partielles d'ordre 1 et qui sont continues sur U car ce sont des dérivées partielles d'ordres i.

Par le théorème fondamental, ces dérivées partielles d'ordres $i-1$ sont de classe C^1 donc continues sur U et donc f est de classe $C^{\,i-1}$.

Proposition 2 :

$\boxed{f \text{ est de classe } C^k \text{ sur } U \text{ \textbf{SSI} toutes les dérivées partielles de } f \text{ d'ordre 1 existent et sont de classe } C^{k-1} \text{ sur } U}$.

Démonstration 32 :

$\Longrightarrow$] D'après la proposition précédente, si f est de classe C^k, alors f est C^1 sur U et donc toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 existent. Ces dérivées partielles d'ordre 1 admettent des dérivées partielles d'ordre $k-1$, ce sont les dérivées partielles d'ordre k de f qui sont continues sur U, donc les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont de classe C^{k-1} sur U.

$\Longleftarrow$] Toutes les dérivées partielles d'ordre k de f sont des dérivées partielles d'ordre $k-1$ des dérivées partielles d'ordre 1 de f , on en déduit donc que f est C^k sur U.

Proposition 3 : Théorème de Schwarz

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est de classe } C^k \text{ sur } U \text{, alors pour toute permutation } \sigma \in \mathcal{S}_k : \frac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(j_1)} \cdots \partial x_{\sigma(j_k)}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}(a)}.$$

Démonstration 33 :

Par le théorème de Schwarz, c'est vraie pour toute transposition $\sigma = (i\ j)$ et comme les transpositions engendrent le groupe symétrique $\mathcal{S}_k$, c'est vrai pour toute permutation de $\mathcal{S}_k$.

Conséquence : Nombre de dérivées partielles d'ordre k si $\dim E = p$.

Démonstration 34 :

Sans le théorème de Schwarz, les dérivées partielles d'ordre k sont de la forme $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}(a)$ où $(j_1, \ldots, j_k) \in [\![1, p]\!]^k$, il y a donc $\boxed{p^k}$ dérivées partielles d'ordre k.

Avec le théorème de Schwarz, les dérivées partielles d'ordre k sont de la forme $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}}(a)$, où $(s_1, \ldots, s_p) \in [\![0, k]\!]^p$ et tel que $s_1 + \cdots + s_p = k$.

Par exemple pour une fonction de 3 variables : x, y, z une dérivée 10-ième de f est par exemple
$$\frac{\partial^{10} f}{\partial x^3 \partial y^2 \partial z^5}(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^{10} f}{\partial x^5 \partial y^3 \partial z^2}(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^{10} f}{\partial x^8 \partial y^2 \partial z^0}(a) = \frac{\partial^{10} f}{\partial x^8 \partial y^2}(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^{10} f}{\partial x^{10} \partial y^0 \partial z^0}(a) = \frac{\partial^{10} f}{\partial x^{10}}(a) \ \ldots\ldots$$

C'est un classique du dénombrement :

À un p-uplet $(s_1,\dots,s_p)\in [\![0,k]\!]^p$ tel que $s_1+\cdots+s_p=k$, on associe bijectivement le $p-1$-uplet :

$(s_1+1\ ,\ s_1+s_2+2\ ,\ s_1+s_2+s_3+3\ ,\ \dots, s_1+s_2+\cdots+s_{p-1}+p-1)$

Or le nombre de $p-1$-uplets : $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{p-1}<p-1+k$ est exactement $\binom{k+p-1}{p-1}$.

Conclusion: $\boxed{\text{Il y a donc } \binom{k+p-1}{p-1} \text{ dérivées partielles d'ordre } k \text{ pour une fonction de } p \text{ variables}}$.

Proposition 4 :

$\boxed{\text{La notion de classe } C^k \text{ sur } U \text{ ne dépend pas de la base } \mathcal{B} \text{ choisie}}$.

Démonstration 35 :

On sait que si une fonction admet des dérivées partielles d'ordre 1 pour une base donnée et que ces dérivées partielles sont continues alors elle est différentiable et donc admet des dérivées partielles continues pour tout autre base.

Théorèmes généraux :

Si f et g sont de classe C^k de l'ouvert $U\subset E$ dans F avec $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, si $\lambda\in\mathbb{K}$, B est bilinéaire alors :

i) $\lambda f+g$ de classe C^k sur U ,

ii) $B(f,g)$ et donc $f\times g$, $(f|g)$... de classe C^k sur U ,

iii) $h\circ f$ de classe C^k sur U (avec h de classe C^k de $V\subset F$ et $f(U)\subset V$),

iv) Si f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors fg est aussi de classe C^k sur U.

v) Si f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et qui ne s'annule pas sur U, alors $\dfrac{1}{f}$ est aussi C^k sur U.

vi) Enfin tout cocktail constitué des fonctions usuelles (exp, cos, arctan,ln, ...) , des fonctions polynômiales, des signes $+,-,\times,/,\circ,\sqrt{\ }$ sont de classe C^∞ sur leur domaine de "dérivation" .

Démonstration 36

i) Évident pour $\lambda f+g$

ii) On démontre la proposition par récurrence.

$*$ C'est vrai si $k=0$ (voir E.V.N.)

$*$ **Rappel** : $\dfrac{\partial B(f,g)}{\partial x_j}(x)=B\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x),g(x)\Big)+B\Big(f(x),\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(x)\Big)$ et donc $\dfrac{\partial B(f,g)}{\partial x_j}=B\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_j},g\Big)+B\Big(f,\dfrac{\partial g}{\partial x_j}\Big)$.

$*$ Supposons que ce soit vraie pour $k-1$, soit f et g de classe $C^{\,k}$ sur U avec $k\geqslant 1$.

D'après le rappel , la **proposition 1** et l'hypothèse de récurrence, $B\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_j},g\Big)$ et $B\Big(f,\dfrac{\partial g}{\partial x_j}\Big)$ sont de classe $C^{\,k-1}$ sur U.

Puis par linéarité $B\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_j},g\Big)+B\Big(f,\dfrac{\partial g}{\partial x_j}\Big)=\dfrac{\partial B(f,g)}{\partial x_j}$ est de classe $C^{\,k-1}$ sur U.

On conclut avec la **proposition 2** que $B(f,g)$ est de classe C^k.

iii) On démontre la proposition par récurrence.

$*$ C'est vrai si $k=0$ (voir E.V.N.)

$*$ Supposons que ce soit vraie pour $k-1$, soit f et h de classe $C^{\,k}$ avec $k\geqslant 1$.

Soit $\mathcal{C}=(e'_1,\dots,e'_n)$ une base de F et $f_1,\dots,f_n$ les fonctions coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ de f.

On peut donc identifier $h\circ f(x)$ à $h(f_1(x),\dots,f_n(x))$.

Par la règle de la chaine , on a : $\dfrac{\partial(h\circ f)}{\partial x_j}=\displaystyle\sum_{i=1}^n\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\times\Big(\dfrac{\partial h}{\partial y_i}\circ f\Big)$

Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial y_i}$ sont de classe C^{k-1} par la **proposition 2** et comme f et h sont de classe C^k, elles sont aussi de classe C^{k-1}.

On en déduit par hypothèse de récurrence que les dérivées partielles $\dfrac{\partial h}{\partial y_i}\circ f$ sont de classe C^{k-1}.

Par somme et produit (c'est les **i)** et **ii)**) , les dérivées partielles $\dfrac{\partial(h\circ f)}{\partial x_j}$ sont de classe C^{k-1}.

On conclut avec la **proposition 2** que $h\circ f$ est de classe C^k.

iv) Immédiat avec le **ii)** et $B(x,y)=xy$ sur $\mathbb{C}^2$, bilinéaire.

v) On applique le iii) avec $h(t)=\dfrac{1}{t}$ de classe C^k sur $\mathbb{C}^*$.

vi) On applique les règles **i)** , **ii)** , **iii)** , **iv)** , **v)** .

Définition 4 : Soit U, un ouvert de E .

$\boxed{C^k(U,F)=\{f:U\longrightarrow F\ ,\ f \text{ de classe } \mathrm{C}^k \text{ sur U}\}}$ et $\boxed{C^k(U)=\{f:U\longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f \text{ de classe } \mathrm{C}^k \text{ sur U}\}}$

Théorème : $\boxed{(\ C^k(U)\ ,\ +\ ,\ \cdot\ ,\times\ ) \text{ est une } \mathbb{R}\textbf{-algèbre}}$

Démonstration 37 : Exercice facile avec les théorèmes généraux.

Exemples :

a) f définie par $f(x,y,z)=\dfrac{\sin(xy)+e^{\sqrt{z}}+\arctan(x+y+z)}{x+2y+3z}$ est, **par T.G.**, de classe C^∞ sur $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $x+2y+3z\neq 0$ et $z>0\ \}$.

b) $f(x,y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x+iy)^n$ est C^∞ sur $U=D_o(0,R)\subset\mathbb{R}^2$ (pour $\|_2$ norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$ et R le rayon de convergence de la série entière) et montrer que f est harmonique, c'est-à-dire que $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ sur U.

Réponse :

Montrons d'abord que f est C^1 sur U.

Fixons $y\in]-R,R[$ et posons $u_n(x)=a_n(x+iy)^n$.

u_n est de classe C^1 sur $I=\left]-\sqrt{R^2-y^2},\sqrt{R^2-y^2}\right[$ et $\forall x\in I$: $u_n'(x)=na_n(x+iy)^{n-1}$.

On a $\forall x\in I\quad:\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x+iy)^n=f(x,y)$.

- $(\sum u_n)$ converge simplement sur I car si $x\in I$, $|x+iy|<R$.
- u_n est de classe C^1 sur I par TG,
- (HD) :

$\forall a>0$ et $a<\sqrt{R^2-y^2}\quad,\quad \forall x\in[-a,a]\quad:\quad |u_n'(x)|\leqslant n|a_n|(\sqrt{x^2+y^2})^{n-1}\leqslant n|a_n|(\sqrt{a^2+y^2})^{n-1}=\alpha_n$.

Comme $\sqrt{a^2+y^2}<R$, $(\sum\alpha_n)$ converge (la série dérivée d'une série entière a le même rayon de convergence : R) et il y a donc convergence normale de $(\sum u_n')$ sur $[-a,a]$.

On peut donc appliquer le théorème C^1 sur les séries de fonctions :

La fonction $x\longmapsto f(x,y)$ est donc dérivable en tout point de I et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n(x+iy)^{n-1}$

On a vu que l'application $z\in D_o(0,R)\longmapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ était continue sur $D_o(0,R)$ (cours sur les séries entières). On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur U.

On a la même chose pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ qui est continue sur U et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ i\ na_n(x+iy)^{n-1}$.

On en déduit que f est de classe C^1 sur U ainsi toute fonction série entière est de classe C^1 sur sur son disque (ouvert) de convergence. En conséquence $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ qui sont définies par la série entière (de même rayon) sont aussi de classe C^1 sur U et donc f est de classe C^2 sur U. Par récurrence , si toute fonction définie par une série entière est de classe C^k sur U, elle est de classe C^1 sur U et ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont donc de classe C^k et donc f est de classe C^{k+1} sur U.

Conséquence :

$\Delta(f)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ n(n-1)a_n(x+iy)^{n-2}+i^2\sum_{n=2}^{+\infty}\ na_n(x+iy)^{n-2}=0\ (1+i^2=0)$.

3°) *Équations aux dérivées partielles d'ordre* 2

Exercice :

a) Déterminer les fonctions $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur U, un ouvert **convexe non vide** tel que :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin(x) + 7x \arctan y \text{ sur } U}.$$

Réponse :

Soit f une solution de classe C^2 sur U, solution de **(E)** : $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin(x) + 7x \arctan y \text{ sur } U}$.

Posons $g(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. On a g qui est de classe C^1 sur U et solution de **(E')** : $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \sin(x) + 7x \arctan y$ sur U.

Comme pour les EDP du premier ordre, comme U est **convexe**, par le théorème fondamental, il existe $J = q(U)$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (notation de la démo. du théorème fondamental du **B6°)**) et il existe $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur J telle que $\forall (x,y) \in U : g(x,y) = -\cos(x) + 7\dfrac{x^2}{2} \arctan y + \varphi(y)$ (solution particulière : on intègre par rapport à x + solution générale de l'équation homogène). On a donc $\forall (x,y) \in U : \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\cos(x) + 7\dfrac{x^2}{2} \arctan y + \varphi(y)$.

On refait la même chose : comme U est **convexe**, par le théorème fondamental, il existe $I = p(U)$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et il existe $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I telle que $\forall (x,y) \in U$:

$f(x,y) = -\cos(x)y + 7\dfrac{x^2}{2}\left(y \arctan y - \dfrac{1}{2}\ln(y^2+1)\right) + \displaystyle\int_b^y \varphi(t)\,dt + \psi(x)$ (solution particulière : on intègre par rapport à y +solution générale de l'équation homogène), où l'on a choisit $b \in J$.

Comme φ est de classe C^1, $y \longmapsto \displaystyle\int_b^y \varphi(t)\,dt$ est de classe C^2 sur U (MPSI). Posons $\Phi(y) = \displaystyle\int_b^y \varphi(t)\,dt$.

On a donc $\forall (x,y) \in U : \psi(x) = f(x,y) - \left[-\cos(x)y + 7\dfrac{x^2}{2}\left(y \arctan y - \dfrac{1}{2}\ln(y^2+1)\right) + \Phi(y)\right]$ et par T.G., ψ est de classe C^2 sur U . On en déduit que

$$\boxed{\begin{aligned} S_E = \Big\{ f : (x,y) \in U \longmapsto -\cos(x)y + \frac{7x^2}{2}\left(y \arctan y - \frac{1}{2}\ln(y^2+1)\right) + \Phi(y) + \psi(x) \ , \\ \Phi \text{ de classe } C^2 \text{ sur } J \text{ et } \psi \text{ de classe } C^2 \text{ sur } I \Big\} \end{aligned}}$$

b) Déterminer les fonctions $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur U, un ouvert **convexe non vide** tel que :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } U}.$$

Réponse :

Soit f une solution de classe C^2 sur U, solution de **(E)** : $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } U}$.

Posons $g(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. On a g qui est de classe C^1 sur U et solution de **(E')** : $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$ sur U.

Comme pour les EDP du premier ordre, comme U est **convexe**, par le théorème fondamental, il existe $J = q(U)$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et il existe $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur J telle que $\forall (x,y) \in U : g(x,y) = \varphi(y)$.

On a donc $\forall (x,y) \in U : \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi(y)$

On refait la même chose : comme U est **convexe**, par le théorème fondamental, il existe $J = q(U)$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et il existe $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur J telle que $\forall (x,y) \in U : f(x,y) = \varphi(y)x + \psi(y)$.

Ici φ et ψ ne sont à priori que de classe C^1, cependant comme U , $I = p(U)$ et J sont des ouverts non vide, ils sont infinis : soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a \neq b$:

$\forall y \in J : f(a,y) = \varphi(y)a + \psi(y)$ et $f(b,y) = \varphi(y)b + \psi(y)$. On en déduit que

$\forall y \in J : \varphi(y) = \dfrac{f(a,y) - f(b,y)}{a-b}$ et $\forall y \in J : \psi(y) = f(a,y) - \varphi(y)a$.

Donc, par T.G. , φ puis ψ sont de classe C^2 sur J. On en déduit que

$$\boxed{S_E = \Big\{ f : (x,y) \in U \ , \ (x,y) \longmapsto \varphi(y)x + \psi(y) \ , \ \varphi \text{ et } \psi \text{ de classe } C^2 \text{ sur } J \ \Big\}}$$

D) OPTIMISATION : ÉTUDE AU SECOND ORDRE

Dans ce paragraphe **D**, $E = \mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique. Toutes les dérivées partielles le seront par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

1°) *DL à l'ordre 2 : Formule de Taylor-Young*

Théorème

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$ et soit $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in U$.

On a alors $\boxed{f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a)\ h_j^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\ h_i h_j\right) + o(\|h\|^2)}$

Démonstration 38 :

Considérons la fonction φ d'une seule variable : $\varphi : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(a+th) \end{cases}$

Posons $a = (a_1, \dots, a_p)$, comme $h = (h_1, \dots, h_p)$, on a alors $\varphi(t) = f(a_1 + th_1, \dots, a_p + th_p)$.

On a par T.G. φ qui est de classe C^2 sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1]$:

$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+th)\ h_j$ et $\varphi''(t) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)\ h_i h_j$

Écrivons la formule de Taylor-Reste-Intégrale pour φ entre 0 et 1 : $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,\mathrm{d}t$. Donc

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j + \int_0^1 (1-t) \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)\ h_i h_j\,\mathrm{d}t = \\ &= f(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\ h_i h_j \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or pour tout couple (i,j), la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ est continue en a, donc $\forall x \in U$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \alpha_{i,j}(x)$ avec $\lim_{x\to a} \alpha_{i,j}(x) = 0$.

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\ h_i h_j \int_0^1 (1-t)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \alpha_{i,j}(a+th)\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= f(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\ h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\ h_i h_j \int_0^1 (1-t)\alpha_{i,j}(a+th)\,\mathrm{d}t$$

$= f(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\ h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\ h_i h_j \int_0^1 (1-t)\alpha_{i,j}(a+th)\,\mathrm{d}t$. Soit $\varepsilon > 0$, pour tout couple (i,j), il existe un $\eta_{i,j} > 0$ tel que pour tout $x \in U$, $\|x-a\|_\infty \leqslant \eta_{i,j} \Longrightarrow |\alpha_{i,j}(x)| \leqslant \varepsilon$. Soit $\eta = \min_{1\leqslant i,j\leqslant p}(\eta_{i,j})$, on a $\eta > 0$ et si on prend $\|h\|_\infty \leqslant \eta$ alors $\forall t \in [0,1]$, $|\alpha_{i,j}(a+th)| \leqslant \varepsilon$. On a donc

$$\left|\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\ h_i h_j \int_0^1 (1-t)\alpha_{i,j}(a+th)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} |h_i h_j| \int_0^1 (1-t)\,|\alpha_{i,j}(a+th)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} \|h\|_\infty^2 \int_0^1 (1-t)\varepsilon\,\mathrm{d}t.$$

On a donc $\left|\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} h_i h_j \int_0^1 (1-t)\alpha_{i,j}(a+th)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant p^2 \|h\|_\infty^2 \frac{1}{2}\varepsilon$ On en déduit donc que

$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\ h_i h_j \int_0^1 (1-t)\alpha_{i,j}(a+th)\,\mathrm{d}t = o(\|h\|_\infty^2)$. Ce qui finit la démonstration.

Remarque : Ce DL est unique. *Démonstration 39* exercice.

Remarque (mnémotechnique) : Pour retrouver ce DL, on pose $H = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j$. La différentiabilité de f s'écrit $f(a+h) = f(a) + H + o(h)$. Le DL à l'ordre 2 s'écrit $f(a+h) = f(a) + H + \frac{H^2}{2!} + o(\|h\|^2)$, avec H^2 qui se développe à partir de H comme si c'était un produit, c'est ce que l'on appelle **la puissance symbolique de** H. On utilise les règles suivantes " $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ h_i \times \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(a)\ h_i h_j$ " et " $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a)\ h_j^2$"

Enfin on rappelle que $(a_1+\cdots+a_p)^2 = a_1^2+\cdots+a_p^2+2\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p} a_ia_j$

2°) *Matrice hessienne*

Définition :

Soit f de classe C^2 de $U\subset \mathbb{R}^p$. On appelle **matrice hessienne** de f en a et notée $H_f(a)$, la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$: $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$.

Remarques : D'après le théorème de Schwarz, la matrice hessienne est **symétrique** et $H_f(a) = J_{\nabla f}(a)$.

Exemple : Déterminer la matrice hessienne de f en $a=(x,y,z)$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2+4xy+5xz+6yz$. **Réponse** : $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5\\ 4 & 4 & 6\\ 5 & 6 & 6\end{pmatrix}$.

Expression du DL à l'ordre 2 avec la matrice hessienne

Soit $f : U\subset\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert $U\subset\mathbb{R}^p$. Soit $a\in U$ et soit $h\in\mathbb{R}^p$ tel que $a+h\in U$.

i) $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + (\nabla f(a)|h) + \dfrac{1}{2}(H_f(a)\cdot h|h) + o(\|h\|^2)$

ii) $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^{\mathbf{T}}h + \dfrac{1}{2}h^{\mathbf{T}}H_f(a)h + o(\|h\|^2)$

Démonstration 40

En vertu de l'expression du produit scalaire dans une base OTN : $(\vec{x}\,|\,\vec{y}) = X^{\mathbf{T}}Y$, on a i) $\Longleftrightarrow$ ii).

On a grâce à Taylor-Young :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a)\ h_j^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\ h_ih_j\right) + o(\|h\|^2)$$

Comme la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est OTN (pour sa structure euclidienne canonique !) ,

$\nabla f(a) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a),\dots,\dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)$ et donc $\nabla f(a)^{\mathbf{T}}h = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\ h_j$.

Ensuite $H_f(a)h = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}(a)h_1+\cdots+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_p}(a)h_p\\ \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p\partial x_1}(a)h_1+\cdots+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p\partial x_p}(a)h_p\end{pmatrix}$, puis

$$\begin{aligned} h^{\mathbf{T}}H_f(a)h &= h_1\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}(a)h_1+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_p}(a)h_p\right]+\cdots+h_p\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_p\partial x_1}(a)h_1+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_p\partial x_p}(a)h_p\right]\\ &= \sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a)\ h_j^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\ h_ih_j \text{ (avec Schwarz).}\end{aligned}$$

3°) *Application aux extremums d'une fonction*

a) Condition nécessaire d'extremum local

Proposition :

Soit $f : U\subset\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert U. Soit $a\in U$. On suppose que **f a un minimum local en a**.

Alors a est un point critique et la matrice hessienne $\boxed{H_f(a)\in S_p^+(\mathbb{R})}$ (matrice symétrique positive).

Démonstration 41

On sait déjà que a est un point critique. On a donc avec Taylor-Young,

$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \dfrac{1}{2}h^{\mathbf{T}}H_f(a)h + o(\|h\|^2)$. Posons $\boxed{Q(h) = h^{\mathbf{T}}H_f(a)h}$, on a donc $f(a+h)-f(a) = \dfrac{1}{2}Q(h)+\|h\|^2\varepsilon(h)$.

Supposons qu'il existe un vecteur x_0 de $\mathbb{R}^p$ tel que $Q(x_0)<0$ alors $\forall\lambda>0$, $Q(\lambda x_0)<0$. On choisit un λ_0 assez petit pour que $a+\lambda_0x_0\in U$. On pose alors $h_0=\lambda_0x_0$, donc $Q(h_0)<0$ et donc $\forall t\in[-1,1]$,

$f(a+th_0)-f(a) = \dfrac{1}{2}t^2Q(h_0)+t^2\|h_0\|^2\varepsilon(th_0) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}t^2Q(h_0) < 0$. Donc pour t assez petit non nul on a $f(a+th_0)-f(a)<0$ donc $f(a+th_0)<f(a)$ ce qui contredit le fait que f présente un minimum en a.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^p : x^{\mathbf{T}} H_f(a) x \geqslant 0 : H_f(a) \in S_p^+(\mathbb{R})}$.

Proposition bis :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert U. Soit $a \in U$. On suppose que f **a un maximum local en** a.
Alors a est un point critique et la matrice hessienne $\boxed{H_f(a) \in S_p^-(\mathbb{R})}$ (matrice symétrique négative).
Avec $A \in S_p^-(\mathbb{R}) \iff \forall x \in \mathbb{R}^p \ X^{\mathbf{T}} A X \leqslant 0 \iff -A \in S_p^+(\mathbb{R})$

Remarque : Ces conditions nécessaires ne sont pas suffisantes. En effet si on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y^3$ et $a = (0,0)$ alors en ce point $H_f(a) = (0)$ (qui est bien positive !) et pourtant f ne présente pas en a de minimum local : $f(t,t) - f(0,0)$ est du signe de t pour tout t aussi petit soit-il.

Cependant on a la réciproque si la matrice hessienne est **définie positive** :

b) Condition suffisante d'extremum local

Théorème :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert U. Soit $a \in U$, un point **critique** de f.
On suppose que la matrice hessienne de f en a est **définie positive** : Alors f **a un minimum local strict en** a.

Démonstration 42

Posons $Q(h) = h^{\mathbf{T}} H_f(a) h$, on a toujours grâce à T.Y. :

$f(a+h) - f(a) = \dfrac{1}{2} Q(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$, où $\|\ \|$ est une norme fixée de $\mathbb{R}^p$.

Si $H_f(a)$ est définie positive alors elle définit un produit scalaire : $x^{\mathbf{T}} H_f(a) y$ et donc une norme sur $\mathbb{R}^p$:

$N(x) = \sqrt{Q(x)}$. Comme $\mathbb{R}^p$ est de dimension finie, les 2 normes $\|\ \|$ et N sont 2 normes équivalentes : $\exists \alpha > 0$ et $\beta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^p : \alpha \|x\| \leqslant N(x) \leqslant \beta \|x\|$ donc $\alpha^2 \|x\|^2 \leqslant Q(x) \leqslant \beta^2 \|x\|^2$.

$\forall h \in \mathbb{R}^p$ (tel que $a + h \in U$) , $f(a+h) - f(a) \geqslant \left(\dfrac{1}{2}\alpha^2 + \varepsilon(h) \right) \|h\|^2$.

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^p$, $\|h\| \leqslant \eta \Longrightarrow |\varepsilon(x)| \leqslant \dfrac{\alpha^2}{4}$ et donc

$\forall \|h\| \leqslant \eta$, $f(a+h) - f(a) \geqslant \left(\dfrac{1}{2}\alpha^2 - \dfrac{\alpha^2}{4} \right) \|h\|^2 = \dfrac{\alpha^2}{4} \|h\|^2 > 0$.

Conclusion : $\forall \|h\| \leqslant \eta$,$h \neq 0 \Longrightarrow f(a+h) > f(a)$: f a un minimum strict en a.

Théorème bis :

$\boxed{\text{Si la matrice hessienne de } f \text{ en } a \text{ est } \textbf{définie négative}\text{, alors } f \textbf{ a un maximum local strict en } a}$.

c) Étude de la matrice hessienne dans le cas $E = \mathbb{R}^2$

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert U et soit $a \in U$. On définit **les notations de Monge** :

$$\boxed{p, q, r, s, t : p = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \ , \ q = \frac{\partial f}{\partial y}(a) \ , \ r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \ , \ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \ , \ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \ \text{ et } H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}}$$

Le DL à l'ordre 2 de f en a s'écrit donc, avec $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a + h \in U$,

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + p\ h_1 + q\ h_2 + \frac{1}{2}(r\ h_1^2 + 2s\ h_1 h_2 + t\ h_2^2) + o(\|h\|^2)}$$

La condition " a **est un point critique** " s'écrit donc $\boxed{p = 0 \text{ et } q = 0}$. Dans ce cas le DL s'écrit :

$f(a+h) = f(a) + 0 + \dfrac{1}{2} Q(h) + o(\|h\|^2) = f(a) + \dfrac{1}{2} Q(h) + o(\|h\|^2)$ avec $\boxed{Q(h) = r h_1^2 + 2s\ h_1 h_2 + t h_2^2}$.

$\boxed{\text{Cherchons une CNS sur } r, s, t \text{ pour que } H_f(a) \text{ soit définie positive.}}$

$H_f(a)$ est définie positive si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Si on note λ et μ ses 2 valeurs propres, $[\lambda > 0 \text{ et } \mu > 0] \underset{\text{exercice}}{\iff} [\lambda\mu > 0 \text{ et } \lambda + \mu > 0] \iff [\det H_f(a) > 0 \text{ et } Tr(H_f(a)) > 0]$.

On a donc quatre cas :

$*$ Si $[\det H_f(a) > 0 \text{ et } Tr(H_f(a)) > 0]$ alors $H_f(a)$ est **définie positive**.

$*$ Si $[\det H_f(a) > 0$ et $Tr(H_f(a)) < 0]$ alors $H_f(a)$ est **définie négative**.

$*$ Si $[\det H_f(a) < 0\ ]$ alors $H_f(a)$ n' est **ni positive ni négative**. $\exists u \in \mathbb{R}^2 : Q(u) < 0$ et $\exists v \in \mathbb{R}^2 : Q(v) > 0$.

$*$ Si $[\det H_f(a) = 0]$ alors $H_f(a)$ est [positive sans être définie positive] ou [négative sans être définie négative].

Résumé : Théorème de Monge :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert U. Soit $a \in U$ un point critique de f.
Si $\boxed{rt - s^2 > 0 \text{ et } r + t > 0}$ alors f a un **minimum local strict** en a.
Si $\boxed{rt - s^2 > 0 \text{ et } r + t < 0}$ alors f a un **maximum local strict** en a.
Si $\boxed{rt - s^2 < 0}$ alors f a un **point col** en a.
Si $\boxed{rt - s^2 = 0}$ alors ? ? ? ? ? (**on ne peut rien dire**)

Remarques :

i) Dans le cas $rt - s^2 = 0$, on reprend l'expression $f(a + h) - f(a)$ (sans le DL bien sûr !).

ii) Dans le cas où $E \neq \mathbb{R}^2$, on étudie le signe en un point critique a, de $f(a+h)-f(a) = \frac{1}{2}Q(h)+o(\|h\|^2)$, notamment en étudiant la positivité ou négativité de $Q(h)$ (que l'on obtient par exemple en cherchant les valeurs propres (revoir le théorème spectral)).

Exercices :

a) Déterminer les points critiques et leur "extrémalités" (local/global -strict ou non) de f_i définie sur $\mathbb{R}^p$ par

$f_1(x, y) = x^4 + y^4$, $f_2(x, y) = x^3 + y^3$, $f_3(x, y) = x^2 - 2y^3 + xy$, $f_4(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, $f_5(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + z^3$, $f_6(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$,

Réponses :

Dans les 6 cas, les fonctions sont C^2 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ par T.G.

$\bullet_1$ $\nabla f_1(x, y) = (4x^3, 4y^3)$, on a donc $a = (0, 0)$ unique point critique de f_1. La matrice hessienne en ce point est $H_{f_1}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On ne peut donc pas conclure avec les conditions de Monge, cependant il est clair que a est un minimum global strict. Enfin il n'y a aucun maximum local ou global.

$\bullet_2$ $\nabla f_2(x, y) = (3x^2, 4y^2)$, on a donc $a = (0, 0)$ unique point critique de f_1. La matrice hessienne en ce point est $H_{f_2}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On ne peut donc pas conclure avec les conditions de Monge. Montrons que a est un point col.

$u_n = (\frac{1}{n}, 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0, 0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_2(u_n) > 0$ et $v_n = (-\frac{1}{n}, 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0, 0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_2(u_n) < 0$.

$\bullet_3$ $\nabla f_3(x, y) = (2x + y, -6y^2 + x)$, on a donc deux points critiques : $a = (0, 0)$ et $b = (\frac{1}{24}, -\frac{1}{12})$.

Ensuite $H_{f_2}(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme le déterminant vaut $-1 < 0$, a est donc un point col.

Enfin $H_{f_3}(b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comme le déterminant vaut $1 > 0$ et la trace $3 > 0$, b est donc un minimum local strict.

b n'est pas un minimum global car $f_3(0, y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et donc il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f_3(0, y_0) < f_3(b) - 1$.

$\bullet_4$ On trouve facilement 4 points critiques : $a = (2, 1)$, $b = (1, 2)$, $c = (-1, -2)$, $a = (-2, -1)$ puis Monge.

$\bullet_5$ $\nabla f_5(x, y, z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z+3z^2)$, on a donc deux points critique : $a = (0, 0, 0)$ et $b = (\frac{4}{27}, \frac{4}{27}, -\frac{4}{9})$

La matrice hessienne en a est $A = H_{f_2}(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme "d'habitude" $\text{rg}(A - I_3) = 1$, donc 1 est valeur propre et son espace propre est de dimension 2. Ensuite le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A de valeur propre 4. Les valeurs propres sont toutes strictement positives.

Conclusion: a est un minimum local strict de f_5.

Comme $f_5(0,0,z) = z^3 \underset{z\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, a n'est pas un minimum global.

La matrice hessienne en b est $B = H_{f_2}(b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$. $\chi_B(x) = \dfrac{1}{3}(x-1)(3x^2-7x-12)$ (à l'aide de l'opération $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$). Le discriminant de $3x^2 - 7x - 12$ est strictement positif et le produit de ses racines est négatif donc χ_B admet 2 racines strictement positives et une racine strictement négative.

Conclusion: b est un point col de f_5.

b) Déterminer de deux manières différentes : $m = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} (e^t - a - bt)^2 \,\mathrm{d}t \right)$.

Réponses :

Première méthode On utilise les produits scalaires :

$E = \mathbb{R}[X]$ munit du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. On a alors $m = \mathrm{d}(\exp, \mathbb{R}_1[X])^2$....

Deuxième méthode On utilise Monge : On pose $f(x,y) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (e^t - x - yt)^2 \,\mathrm{d}t$.

On trouve alors $f(x,y) = \dfrac{1}{2}e^2 - 2ex + 2x^2 + \dfrac{2}{3}y^2 - \dfrac{1}{2}e^{-2} + \dfrac{2}{e}x - \dfrac{4}{e}y$

On trouve ensuite un unique point critique : $a = (\dfrac{e}{2} - \dfrac{1}{2e}, \dfrac{3}{e})$ et $H_f(a) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

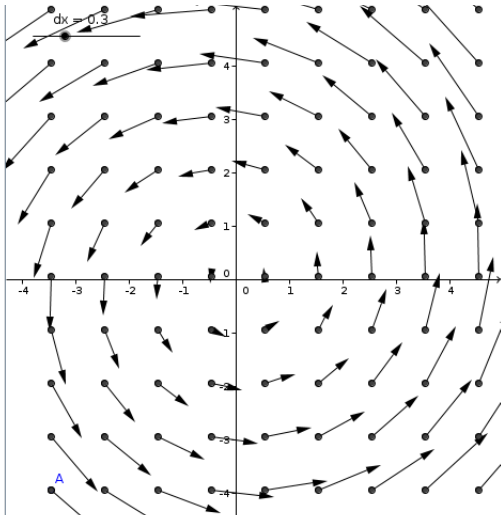
On en déduit que a est un minimum local strict et $f(a) = 1 - \dfrac{7}{e^2}$

On montre ensuite que $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = +\infty$ et on utilise TBA ou directement !

ANNEXE : **Exemple pour la physique**

Notons $E = \mathbb{R}^p$ munit de son produit scalaire canonique, E est donc euclidien.

Soit $F : U \subset E \longrightarrow E$, on dit que F **est un champs de vecteurs**.



Le **gradient** d'une fonction différentiable de U dans $\mathbb{R}$ est un exemple de champs de vecteurs.

On dit que **le champs de vecteur** $F : U \subset E \longrightarrow E$ **dérive d'un potentiel** s'il existe une fonction $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$, différentiable sur U et tel que $F = \mathrm{d}f$. On dit alors que f est un **potentiel** de F.

0. Dans le cas où F est de classe C^1 et dérive d'un potentiel sur U, si l'on note $(F_1, \ldots, F_p)$ ses fonctions coordonnées dans la base canonique (qui est OTN), montrer que

$$(*) \qquad : \qquad \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 : \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

1. Le champs $F : (x,y) \longmapsto (xy^2, -xy)$ dérive-t-il d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$?
2. Déterminer un potentiel du champs $F : (x,y) \longmapsto (2xy, x^2+y)$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. a) Démontrer que le champs $F : (x,y) \longmapsto \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$ définie sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ vérifie les relations $(*)$.

   b) Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \Big(F(\gamma(t)) \mid \gamma'(t)\Big)\,\mathrm{d}t$ où γ est l'arc $\gamma \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$ et $(\cdot \mid \cdot)$ représente le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.

   c) En déduire que F ne dérive pas d'un potentiel sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

   d) Montrer que F dérive d'un potentiel sur $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y > 0\}$.

Réponses :

0. Si $F = \mathrm{d}f$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = F_j$, d'où $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, on conclut alors par le théorème de Schwarz.

1. On a $F_1(x,y) = xy^2$ et $F_2(x,y) = -xy$ et dans cet exemple $x_1 = x$ et $x_2 = y$.
   Comme $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2xy$ et $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = -y$, $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} \neq \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ sur $U = \mathbb{R}^2$ et donc F ne dérive pas d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$.
2. On a $F_1(x,y) = 2xy$ et $F_2(x,y) = x^2 + y$.
   Comme $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2x$ et $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = 2x$, on a la relation $(*)$ qui est vérifiée.
   Cherchons une fonction f telle que $F = \mathrm{d}f$. On doit donc avoir $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$. Comme $\mathbb{R}^2$ est **convexe**, $f(x,y) = x^2y + \varphi(y)$. Tout est C^1 et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 + y$. On en déduit que $\varphi'(y) = y$ sur $\mathbb{R}$ et donc il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = x^2y + \dfrac{y^2}{2} + \lambda}$.

3. a) $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} (F(\gamma(t))|\gamma'(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} [F_1(\cos t, \sin t) \times (-\sin t) + F_2(\cos t, \sin t) \times (\cos t)]\,\mathrm{d}t = -2\pi.$

c) Si F dérivait d'un potentiel f sur U, alors
$\displaystyle\int_0^{2\pi} (F(\gamma(t))|\gamma'(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\nabla f(\gamma(t))|\gamma'(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\,\mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t))\,\mathrm{d}t$
$= f(\cos 2\pi, \sin 2\pi) - f(1,0) = 0$: absurde.

d) On fait comme au 2.

On a $F_1(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ et $F_2(x,y) = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$.

Cherchons une fonction f telle que $F = \mathrm{d}f$. On doit donc avoir $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$. Comme U est convexe, $f(x,y) = \arctan(\dfrac{x}{y}) + \varphi(y)$. Tout est C^1 et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-x}{x^2+y^2} + \varphi'(y) = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$.
On en déduit que $\varphi'(y) = 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \arctan(\frac{x}{y}) + \lambda}.$$