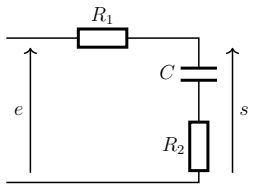
TD n°1
Éléments de traitement du signal

Exercice 1 : Vrai ou Faux ? ⋆ | ⚓

1. Un signal périodique possède toujours une fréquence fondamentale et ses harmoniques.
2. Un filtre passe-bas laisse passer toutes les fréquences supérieures à une fréquence de coupure et atténue les autres.
3. Si on applique un filtre linéaire à un signal périodique, la sortie est toujours périodique avec la même période que l'entrée.
4. Pour calculer la réponse d'un filtre à un signal périodique, on doit décomposer le signal d'entrée en série de Fourier.
5. Un filtre linéaire modifie uniquement les amplitudes des composantes harmoniques d'un signal périodique, jamais leurs phases.
6. L'application d'un filtre à un signal périodique peut changer la fréquence fondamentale du signal.
7. Un filtre passe-haut atténuera davantage les basses harmoniques d'un signal périodique que ses hautes harmoniques.
8. Si une harmonique de l'entrée est située dans une bande où le gain du filtre est nul, elle disparaît complètement à la sortie.
9. Les phases de sortie des harmoniques dépendent uniquement de la phase des harmoniques d'entrée.
10. La superposition des réponses à chaque harmonique permet de reconstruire complètement la sortie dans le domaine temporel.
11. Pour obtenir la hauteur des raies ω_i dans le signal de sortie, il suffit de connaître celles du signal d'entrée et de multiplier chacune par $|\underline{H}(j\omega_i)|$.
12. Soit un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$. Un signal $e(t) = E\cos(\omega_0 t)$ placé à son entrée donne en sortie $s(t) = |\underline{H}(j\omega_0)|E\cos(\omega_0 t)$.
13. Il suffit d'augmenter $e(t)$ d'un facteur 10 pour avoir un signal en sortie du filtre linéaire 10 fois plus important.
14. Un signal sinusoïdal en entrée d'un système linéaire donne nécessairement un signal de sortie sinusoïdal de même fréquence mais d'amplitude différente et déphasé.
15. Un signal carré en entrée d'un système linéaire donne nécessairement un signal de sortie carré de même période mais d'amplitude différente et déphasé.

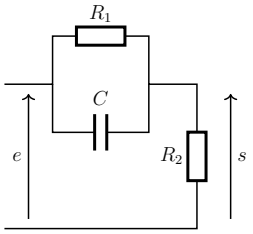
Exercice 2 : Diagrammes de Bode ⋆ | 🏗 ✪

On considère le circuit ci–contre, réalisé avec : $R_1 = 1{,}0 \times 10^5\,\Omega$; $R_2 = 1{,}0\,\text{k}\Omega$ et $C = 1{,}0\,\mu\text{F}$:



1. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ de ce filtre en faisant apparaître deux temps caractéristiques τ et τ'. Faire les applications numériques.
2. Quelles sont les pentes des asymptotes dans le diagramme de Bode en gain de ce filtre ? Le filtre présente-t-il un comportement intégrateur ? dérivateur ?

On réalise maintenant le filtre suivant :

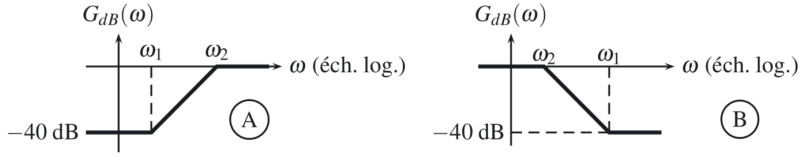


3. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre se met sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = a\frac{1 + j\omega/\omega_1}{1 + j\omega/\omega_2}$$

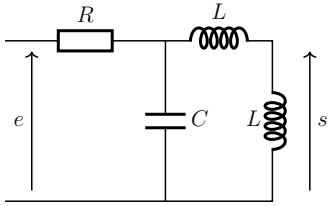
On précisera les expressions de a, ω_1 et ω_2 en fonction de R_1, R_2 et C.

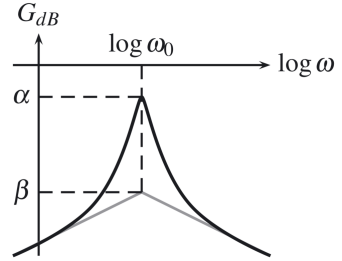
4. Lequel des deux diagrammes asymptotiques représentés ci-dessous correspond à ce filtre ? On donne $\omega_1 = 10\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, calculer ω_2.



Exercice 3 : Filtre de Hartley ⋆⋆ | ⚓ 🔧

On considère un filtre de Hartley, correspondant au montage de la figure suivante et on donne le diagramme de Bode en gain associé.





1. Montrer que sa fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = G_0 \cdot \frac{2j\xi\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2j\xi\dfrac{\omega}{\omega_0} - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

et exprimer G_0, ξ et ω_0 en fonction de R, L et C. Faire les applications numériques.
Données : $R = 10{,}0\,\text{k}\Omega$; $L = 1{,}00\,\text{mH}$ et $C = 100\,\text{nF}$.

2. Identifier les pentes des asymptotes (en gris dans le diagramme de Bode) et trouver les valeurs de α et β.
3. On étudie la réponse de ce filtre au signal d'entrée $e_1(t) = E_0 + E_1\cos(\omega_0 t)$. Calculer l'expression littérale de la sortie $s_1(t)$ associée.

4. On alimente maintenant le filtre avec un signal créneau $e_2(t)$ de période $T = \dfrac{6\pi}{\omega_0}$, d'amplitude crête-à-crête $2E = 2\,\text{V}$. On rappelle que ce signal est décomposable en série de Fourier, en posant $\omega_2 = \dfrac{2\pi}{T}$:

$$e_2(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2n+1)\omega_2 t\right)}{2n+1}$$

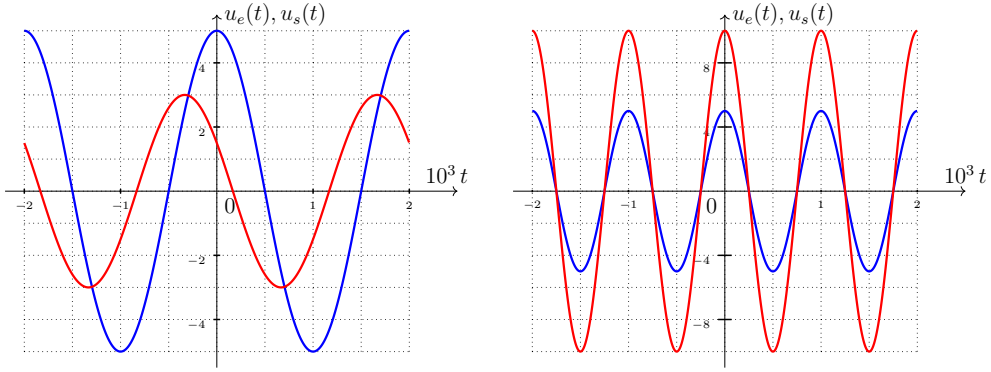
a) Calculer la valeur efficace E_{2eff} de e_2.
b) Tracer l'allure du spectre de e_2 en précisant bien les pulsations des trois premières harmoniques.
c) Calculer numériquement les amplitudes du fondametal et des trois premières harmoniques du signal de sortie s_2. Expliquer alors pourquoi ce montage peut-être qualifié de "tripleur de fréquence".
d) Donner une approximation raisonnable de l'expression numérique de s_2.

Exercice 4 : Caractéristiques d'un filtre ★ | ⚓ ⚓

On alimente un filtre de fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ(x - 1/x)}$$

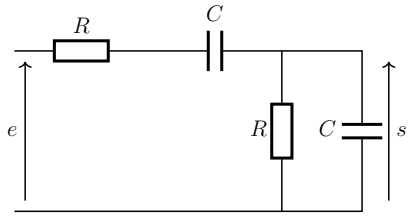
en posant $x = f/f_0$ avec une tension sinusoïdale $u_e(t) = 5\cos(2\pi f t)$. On observe à l'oscilloscope les courbes ci-dessous, avec $f = 500\,\text{Hz}$ (gauche) et $f = 1000\,\text{Hz}$ (droite).



1. Calculer H_0, f_0 et Q.
2. Déterminer la tension de sortie $u_s(t)$ pour $f = 300\,\text{Hz}$ et $f = 3000\,\text{Hz}$. Représenter $u_s(t)$ pour $f = 300\,\text{Hz}$.

Exercice 5 : Filtre de Wien ★ | ⚓ ⚓

On étudie le filtre suivant, en posant $\tau = RC$:



1. Déterminer la fonction de transfert de ce filtre en régime harmonique et proposer une forme canonique pour cette fonction de transfert.
2. On alimente l'ensemble au moyen d'une tension $u_e(t)$ en créneau, de valeur moyenne E_m, d'amplitude crête-à-crête $u_{emax} - u_{emin} = 2E_0$ et de fréquence f. Déterminer la forme de la tension de sortie $u_s(t)$ dans les deux cas $f\tau \gg 1$ et $f\tau \ll 1$.
3. Reprendre la question précédente si le filtre est alimenté avec une tension $u_e(t)$ en triangle, de valeur moyenne E_m, d'amplitude crête-à-crête $u_{emax} - u_{emin} = 2E_0$ et de fréquence f.

Exercice 6 : Effet des non-linéarités ★★ | ⚓

Un amplificateur linéaire peut-être mis en défaut si l'amplitude du signal d'entrée est trop élevée. Dans ce cas-là, il se comporte de façon non linéaire et fournit une tension de sortie qui suit la relation ci-dessous en fonction de la tension d'entrée :

$$s(t) = A + Be(t) + Ce^2(t) + De^3(t)$$

1. On dispose en entrée une tension sinusoïdale de fréquence f_0 et d'amplitude assez élevée pour observer les non-linéarités. Représenter une allure réaliste du spectre en fréquence du signal de sortie.
2. On utilise maintenant en entrée un signal non sinusoïdal de fréquence centrale f_0 et de largeur Δf. Représenter l'allure des spectres des signaux d'entrée et de sortie.
